



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



~~1. [4 балла]~~ Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

~~2. [4 балла]~~ Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

2 ✓ 3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

~~4. [5 баллов]~~ Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$abc : ac \Rightarrow abc : 7^{39} \Rightarrow$ минимальная степень ~~7~~ 7 которая содержится в abc 39

$$abc^2 : (ab \cdot bc \cdot ca) \Rightarrow (abc)^2 : 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+18+39} = 2^{55} \Rightarrow$$

$$abc : 2^{28}$$

$$abc : 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

При

$$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$$

$$b = 2^5 \cdot 7^{18}$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{39}$$

$$abc = 2^{10+5+13} \cdot 7^{11+18} = 2^{28} \cdot 7^{39} \quad abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow$$

минимальное значение $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Ответ: минимальное значение abc
 $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

Пусть исходную дробь можно сократить на m , тогда:

$$a+b : m \quad (1)$$

$$a^2-7ab+b^2 : m$$

$$(a^2+2ab+b^2) - 9ab : m$$

$$(a+b)^2 - 9ab : m$$

$$\text{Из условия (1)} \quad (a+b)^2 : m \Rightarrow 9ab : m$$

$$a+b : m \Rightarrow 9a^2+9ab : m$$

$$9a^2+9ab : m \text{ и } 9ab : m \Rightarrow 9a^2 : m$$

Аналогично:

$$9b^2+9ab : m \quad 9b^2 : m$$

$$9a^2 : m$$

$$9b^2 : m$$

Пусть $m = p \cdot q$, где $p \in \mathbb{N}$ и p - простое или 1

$a+b : m \Rightarrow a+b : p$, где $a \not\equiv b \pmod{p}$

$9b^2 : m \Rightarrow 9b^2 : p$ по усл. выбора $p \not\equiv 3 \pmod{4}$

$\Rightarrow b^2 : p \Rightarrow b : p$ (т.к. p - простое или $p=1$)

$a : p$ и $b : p$ но дробь $\frac{a}{b}$ несократима \Rightarrow

$p=1$

Это верно для любого простого входящего в разложение $m \Rightarrow \text{НОД}(a, m) = 1$

$= \text{НОД}(b, m) = 1$, а значит $9 : m \Rightarrow m \leq 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для $a=4$ $b=5$

$$\frac{4+5}{4^2 - 7 \cdot 4 \cdot 5 + 5^2} = \frac{9}{25+16-140} = \frac{9}{-99} - \text{дробь сокращается}$$

на 9

III. к $m \leq 9$ $m=9$ - максимальное

Ответ: наибольшее значение $m=9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$t = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \quad d = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

Тогда:

$$1 - 9x = t^2 - d^2 = 3x^2 - 6x + 2 - (3x^2 + 3x + 1) = 1 - 9x$$

$$t - d = t^2 - d^2$$

$$(t - d)(t + d) - (t - d) = 0$$

$$(t - d)(t + d - 1) = 0$$

$$\begin{cases} t - d = 0 \\ t + d - 1 = 0 \end{cases}$$

$$t - d = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$(3x^2 - 6x + 2) = (3x^2 + 3x + 1)$$

$$9x = 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$t + d - 1 = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 12^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 144 + 1104 = 1248$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \\ x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \\ x = \frac{1}{9} \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{1}{9}, x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}, x_3 = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

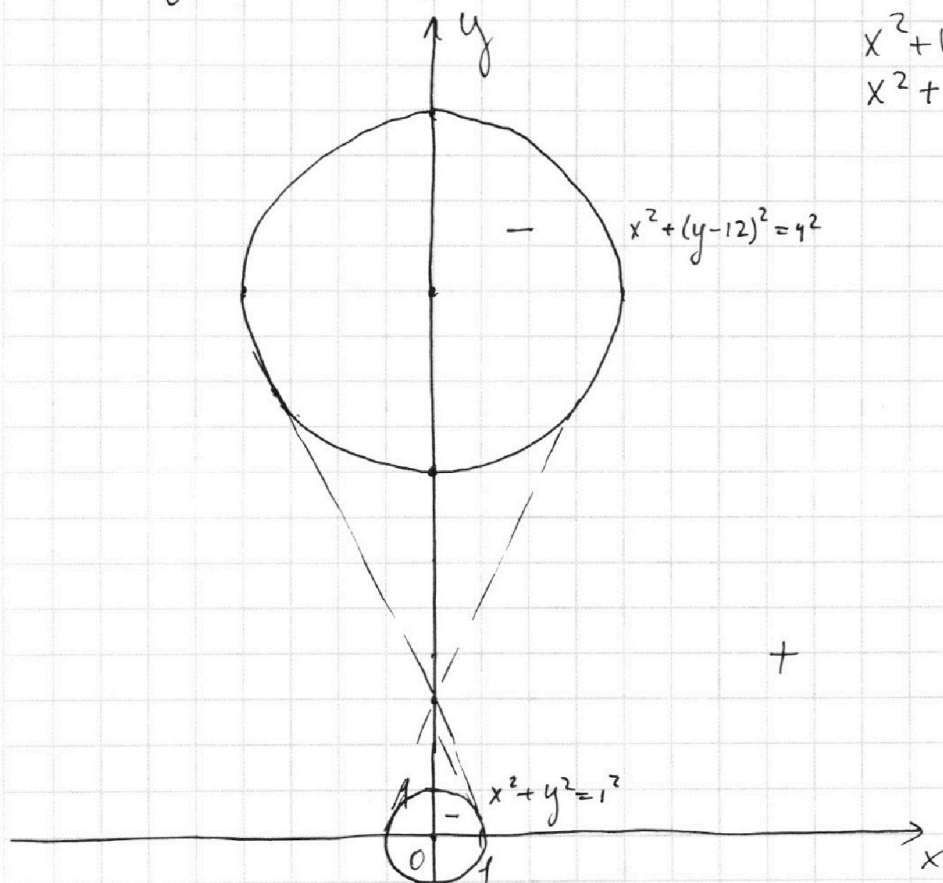
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №8

