



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2} \cdot k_1$$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \cdot k_2$$

$$c = 2^{\delta_1} \cdot 7^{\delta_2} \cdot k_3, \text{ покажем } 2 \text{ и } 7 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$$

$$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2} \cdot k_1 \cdot k_2 = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot t_1, t_1 \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 \geq 15$$

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 11, \text{ аналогично с остальными}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 \geq 15 \quad (1) \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 11 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$(1) + (3)$$

$$2\alpha_1 + (\beta_1 + \delta_1) \geq 38$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \delta_1 \geq 23 \quad (3) \\ \alpha_2 + \delta_2 \geq 39 \quad (4) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 + \delta_1 \geq 17 \quad (5) \\ \beta_2 + \delta_2 \geq 18 \quad (6) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2(\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1) \geq 55 \\ 2(\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2) \geq 68 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 \geq \frac{55}{2} > 27 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq 34 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}, \text{ остаток умножим умножим}$$

$$a, b, c. \text{ П.к. } ac \geq 7^{39} \Rightarrow abc \geq 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2^{11} \cdot 7^{16} \\ b = 2^4 \cdot 7^0 \\ c = 2^{13} \cdot 7^{23} \end{array} \right.$$

Знаком ответ:

$$\boxed{2^8 \cdot 7^{39}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a, b) = 1$$

$$m \geq 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\text{НОД}(a, b) = (a, b)$$

$$\text{НОД}(a+b, a^2-7ab+b^2) = m \rightarrow \max - ?$$

$$\forall b \in \mathbb{Z} \text{ НОД}(a, b) : \text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, a+kb), \text{ где } \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$a^2-7ab+b^2 = (a-b)^2 - 5ab = (a+b)^2 - 9ab$$

$$(a+b, (a+b)^2 - 9ab) = (a+b, (a+b)^2 - 9ab - (a+b)^2) =$$

m.k. \uparrow
 $-(a+b) \in \mathbb{Z}$

$$= (a+b, -9ab) = (a+b, 9ab), \quad m \geq 3 \begin{cases} \text{если } a=1 \\ b=2 \\ m=3 \end{cases}$$

$$\# \text{ Пусть } a \equiv a_1 \pmod{7}, \quad b \equiv b_1 \pmod{7}$$

$$a_1 \neq b_1$$

~~$$a+b \equiv m$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



23

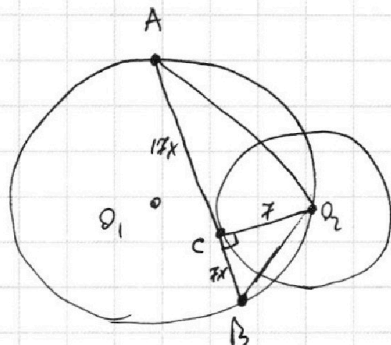
$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7} \quad R = 13 \quad v = 7$$

~~$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7} \Rightarrow AC = 17x, BC = 7x$~~

$$AC = 17x$$

$$AB = 7x$$

$\Omega(O_1, R)$
 $\Omega(O_2, r)$



$$S_{\Delta AO_2B} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x = \frac{1}{2} \cdot AO_2 \cdot O_2B \cdot \sin \angle AO_2B = \overset{\text{получаем}}{P} \cdot R$$

$\angle O_2CA = 90^\circ$ (м.к. O_2C - радиус в точку касания)

$\Rightarrow \Delta AO_2C$ и ΔO_2CB - прямоугольные

\Rightarrow по т. Пифаг: ~~$AO_2 = 17x$~~ $AO_2^2 = (17x)^2 + 7^2$
 $O_2B^2 = (7x)^2 + 7^2$

$$S_{\Delta AO_2B} = \frac{1}{2} \cdot O_2C \cdot AB = \frac{AO_2 \cdot O_2B \cdot AB}{4R}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 7 = \frac{AO_2 \cdot O_2B}{4R}$$

$$7 \cdot 2 \cdot 13 = AO_2 \cdot O_2B \quad |^2$$

$$(14 \cdot 13)^2 = ((17x)^2 + 7^2)((7x)^2 + 7^2)$$

$$7 \cdot 2 \cdot 13^2 = 7^4 + 49(289 + 49)x^2 + 289 \cdot 49x^4 \quad | : 7^2$$

$$26^2 = 7^2 + 338x^2 + 289x^4$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$x = 1 : 289 + 338 - 627 = 0 \quad \textcircled{V}$$

$\Rightarrow x = -1 \quad \textcircled{V}$ (м.к. четная функция)

~~(ср. след. эн.)~~
(сл. функцией)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0 \quad (*) \quad (\text{уражнение})$$

1) Схема Гурвица:

	289	0	338	0	-627
$x=1$		289	289	627	627
	289	4289	627	627	0

2)	289	289	627	627
$x=-1$		-289	0	-627
	289	0	627	0

$$\Rightarrow \text{~~289~~} \quad (*) = (x^2 - 1) \underbrace{(289x^2 + 627)}_{> 0} = 0$$

$\&$

$\Rightarrow x=1$ единственной положительной корень

$$\Rightarrow AB = 24x = 24$$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad \boxed{\sim 4}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & 3x^2 - 6x + 2 = a \\ & 3x^2 + 3x + 1 = b \\ \hline & 1 - 9x = a - b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \\ & \sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \\ & (\sqrt{a} - \sqrt{b})(1 - \sqrt{a} + \sqrt{b}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & (1) \quad \sqrt{a} = \sqrt{b} \\ & (2) \quad 1 = \sqrt{a} + \sqrt{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad |^2 \\ & 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \\ & 1 = 9x \\ & \boxed{x = \frac{1}{9}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Проверка:} \quad & \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} - \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = 1 - \frac{1}{9} \cdot 9 \\ & \underbrace{\sqrt{\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2}}_{\frac{4}{3}} - \underbrace{\sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1}}_{\frac{4}{3}} = 0 \quad (\checkmark) \end{aligned}$$

$$(2) \quad f = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad \text{верно при } 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} f &= 6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{(3x^2 + 3x + 1)(3x^2 - 6x + 2)} \\ 0 &= \underbrace{(6x^2 - 3x + 2)}_{f''(x)} + 2 \underbrace{\sqrt{(3x^2 + 3x + 1)(3x^2 - 6x + 2)}}_{g(x)} \end{aligned}$$

$$f(x) = 6x^2 - 3x + 2, \quad D = 9 - 4 \cdot 6 \cdot 2 < 0 \Rightarrow f(x) > 0, \text{ при } \forall x$$

$$g(x) > 0, \text{ т.к. под корнем}$$

$$\Rightarrow (2) \quad \emptyset$$

$$\text{Ответ: } \boxed{\frac{1}{9}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

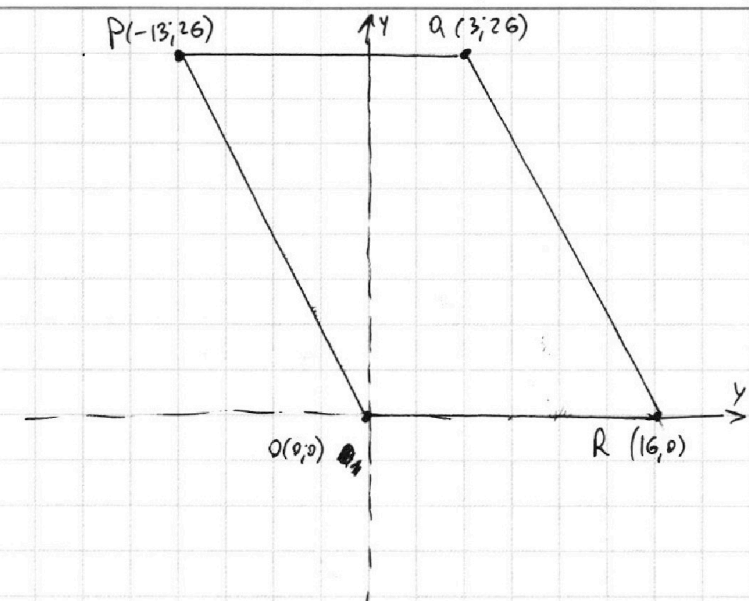
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$A(x_1; y_1) \quad B(x_2; y_2)$$

$$\{x_1, y_1, x_2, y_2\} \in \mathbb{Z}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$\text{Ищем } B = P$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (-13) - 2 \cdot (x_1) + 26 - y_1 = 14$$

$$2x_1 + y_1 = -14$$

$$y_1 = -2x_1 - 14 = f(x_1)$$

$y = f(x_1)$ — прямая параллельная PO проходящая через $M(0, -14) \Rightarrow \notin \text{парал.-луч.}$

\Leftrightarrow решение \Rightarrow A — целые координаты $\Rightarrow a_1 x_1 + b_1 y_1 = c_1, \quad a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

