МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}\cdot k_1$

$b = 2^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}\cdot k_2$

$c = 2^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}\cdot k_3$, показатели 2 и 7 $\in \mathbb{N}\cup\{0\}$

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$

$ab = 2^{\alpha_1+\beta_1}\cdot 7^{\alpha_2+\beta_2}\, k_1\cdot k_2 = 2^{15}\cdot 7^{11}\cdot t_1,\ t_1\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \alpha_1+\beta_1 \geq 15$

$\alpha_2+\beta_2 \geq 11$, Аналогично с остальными

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1\geq 15 & (1)\\ \alpha_2+\beta_2\geq 11 & (2)\\ \alpha_1+\gamma_1\geq 23 & (3)\\ \alpha_2+\gamma_2\geq 39 & (4)\\ \beta_1+\gamma_1\geq 17 & (5)\\ \beta_2+\gamma_2\geq 18 & (6)\end{cases}$$

~~(1)+(3)~~

$\cancel{2\alpha_1+(\beta_1+\gamma_1)\geq 38}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)\geq 55\\ 2(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2)\geq 68\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\beta_1+\gamma_1\geq \frac{55}{2} > 27\\ \alpha_2+\beta_2+\gamma_2\geq 34\end{cases}.$$

$\Rightarrow abc \geq 2^{28}\cdot 7^{34}$, осталось привести пример a, b, c. Т.к. $ac \,\vdots\, 7^{39} \Rightarrow abc \,\vdots\, 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28}\cdot 7^{39}$

$$\begin{cases} a = 2^{11}\cdot 7^{16}\\ b = 2^{4}\cdot 7^{0}\\ c = 2^{13}\cdot 7^{23}\end{cases}$$

пример a, b, c.

Значит ответ: $\boxed{2^{28}\cdot 7^{39}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(a, b) = 1$ $\qquad m \geqslant 1$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

НОД$(a,b) = (a,b)$

НОД$(a+b,\ a^2-7ab+b^2) = m \to \max$ –?

Св-во НОД(a,b): НОД(a,b) = НОД$(a, \overset{b+ka}{\cancel{a+kb}})$, при $\forall k \in \mathbb{Z}$.

$$a^2-7ab+b^2 = (a-b)^2 - 5ab = (a+b)^2 - 9ab$$

$$(a+b,\ (a+b)^2 - 9ab) = (a+b,\ (a+b)^2 - 9ab - (a+b)^2) =$$

т.к. $-(a+b) \in \mathbb{Z}$

$$= (a+b,\ -9ab) = (a+b,\ 9ab).$$

$m \geqslant 3$ (при $a=1$, $b=2$, $m=3$)

Пусть $a \underset{7}{\equiv} a_1$, $b \underset{7}{\equiv} b_1$

$a_1 \not\equiv b_1$

~~$a+b = m$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
		X				

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

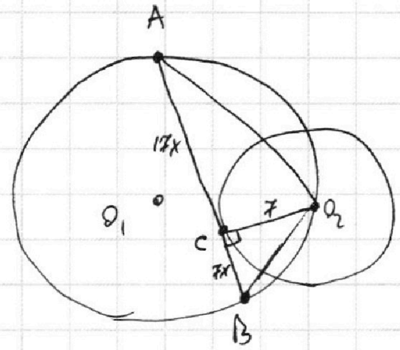
№3

$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$ $R = 13$ $r = 7$

~~$S_{\Delta AO_2B} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x$~~

$\Omega(O_1, R)$
$\omega(O_2, r)$

$AC = 17x$
$AB = 7x$



$S_{\Delta AO_2B} = \frac{1}{2} 7 \cdot 24x = \frac{1}{2} AO_2 \cdot O_2B \cdot \sin\angle AO_2B = p \cdot R$ (полупериметр)

$\angle O_2CA = 90$ (т.к. O_2C - радиус в точку касания)