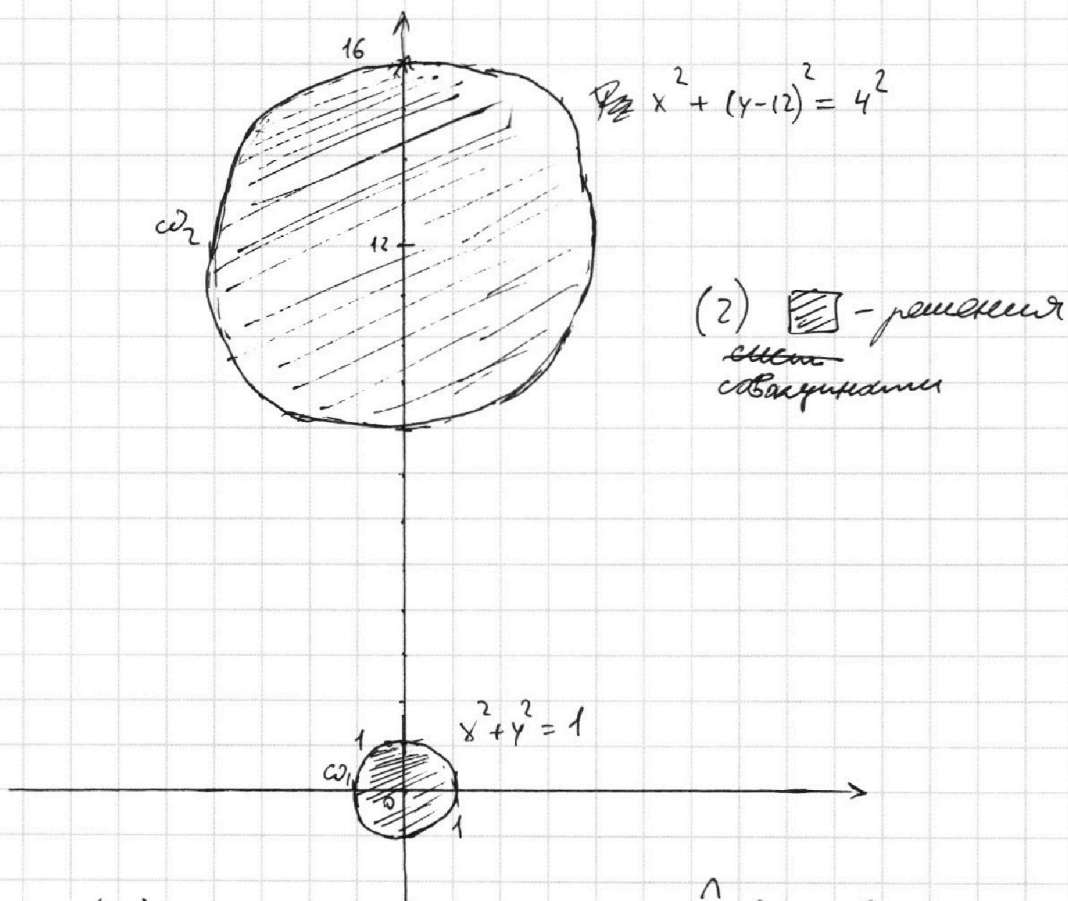
26

$$\begin{cases} ax+ay-8b=0 & (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1 \leq 0 & \text{---} \text{---} \text{---} (0,0) \text{ и } r=1 \\ x^2+(y-12)^2-16 \geq 0 & \text{---} \text{---} \text{---} (2,1) \\ x^2+y^2-1 \geq 0 & (2,2) \\ x^2+(y-12)^2-16 \leq 0 & \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{cases}$$

и
--- от левого касания ---

--- окружностями ω_1 с центром $(0,0)$ и $r_1=1$
 ω_2 с ц. $(0,12)$ и $r_2=4$



Сначала (2.1) - ИИ-во точек внутри ω_1 и вне ω_2
Сл. (2.2) - ИИ-во м. Внутри ω_2 и вне ω_1

~~(2.1) Все множество внутри ω_2 и вне ω_1~~

~~(2.2) Все множество~~ (2.1) - ИИ-во м. Внутри ω_1
(2.2) - ИИ-во м. Внутри ω_2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



к6 (прозрачные ш.)

~~$ax + y - 8b = 0$~~

~~$y = -ax + 8b = f(x)$ — прямая с коэф. наклона $-a$~~

~~и $y \cap OY = 8b$.~~

~~1) $f(x)$ пересекает ω_1 и не пересекает ω_2~~

~~2) $f(x)$ касается и.т~~

~~3) $f(x)$ касается внешне ω_1 и ω_2~~

~~4) $f(x)$ касается внутренне ω_1 и ω_2~~

$ax + y - 8b = 0$

$y = -ax + 8b = f(x)$ — прямая коэф. наклона $-a$

и $y \cap OY = 8b$.

Если прямая пересекает 2 раза какой-то

окружность \Rightarrow решений > 2

\Rightarrow прямая должна быть касательной к двум

окружностям. т.к. окр. ω_1 и $\omega_2 \Rightarrow \exists$ внешняя и внутренняя касат. общ. касат.

$\Rightarrow y = -ax + 8b$

$x^2 + y^2 = 1$ при y имеет 1 решение

$x^2 + (-ax + 8b)^2 = 1$ (т.к. картинка слишком темная отсканирована \Rightarrow если $a=0$ решение, то $a=0$ решение)

$x^2 + a^2x^2 - 16abx + 64b^2 = 1$

$(1+a^2)x^2 - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$

$D = 256a^2b^2 - 4(1+a^2)(64b^2 - 1) = 0$ (т.к. 1 корень)

$256a^2b^2 - (4+4a^2)(64b^2 - 1) = 0$

~~179~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~168~~ 168 (уточнение 2)

$$256 a^2 b^2 - (256 b^2 + 256 a^2 b^2 - 4 - 4a^2) = 0$$

$$\rightarrow 4a^2 + 4 = 256 b^2 \quad | :4$$

$$a^2 + 1 = 64 b^2$$

$$\begin{array}{r} \cdot \frac{16}{3} \\ 144 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cdot \frac{16}{3} \\ \frac{16}{36} \end{array}$$

С другой стороны

$$x^2 + (y-12)^2 = 16 \quad \text{при } y = -ax + 8b - 12 \text{ - реш.}$$

$$x^2 + (-ax + 8b - 12)^2 = 16$$

$$x^2 + (8b - ax - 12)^2 = 16$$

$$x^2 + 64b^2 + a^2 x^2 + 144 - 16abx - 192b + 24ax = 16$$

$$(1+a^2)x^2 + (24a - 16ab)x + (64b^2 - 192b + 128) = 0$$

$$D = (8a(3-2b))^2 - 4(1+a^2)(64b^2 - 192b + 128) = 0$$

$$64a^2(9 - 6b + 4b^2) - 4(64b^2 - 192b + 128 + 128a^2 - 192a^2b + 64a^2b^2) = 0$$

$$\underline{64a^2b^2 + 144 - 366a^2 - 64b^2 - 192b + 128 + 128a^2 - 192a^2b + 64a^2b^2} = 0$$

(не увид. далее получаем систему из двух уравнений на (a, b) , решаем, получаем 2 значения a , которые ~~еще~~ дают еще два решения при геометрич. на -1 , т.е. симметричные отн-во OY)

Ответ: $\pm a_1, \pm a_2$

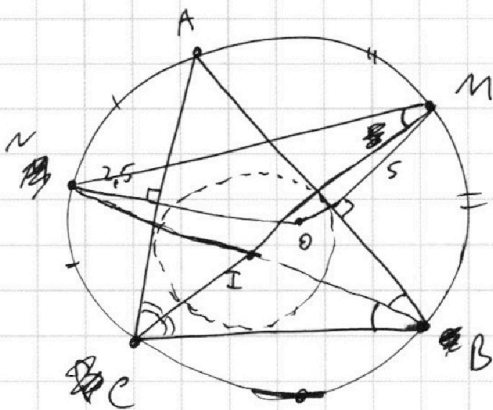
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

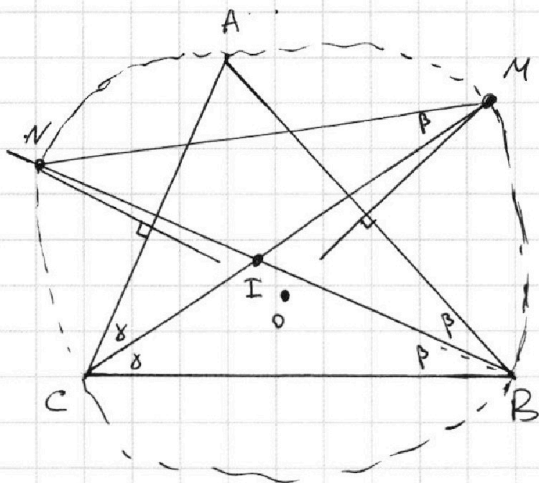
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AI - ?$
 $I - \text{центр.}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

121

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2} \cdot k_1$$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \cdot k_2$$

$$c = 2^{\delta_1} \cdot 7^{\delta_2} \cdot k_3, \quad \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2\} - \text{степени входящих}$$

звёздочка в шара $\in \mathbb{N} \Rightarrow \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{k_1, k_2, k_3\} - \text{некоторые}$
 другие $\mathbb{N} \Rightarrow \{k_1, k_2, k_3\} \in \mathbb{N}$.