$\Rightarrow \Delta AO_2C$ и ΔO_2CB - прямоугольные

$\Rightarrow$ По т. Пифр: ~~$AO_2 = \sqrt{49}$~~ $AO_2^2 = (17x)^2 + 7^2$

$O_2B^2 = (7x)^2 + 7^2$

$$S_{\Delta AO_2B} = \frac{1}{2} \cdot O_2C \cdot AB = \frac{AO_2 \cdot O_2B \cdot AB}{4R}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 7 = \frac{AO_2 \cdot O_2B}{4R}$$

$$7 \cdot 2 \cdot 13 = AO_2 \cdot O_2B \quad |^2$$

$$(14 \cdot 13)^2 = ((17x)^2 + 7^2)((7x)^2 + 7^2)$$

$$7^2 \cdot 2^2 \cdot 13^2 \, \cancel{182^2} = 7^4 + 49(289+49)x^2 + 289 \cdot 49x^4 \quad | : 7^2$$

$$\cancel{2}\, 26^2 = 7^2 + 338x^2 + 289x^4$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$x = 1$: $289 + 338 - 627 = 0$ V

$\Rightarrow x = -1$ V (т.к. чётная функция) ~~(см. след. стр.)~~

(см. другой бланк)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(уравнение)

$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0 \quad (*)$

Схема Горнера:

1)

	289	0	338	0	−627
$x=1$		289	289	627	627
	289	289	627	627	0

2)

	289	289	627	627
$x=-1$		−289	0	−627
	289	0	627	0

$\Rightarrow (*) = (x^2-1)\underbrace{(289x^2+627)}_{>0} = 0$

$\Updownarrow$

$\Rightarrow x=1$ единственный подходящий корень

$\Rightarrow AB = 24x = 24$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$$

$$\ominus\ \begin{array}{l} 3x^2-6x+2=a \\ 3x^2+3x+1=b \\ \hline 1-9x=a-b \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b}=a-b$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(1-\sqrt{a}+\sqrt{b})=0$$

$\Rightarrow$ (1) $\sqrt{a}=\sqrt{b}$

(2) $1=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

(1) $\sqrt{3x^2-6x+2}=\sqrt{3x^2+3x+1}\ \big|^2$

$$3x^2-6x+2=3x^2+3x+1$$

$$1=9x$$

$$\boxed{x=\frac{1}{9}}$$

Проверка: $\sqrt{3\cdot\frac{1}{81}-6\cdot\frac{1}{9}+2}-\sqrt{3\cdot\frac{1}{81}+3\cdot\frac{1}{9}+1}=\underbrace{1-\frac{1}{9}\cdot 9}_{=0}$

$$\sqrt{\frac{1}{27}\underbrace{-\frac{2}{3}+2}_{\frac{4}{3}}}-\sqrt{\frac{1}{27}+\underbrace{\frac{1}{3}+1}_{\frac{4}{3}}}=0 \ (V)$$

(2) $1=\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\ \big|^2$ верно при $3x^2-6x+2\geq 0$

$$1=6x^2-3x+3+2\sqrt{(3x^2+3x+1)(3x^2-6x+2)}$$

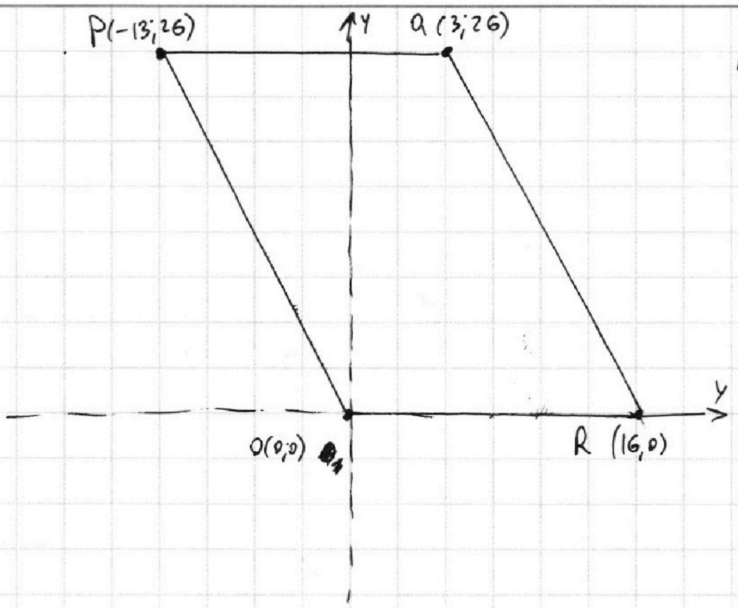
$$0=\underbrace{(6x^2-3x+2)}_{f(x)}+\underbrace{2\sqrt{(3x^2+3x+1)(3x^2-6x+2)}}_{g(x)}$$