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11} \Rightarrow 2^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot k_1 \cdot k_2 : (2^{15} \cdot 7^{11})$$

Аналогично с оставшимися \Rightarrow система:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 15 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 11 \\ \alpha_1 + \delta_1 = 23 \\ \alpha_2 + \delta_2 = 39 \\ \beta_1 + \delta_1 = 17 \\ \beta_2 + \delta_2 = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{21}{2} \\ \beta_1 = \frac{3}{2} \\ \delta_1 = \frac{25}{2} \\ \alpha_2 = 16 \\ \beta_2 = -5 \\ \delta_2 = 23 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{21}{2} \\ \alpha_2 = 16 \\ \beta_1 = \frac{3}{2} \\ \beta_2 = -5 \\ \delta_1 = \frac{25}{2} \\ \delta_2 = 23 \end{cases}$$

Также решения системы обусловлены тем, что я считаю, что $k_1, k_2, k_3 \neq 2$ и $\neq 7$, ~~иногда~~ ~~значим~~ $k_1, k_2, k_3 : 2$ и $: 7$, так, где решение < 0 или $\notin \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow k_1 : (\text{когда бы } 2) \Rightarrow k_1 \geq 2$$

$$k_2 : (\text{когда бы } 2 \text{ и когда бы } 7) \Rightarrow k_2 \geq 2 \cdot 7^5$$

$$k_3 : (\text{когда бы } 2) \Rightarrow k_3 \geq 2$$

~~$\Rightarrow a \cdot b \cdot c = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$~~

~~$2^{21} \cdot 7^{23} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot 7^{\frac{25}{2}} \cdot 2^{\frac{21}{2}} \cdot 7^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{25}{2}} \cdot 7^{23}$~~

$$y - f(x) = (x - x_0)$$

\Rightarrow Новая система

a, b

$$a \cdot b = k a + r$$

$$r = b - k a$$

$$(a, b) = (a, r) = a, b - k a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

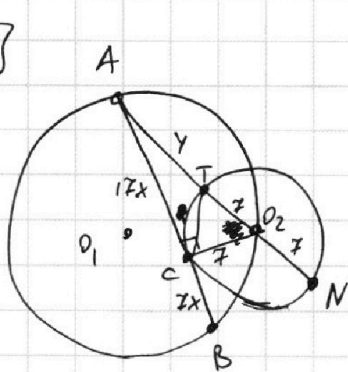
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3



$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$$

$R = 13$
 $r = 7$

AB - ?

* Пусть $AC = 17x \Rightarrow BC = 7x$

$$AO_2 \cap \omega = T, AT = Y$$

O_2C - радиус к т. касания $\Rightarrow \angle O_2CA = 90^\circ$

(1) По т. о касан. и сек. для ω и т. A:

(пусть $AT \cap \omega$ внутренне в т. N)

~~AT \cdot AN = AC^2~~

$$AT \cdot AN = AC^2$$

$$\Rightarrow Y \cdot (14 + Y) = 17x^2$$

$$S_{\Delta AO_2B} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x = \frac{AO_2 \cdot O_2B \cdot AB}{4R}, \text{ м.к. } AB = 24x \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{AO_2 \cdot O_2B}{4R}, \quad AO_2 = \sqrt{49 + (17x)^2}, \text{ (м. Пиф. в } \Delta AO_2C)$$

$$O_2B = \sqrt{49 + (7x)^2}, \text{ (м. Пиф. в } \Delta O_2CB)$$

$$\Rightarrow \frac{7}{2} \cdot 4 \cdot 13 = \sqrt{49 + (17x)^2} \cdot \sqrt{49 + (7x)^2}$$

$$14 \cdot 13 = \sqrt{(49 + 289x^2)(49 + 49x^2)} \quad |^2$$

$$(182)^2 = (49)^2 + (49 \cdot 289 + 49 \cdot 49)x^2 + 289 \cdot 49x^4$$

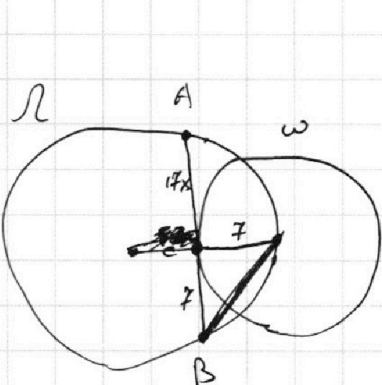
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