$f(x)=6x^2-3x+2$, $D=9-4\cdot6\cdot2<0\Rightarrow f(x)>0$, при $\forall x$

$g(x)>0$, т.к. под корнем

$\Rightarrow$ (2) $\varnothing$

Ответ: $\boxed{\frac{1}{9}}$



$A(x_1;y_1)$ $B(x_2;y_2)$

$\{x_1, y_1, x_2, y_2\} \in \mathbb{Z}$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

Пусть $B = P$

$\Rightarrow 2\cdot(-13) - 2\cdot(x_1) + 26 - y_1 = 14$

$2x_1 + y_1 = -14$

$y_1 = -2x_1 - 14 = f(x_1)$

$y = f(x_1)$ – прямая параллельная PO проходящая через т. $(0,-14)$ $\Rightarrow \notin$ парал.-му.

A – целые коорд-ты $\overset{\text{решения } \exists}{\Leftrightarrow}$ $a_1x_1 + b_1y_1 = c_1$, $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

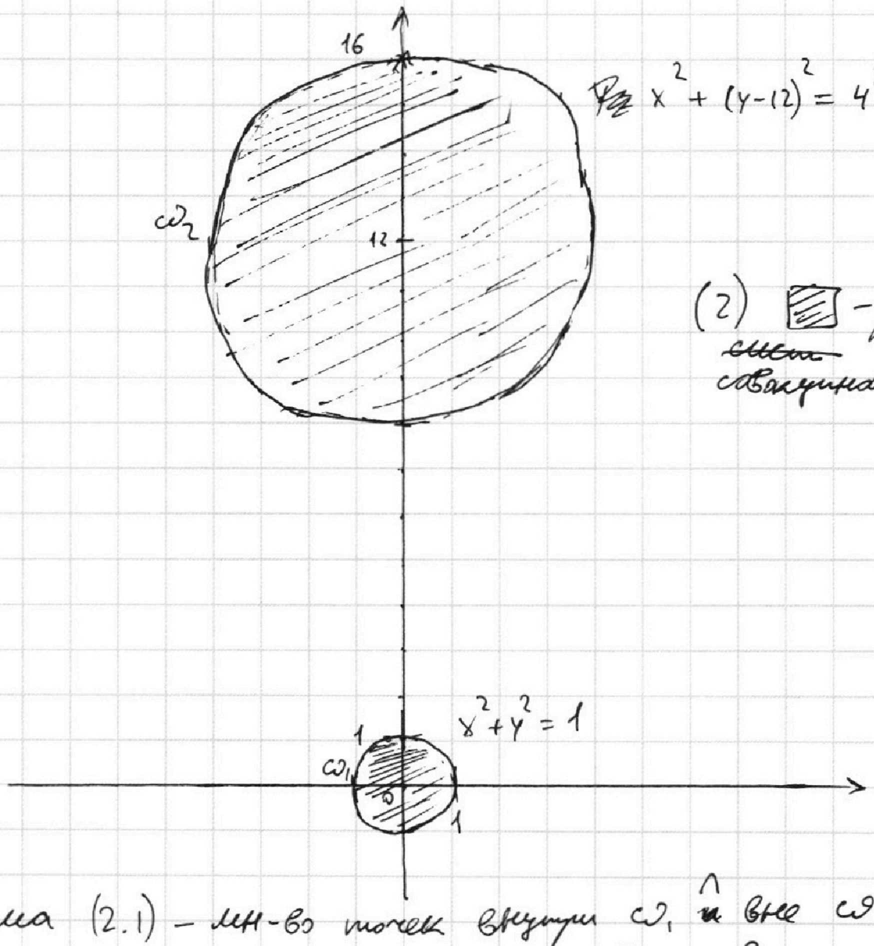
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 $\begin{cases} ax+y-8b=0 & (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 & (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2-1 \leq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \geq 0 \end{cases} \leftarrow (2.1) \\ \begin{cases} x^2+y^2-1 \geq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \leq 0 \end{cases} \leftarrow (2.2) \end{array} \right.$