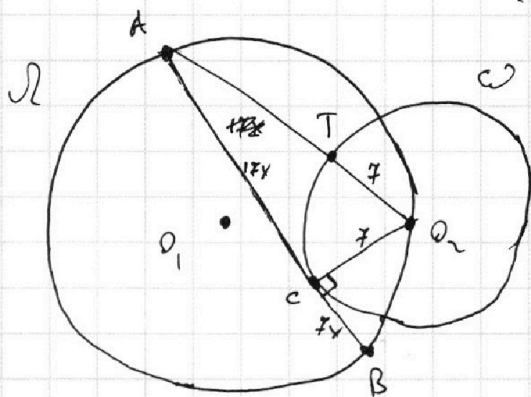


$$\frac{AC}{CB} = \frac{17x}{7}$$

AB - ?

$$r = 7$$

$$R = 13$$



~~AT = ?~~

$$(17x)^2 = AT \cdot (AT + 7)$$

$$(17x)^2 + 7^2 = (AT + 7)^2$$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$(abc)_{\min} - ?$

~~НОД(ab, bc) =~~

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$$

$$b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$$

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}$$

~~a.b~~ $ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 15 \\ \beta_1 + \beta_2 = 11 \end{cases}$$

$$ab = 0$$



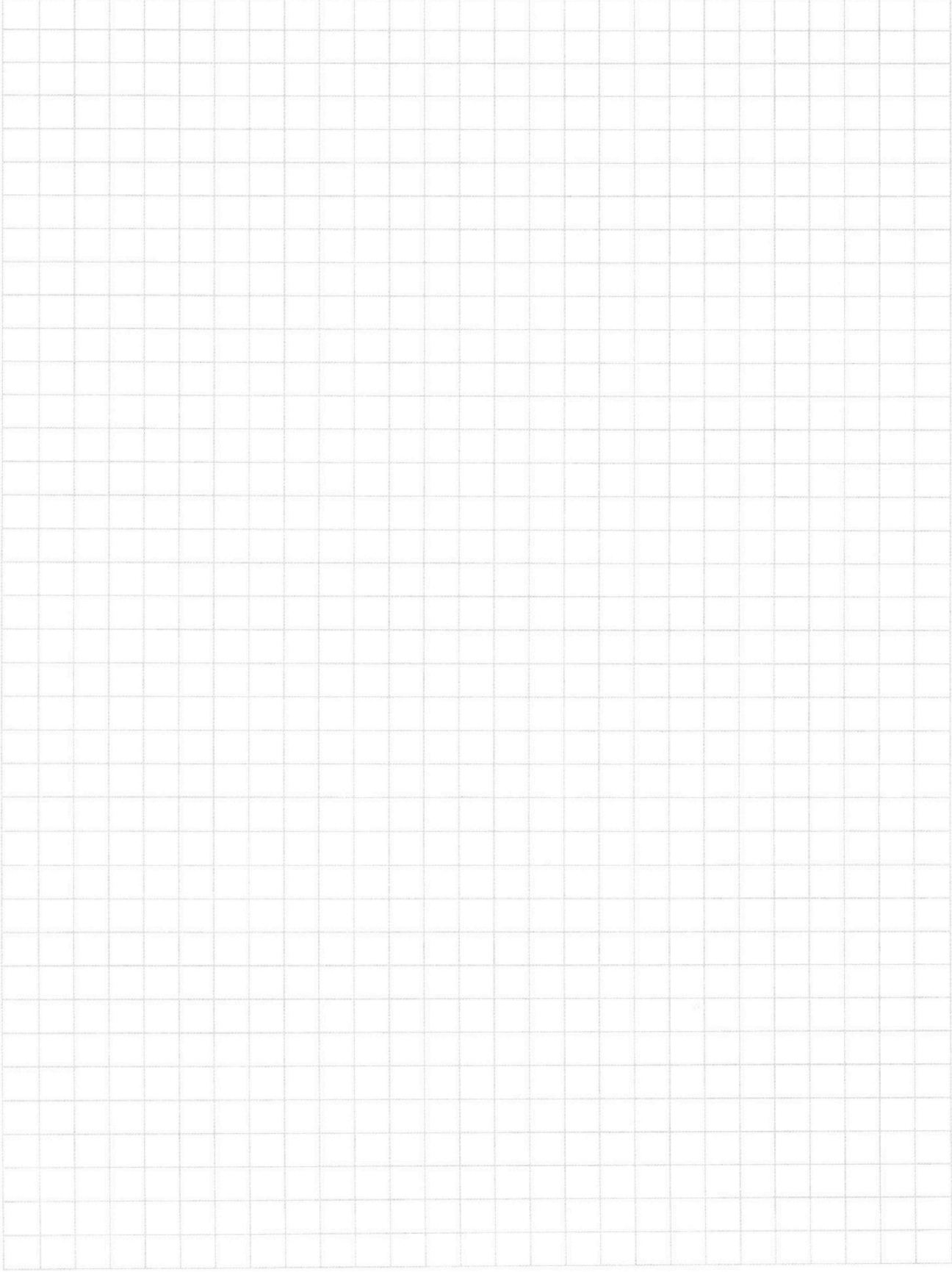
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