~~(0,0) r = 1~~

~~Прям~~ левые части и – ~~от~~ окружности ω_1 с центром $(0,0)$ и $r_1 = 1$
ω_2 с ц. $(0,12)$ и $r_2 = 4$



(2) ▨ – решения ~~смт~~ совокупности

система (2.1) – мн-во точек внутри ω_1 $\cap$ вне ω_2
сис. (2.2) – мн-во т. внутри ω_2 $\cap$ вне ω_1

~~(2.1) – вся плоскость кроме внутр круга ω_2~~
~~(2.2) – вся плоскость~~ (2.1) – мн-во т. внутри ω_1
(2.2) – мн-во т. внутри ω_2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\boxed{№6}$ (продолжение № 1)

~~$ax+y-8b = 0$~~

~~$y = -ax+8b = f(x)$ – прямая с коэф. наклона $-a$~~

~~и $y \cap Oy = 8b$.~~

~~1) $f(x)$ пересекает ω_1 и не пересекает ω_2~~

~~2) $f(x)$ наоборот п. 1~~

~~3) $f(x)$ касается внешне ω_1 и ω_2~~

~~4) $f(x)$ касается внутренне ω_1 и ω_2~~

$ax+y-8b=0$

$y=-ax+8b=f(x)$ – прямая коэф наклона $-a$ и

и $y \cap Oy = 8b$.

Если прямая пересекает 2 раза какую-то окружность $\Rightarrow$ решений > 2

$\Rightarrow$ прямая должна быть касательной к двум окружностям. Т.к. окр. $\omega_1 \cap \omega_2 \Rightarrow \exists$ внешняя и внутренняя ~~касат.~~ общ. касат.

$\Rightarrow y = -ax+8b$

$x^2+y^2=1$ при y имеет 1 решение

$x^2+(-ax+8b)^2=1$ (т.к. картинка симметрична отн-но Oy $\Rightarrow$ если a_0 – решение, то $a=-a_0$ – решение)

$x^2+a^2x^2-16abx+64b^2=1$

$(1+a^2)x^2-16abx+64b^2-1=0$

$D = 256a^2b^2-4(1+a^2)(64b^2-1)=0$ (т.к. 1 корень)

$256a^2b^2-(4+4a^2)(64b^2-1)=0$

№6 (продолжение 2)

$$256a^2b^2 - (256b^2 + 256a^2b^2 - 4 - 4a^2) = 0$$

$$4a^2 + 4 = 256b^2 \quad |:4$$

$$a^2 + 1 = 64b^2.$$

$16 \cdot 9 = 144$, $16 \cdot 6 = 96$

С другой стороны

$x^2 + (y-12)^2 = 16$ при $y = -ax + 8b$ — 1 реш.

$$x^2 + (-ax + 8b - 12)^2 = 16$$

$$x^2 + (8b - ax - 12)^2 = 16$$

$$x^2 + 64b^2 + a^2x^2 + 144 - 16abx - 192b + 24ax = 16$$

$12 \cdot 8 = 96$, $96 \cdot 2 = 192$; $144 - 16 = 128$

$$(1+a^2)x^2 + (24a - 16ab)x + (64b^2 - 192b + 128) = 0$$

$$D = (8a(3-2b))^2 - 4(1+a^2)(64b^2 - 192b + 128) = 0$$

$$64a^2(9 - 6b + 4b^2) - 4(64b^2 - 192b + 128 + 128a^2 - 192a^2b + 64a^2b^2) = 0 \quad /:4$$

$$64a^2b^2 + 144 - 96ba^2 - 64b^2 - 192b + 128 + 128a^2 - 192a^2b + 64a^2b^2 = 0$$

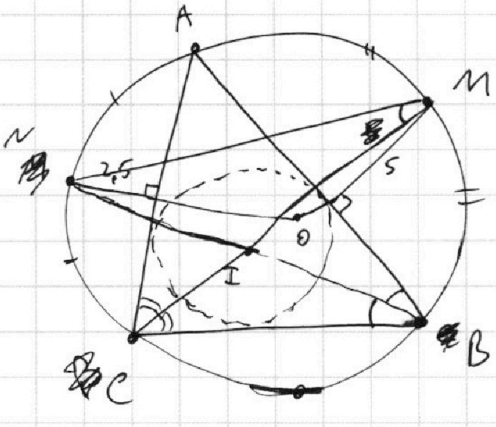
(Не успел. далее получаем систему из двух уравнений на (a, b), решаем, получаем 2 значения a, которые дают ещё два решения при домножении на -1, т.к. симметрия отн-но Oy)

Ответ: $\pm a_1$, $\pm a_2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

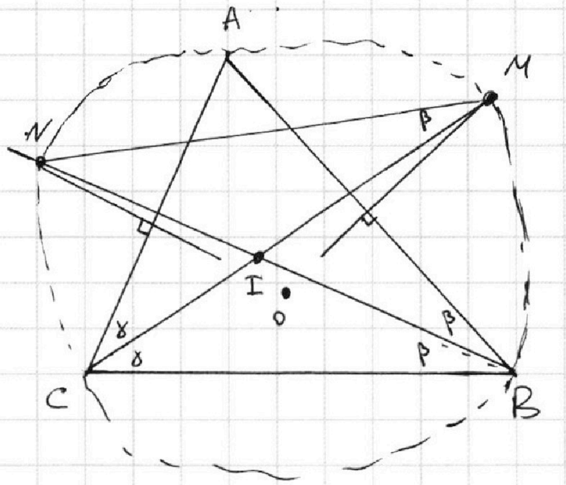
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



AI – ?

I – центр.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2} \cdot k_1$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \cdot k_2$

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2} \cdot k_3$, $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2\}$ – степень вхождения двойки и семёрки в числа $\in \mathbb{N} \Rightarrow \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{k_1, k_2, k_3\}$ – ~~...~~ другие мн-ли $\Rightarrow \{k_1, k_2, k_3\} \in \mathbb{N}$.

$ab \vdots 2^{15} 7^{11} \Rightarrow 2^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 7^{\alpha_2+\beta_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \vdots (2^{15} \cdot 7^{11})$

Аналогично с остальными $\Rightarrow$ система:

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1 = 15 \\ \alpha_2+\beta_2 = 11 \\ \alpha_1+\gamma_1 = 23 \\ \alpha_2+\gamma_2 = 39 \\ \beta_1+\gamma_1 = 17 \\ \beta_2+\gamma_2 = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{21}{2} \\ \beta_1 = \frac{9}{2} \\ \gamma_1 = \frac{25}{2} \\ \alpha_2 = 16 \\ \beta_2 = -5 \\ \gamma_2 = 23 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{21}{2} \\ \alpha_2 = 16 \\ \beta_1 = \frac{9}{2} \\ \beta_2 = -5 \\ \gamma_1 = \frac{25}{2} \\ \gamma_2 = 23 \end{cases}$$

Такие решения системы обусловлены тем, что я считаю, что $k_1, k_2, k_3 \not\vdots 2$ и $\not\vdots 7$, ~~хотя это~~ ~~...~~ значит $k_1, k_2, k_3 \vdots 2$ и $\vdots 7$, там, где решения <0 или $\notin \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow k_1 \vdots$ (хотя бы 2) ~~...~~ $\Rightarrow k_1 \geq 2$

$k_2 \vdots$ (хотя бы 2 и хотя бы 7^5) $\Rightarrow k_2 \geq 2 \cdot 7^5$

$k_3 \vdots$ (хотя бы 2) $\Rightarrow k_3 \geq 2$

~~$\Rightarrow abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2} \cdot k_1 k_2 k_3$~~

$y - f(x) = (x - x_k)$

$\Rightarrow$ Новая система

a, b

$b = ka + r$

$r = b - ka$

$(a, b) = (a, r) = a, b - ka$

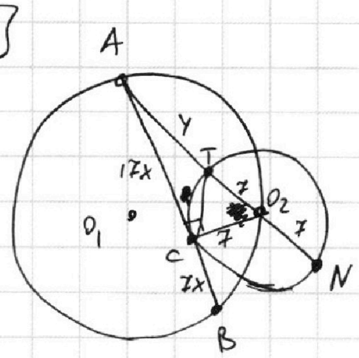
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X			