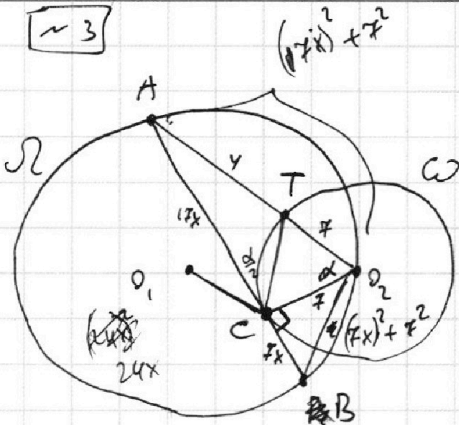
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~ 3



~~Решение~~
 $\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$, O_1 - центр Ω
 O_2 - центр ω

r - радиус ω
 R - радиус Ω

AB - ?

$(a, b) = 1$

Решение. $a+b$

Пусть $AC = 17x \Rightarrow BC = 7x$.

Пусть $AO_2 \cap \omega = T$. Пусть $AT = y$.

(1) По т. касательной и секущей для ω в т. A:

$AO_2 \cdot AT = AC^2$, т.к. AC - касат.

$(7+y)y = (17x)^2$ (1)

(2) Проведем радиус ω O_2C , $\angle O_2CA$ - тупой.

\Rightarrow По т. Пиф. в $\triangle ACO_2$: ~~$(17x)^2 + r^2 = (7+y)^2$~~ $AC^2 + CO_2^2 = AO_2^2$

(2) $(17x)^2 + r^2 = (7+y)^2$

(1) в (2): $(7+y)y + r^2 = (7+y)^2$

$14y + y^2 + 49 = 49 + 14y + y^2$

$0 = 4y$

$(49 + 289x^2)(49 + 49x^2)$

$49 +$

~~$\sin \alpha = \frac{r}{7+y}$~~
 $\cos \alpha = \frac{r}{7+y}$

$\sin \alpha = \frac{17x}{7+y}$

$\Rightarrow \frac{49 + \cancel{17x^2}(17x)^2}{(7+y)^2} = 1$

$49 + (17x)^2 = (7+y)^2$

$\frac{a^2}{4R}$

$49 +$

$\frac{14}{13}$
 $\frac{14}{42}$
 $\frac{14}{182}$

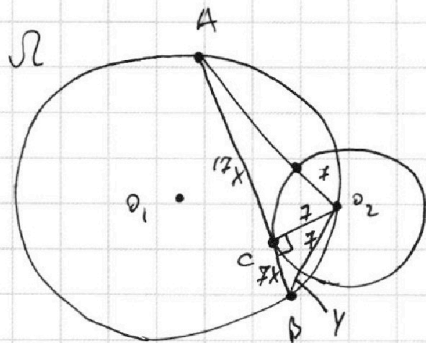
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$$

$$AB = ? \quad r = 7 \\ R = 13$$

$$(7x)^2 + 49 = (7+y)^2$$

$$(7x)^2 = (7+y) \cdot y =$$

$$y(7+y) + 49 = (7+y)^2$$

$$y^2 + 7y + 49 = y^2 + 14y + 49$$

$$y = 0$$

~~$$(7x)^2 = 17x$$~~

$$(17x)^2 +$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$D = 36 - 24 = 12 = 4 \cdot 3$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{3}} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad | \cdot 2$$

~~$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$~~

~~$$D = 36 - 4 \cdot 6 = 12$$~~

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = a$$

$$3x^2 + 3x + 1 = b$$

$$1 - 9x = a - b$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

~~$$\sqrt{b} - \sqrt{b} = a - \sqrt{a}$$~~

~~$$\sqrt{b}(\sqrt{b} +)$$~~

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2$$

$$3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{4} + \frac{6}{4} + 2 =$$

$$= \frac{9}{4} + \frac{8}{4} = \frac{17}{4}$$

$$1 = a + b + 2\sqrt{ab}$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq$$

$$\geq 3 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) + 1$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 3 < 0$$

$$x_0 = -\frac{3}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$$

$$y_0 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + 1 = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~2222:~~

$$2(\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1) \geq 15 + 23 + 17 = 55 \quad \frac{11 + 39 + 18 = 68}{50}$$

$$a = 2 \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{matrix}$$

~~$\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1$~~

$$\alpha_1 + \beta_1 \geq 15$$

$$\beta_1 + \delta_1 \geq 17$$

$$\alpha_1 + \delta_1 + 2\beta_1 \geq 32$$

$$\alpha_1 + \delta_1 \geq 23$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} \geq$$