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3



$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$

$\Omega(O_1, R)$

$\omega(O_2, r)$

$R = 13$

$r = 7$

$AB - ?$

Пусть $AC = 17x \Rightarrow BC = 7x$

$AO_2 \cap \omega = T$, $AT = y$

O_2C - радиус к т. касания $\Rightarrow \angle O_2CA = 90$

(1) По т. о касат. и сек. для ω и т. A:

(пусть $AT \cap \omega$ вторично в т. N)

$AT \cdot AN = AC^2$

$\Rightarrow y \cdot (14 + y) = 17x^2$

$S_{\Delta AO_2B} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x = \frac{AO_2 \cdot O_2B \cdot AB}{4R}$, т.к. $AB = 24x \neq 0$

$\Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{AO_2 \cdot O_2B}{4R}$, $AO_2 = \sqrt{49 + (17x)^2}$, (т. Пиф в ΔACO_2)

$O_2B = \sqrt{49 + (7x)^2}$, (т. Пиф. в ΔO_2CB)

$\Rightarrow \frac{7}{2} \cdot 4 \cdot 13 = \sqrt{49 + (7x)^2} \cdot \sqrt{49 + (7x)^2}$

$14 \cdot 13 = \sqrt{(49 + 289x^2)(49 + 49x^2)} \quad |\,{}^2$

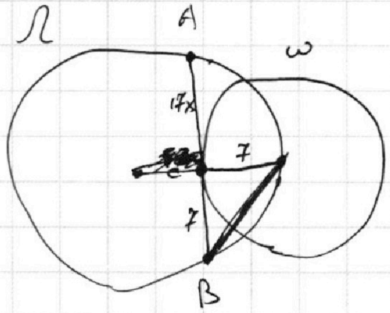
$(182)^2 = (49)^2 + (49 \cdot 289 + 49 \cdot 49)x^2 + 289 \cdot 49x^4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

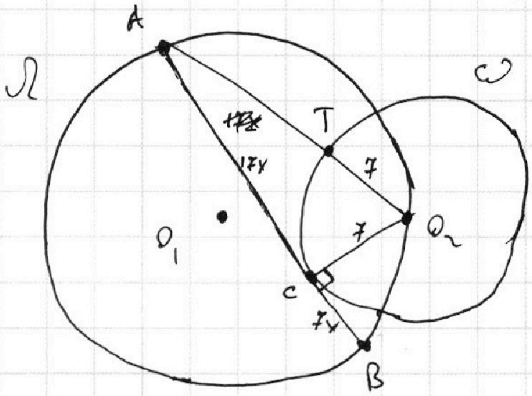


$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$

$AB - ?$

$r = 7$

$R = 13$



~~AT~~

$(17x)^2 = AT \cdot (AT + 7)$

$(17x)^2 + 7^2 = (AT+7)^2$

$ab \,\vdots\, 2^{15} 7^{11}$

$bc \,\vdots\, 2^{17} 7^{18}$

$ac \,\vdots\, 2^{23} 7^{39}$

$(abc)\min - ?$

~~НОД~~$(ab, bc) =$

$a = 2^{\alpha_1} 7^{\alpha_2}$

$b = 2^{\beta_1} 7^{\beta_2}$

$c = 2^{\gamma_1} 7^{\gamma_2}$

~~$a \cdot b \,\vdots$~~ $ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 15 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 11 \end{cases}$

$ab \equiv 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

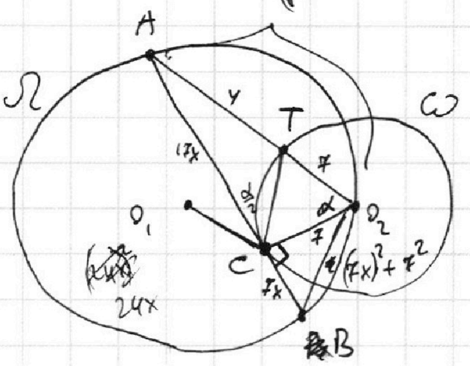
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 3



~~Пусть~~

$\frac{AC}{CB}=\frac{17}{7}$, O_1 – центр Ω

O_2 – центр ω

r – радиус ω

R – радиус Ω

AB – ?

$(a,b)=1$

Решение.

$a+b$

Пусть $AC=17x \Rightarrow BC=7x$.

Пусть $AO_2 \cap \omega = T$. Пусть $AT=y$.

(1) По т. о касательной и секущей для ω в т. A:

$AO_2 \cdot AT = AC^2$, т.к. AC – касат.

$(7+y)y=(17x)^2$ (1)

(2) Проведём радиус ω O_2C, $\angle O_2CA$ – прямой.

$\Rightarrow$ По т. Пиф. в $\triangle ACO_2$: $AC^2+CO_2^2=AO_2^2$

(2) $(17x)^2+7^2=(7+y)^2$

(1) в (2): $(7+y)y+7^2=(7+y)^2$

$7y+y^2+49=49+14y+y^2$

$0=7y$

~~$\sin\alpha=17x$~~

$\cos\alpha=\frac{7}{7+y}$

$\sin\alpha=\frac{17x}{7+y}$

$\frac{49+(17x)^2}{(7+y)^2}=1$

$49+(17x)^2=(7+y)^2$

$(49+289x^2)(49+49x^2)$

$\frac{abc}{4R}$

49^2+

$49+$

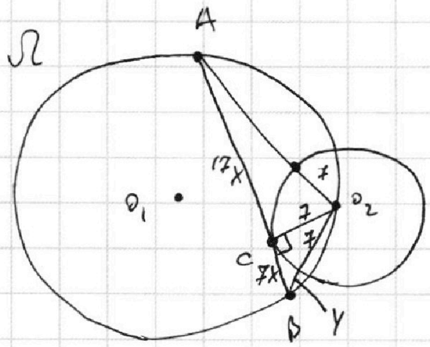
$14 \cdot 13 = 42 + 140 = 182$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$

$AB - ?$ $r = 7$

$R = 13$

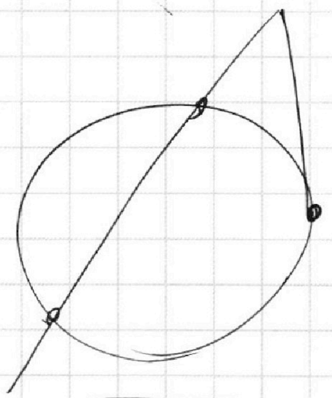
$(7x)^2 + 49 = (7+y)^2$

$(7x)^2 = (7+y)\cdot y =$

$y(7+y) + 49 = (7+y)^2$

$y^2 + 7y + 49 = y^2 + 14y + 49$

$y = 0$



$\cancel{1^2 = 17x}$

$(17x)^2 +$

$3x^2 - 6x + 2 = 0$

$D = 36 - 24 = 12 = 4 \cdot 3$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} =$

$= \frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{3}} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\underbrace{\sqrt{3x^2 - 6x + 2}}_{a} - \underbrace{\sqrt{3x^2 + 3x + 1}}_{b} = \underbrace{1 - 9x}_{a - b} \quad |^2$

$\cancel{3x^2 - 6x + 2 = 0}$

$1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cancel{D = 36 - 4\cdot 6 = 12}$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

$b - \sqrt{b} = a - \sqrt{a}$

$$\begin{aligned} - \quad 3x^2 - 6x + 2 &= a \\ 3x^2 + 3x + 1 &= b \\ \hline 1 - 9x &= a - b \end{aligned}$$

$\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2$

$1 = a + b + 2\sqrt{ab}$

$3x^2 + 3x + 1 \geq$

$\geq 3\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) + 1$

$\geq 3\cdot\frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{3} + \sqrt{3} + 3 + 1 >$

$3\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{4} + \frac{6}{4} + 2 =$

$= \frac{9}{4} + \frac{8}{4} = \frac{17}{4}$

$3x^2 + 3x + 1 = 0$

$D = 9 - 4\cdot 3 < 0$

$x_b = -\frac{3}{2\cdot 3} = -\frac{1}{2}$

$y_b = \frac{3}{4} - \frac{6}{4} + 1 = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [x] 3 [x] 4 [x] 5 [x] 6 [x] 7 [x]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) \geq 15+\overbrace{23+17}^{40} = 55$