~~$\Rightarrow 2\beta_1$~~ $\alpha_1 + \delta_1 = 24$
 $\beta_1 = 4$

$$\frac{17}{13}$$

~~$a+b: m$~~
 $a^2 - 7ab + b^2: m$

$$\alpha_1 = 11$$

$$\delta_1 = 13$$

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 11$$

~~$\alpha_2 + \delta_2$~~ $\alpha_2 + \delta_2 \geq 39$

~~$\beta_2 + \delta_2 \geq 18$~~ $2\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq 50$
 ≥ 18

$$\frac{627}{49}$$

$$\frac{578}{578}$$

~~$\alpha_2 + \delta_2 + 2\beta_2 \geq$~~ $\Rightarrow 2\alpha_2 \cdot \alpha_2 = 16$

$$\frac{50}{32}$$

$$\frac{627}{49}$$

~~β_2~~

$$\delta_2 = 23$$

$$\frac{+16}{39}$$

$$\beta_2 = 0$$

$$\frac{39}{23}$$

$$\frac{338}{449}$$

~~$3x^2 + 3x + 15$~~

$$6x^2 - 3x + 2$$

$$\begin{array}{r} 289 = 17^2 \\ + 49 = 7^2 \\ \hline 338 \end{array}$$

~~49~~

$$\begin{array}{r} 26 \\ 26 \\ \hline 52 \\ - 676 \\ \hline 49 \\ \hline 627 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ + 338 \\ \hline 627 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289x^4 + 338x^2 - 627 \mid x-1 \\ \hline 289x^4 - 289x^2 \\ \hline -49x^2 - 627 \\ -49x^2 - 49 \\ \hline -578 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть $a = 2^{d_1} \cdot 7^{d_2} \cdot k_1$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \cdot k_2$, $c = 2^{\delta_1} \cdot 7^{\delta_2} \cdot k_3$;

$\{d_1, d_2, \beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2\} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ - степени 2 и 7;

$\{k_1, k_2, k_3\} \in \mathbb{N}$.

Имеем $ab = 2^{d_1 + \beta_1} \cdot 7^{d_2 + \beta_2} \cdot k_1 \cdot k_2 = (2^{15} \cdot 7^{11})$

$\Leftrightarrow ab = 2^{15} \cdot 7^m \cdot m_1$, где $m_1 \geq 1$ и $m_1 \in \mathbb{N}$

Если $m_1 > 1 \Rightarrow abc = m_1 \cdot t_1$, где $t_1 \in \mathbb{N}$ и $t_1 \geq 1$

Значит, чтобы найти $\min(ab)$, берём $m_1 = 1$,

аналогично с множителями ac и bc :

$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$

$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$

$d_1 + \beta_1 \geq 15$
 $d_1 + \delta_1 \geq 23$ (+)

$2d_1 + (\beta_1 + \delta_1) \geq 38$
 $2d_1 \geq 21 \quad d_1 \geq \frac{21}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} d_1 + \beta_1 = 15 & (1) \\ d_2 + \beta_2 = 11 & (2) \\ d_1 + \delta_1 = 23 & (3) \\ d_2 + \delta_2 = 39 & (4) \\ \beta_1 + \delta_1 = 17 & (5) \\ \beta_2 + \delta_2 = 18 & (6) \end{cases}$

(3)-(1) : $\delta_1 - \beta_1 = 8$ (+)
(5) : $\delta_1 + \beta_1 = 17$

$2\delta_1 = 25$

$\delta_1 = \frac{25}{2}$, покажем, что

такое δ_1 не возможно, но
возвратимся к этим разберёмся.

(5) $\beta_1 = 17 - \delta_1 = \frac{34 - 25}{2} = \frac{9}{2}$

~~$d_2 + \beta_2 = 11$~~
 $d_2 + \beta_2 = 11$
 $d_2 + \delta_2 = 39$

(+) $\delta_2 - \beta_2 = 28$
 $\delta_2 + \beta_2 = 18$

$\delta_2 = \frac{46}{2} = 23$

$\beta_2 = 18 - 23 = -5$

$d_2 = 39 - \delta_2 = 16$

~~$d_1 + \beta_1 = 15$~~
 $d_1 + \beta_1 = 15$
 ~~$\delta_1 + \beta_1 = 17$~~
 $\delta_1 + \beta_1 = 17$

(+) $\delta_1 - \beta_1 = 2$
 $\delta_1 + \beta_1 = 17$
 $\delta_1 = \frac{19}{2}$

$\beta_1 = \frac{9}{2}$

$d_1 = 15 - \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$