$\underbrace{11+39}_{50}+18 = 68$

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}$

$b = 2^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}$

$c = 2^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}$

$\alpha_1+\beta_1 \geq 15$

$\beta_1+\gamma_1 \geq 17$

$\alpha_1+\gamma_1+2\beta_1 \geq 32$

$\alpha_1+\gamma_1 \geq 23$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$

$\alpha_1+\gamma_1 = 24$

$\beta_1 = 4$

$17-4 = 13$

$a+b \,\vdots\, m$

$a^2-7ab+b^2 \,\vdots\, m$

$\alpha_1 = 11$

$\gamma_1 = 13$

$\alpha_2+\beta_2 \geq 11$

$\alpha_2+\gamma_2 \geq 39$

~~$\beta_2+\gamma_2 \geq 18$~~

$2\alpha_2+\underbrace{\beta_2+\gamma_2}_{\geq 18} \geq 50$

$627-49 = 578$

$50-18 = 32$

$\Rightarrow \alpha_2 = 16$

$16+23 = 39$

$\gamma_2 = 23$

$\beta_2 = 0$

$39-16 = 23$

$338-289 = 49$

$6x^2-3x+2$

$289 = 17^2$

$49 = 7^2$

$289+49 = 338$

$26\cdot 26 = 156+52 = 676$

$676-49 = 627$

$289+338 = 627$

$289x^4+338x^2-627 \,|\, x^2-1$

$289x^4-289x^2 \quad\quad 289x^2+49$

$49x^2-627$

$49x^2-49$

-578

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [X] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2} \cdot k_1$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \cdot k_2$, $c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2} \cdot k_3$;

$\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2\} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ – степени 2 и 7;

$\{k_1, k_2, k_3\} \in \mathbb{N}$.

Имеем $ab = 2^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 7^{\alpha_2+\beta_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \vdots (2^{15} \cdot 7^{11})$

$\Leftrightarrow ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot m_1$, где $m_1 \geq 1$ и $m_1 \in \mathbb{N}$

Если $m_1 > 1 \Rightarrow abc = m_1 \cdot t_1$, где $t_1 \in \mathbb{N}$ и $t_1 \geq 1$

Значит, чтобы найти min (abc), берём $m_1 = 1$,

аналогично с остальными ac и bc:

$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$

$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\beta_1 = 15 & (1) \\ \alpha_2+\beta_2 = 11 & (2) \\ \alpha_1+\gamma_1 = 23 & (3) \\ \alpha_2+\gamma_2 = 39 & (4) \\ \beta_1+\gamma_1 = 17 & (5) \\ \beta_2+\gamma_2 = 18 & (6) \end{cases}$$

$\alpha_1+\beta_1 \geq 15$

$\alpha_1+\gamma_1 \geq 23$ (+)

$2\alpha_1 + (\beta_1+\gamma_1) \geq 38$

$2\alpha_1 \geq 21 \quad \alpha_1 \geq \frac{21}{2}$

(3)-(1): $\gamma_1 - \beta_1 = 8$ (+)

(5): $\gamma_1 + \beta_1 = 17$

$2\gamma_1 = 25$

$\gamma_1 = \frac{25}{2}$, понятно, что также γ_1 – не подходит, но позднее мы с этим разберёмся.

(5) $\beta_1 = 17 - \gamma_1 = \frac{34-25}{2} = \frac{9}{2}$

$\alpha_2+\beta_2 = 11$

$\alpha_2+\gamma_2 = 39$

(+) $\gamma_2 - \beta_2 = 28$

$\gamma_2+\beta_2 = 18$

$\gamma_2 = \frac{46}{2} = 23$

$\beta_2 = 18 - 23 = -5$

$\alpha_2 = 39 - \cancel{\gamma_2} = 16$ (23)

$\alpha_1+\beta_1 = 15$

$\gamma_1+\beta_1 = 17$

(+) $\gamma_1 - \alpha_1 = 2$

$\gamma_1 + \alpha_1 = 23$

$\gamma_1 = \frac{25}{2}$

$\beta_1 = \frac{9}{2}$

$\alpha_1 = 15 - \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$