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 1^2 \\ x^2+(y-12)^2 &= 4^2 \end{aligned}$$



Что-бы второе выражение принимало значения ~~меньше~~ ≤ 0 точка с координатами $(x; y)$ должна находится внутри или ~~на~~ ~~среде~~ ~~одной~~ из окружностей или на ней (т.к. вне окружности ~~выражение~~ которое задает её больше 0.)

$ax+y-8b=0$ - задает прямую
Если прямая пересекает окружность в двух точках, то внутри будет отрезок каждая точка которого будет являться решением \Rightarrow решений будет бесконечно много

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

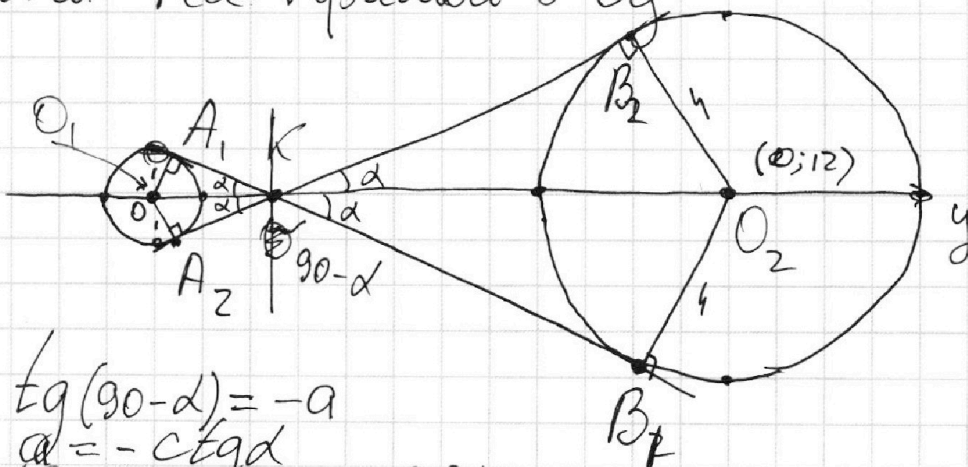


Значит прямая может иметь с окружностью ~~только~~ только одну общую точку (или 0). А так как необходимо чтобы система имела два решения, прямая должна иметь по одной общей точке с ~~каждой~~ каждой из окружностей. Если прямая с окружностью имеют общую точку, то прямая касается окружности.

Значит прямые удовлетворяющие ~~условию~~ условию это ~~касательные~~ касательные к окружностям.

$$y = 8b - ax$$

/// к окружности симметричны относительно прямой Oy , касательные пересекаются на прямой $O'Oy$



$$\operatorname{tg}(90-d) = -a$$

$$a = -\operatorname{ctgd}$$

(Для прямой A_1B_1)

Для прямой A_2B_2)

$$a = \operatorname{ctgd}$$

$$\frac{O_1K}{O_2K} = \frac{O_1A_1}{O_2B_1} \quad (\text{следствие из подобия } \triangle O_1A_1K \text{ и } \triangle O_2B_1K)$$

$$\frac{O_1K}{O_2K} = \frac{1}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \frac{O_1 K}{O_2 K} = \frac{1}{4} \\ O_1 K + O_2 K = O_1 O_2 = 12 \end{cases}$$

$$\frac{O_1 K}{O_2 K} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{O_1 O_2}{O_2 K} = \frac{5}{4} \quad \frac{12}{O_2 K} = \frac{5}{4}$$

$$O_2 K = 9,6$$

$$O_1 K = 12 - 9,6 = 2,4$$

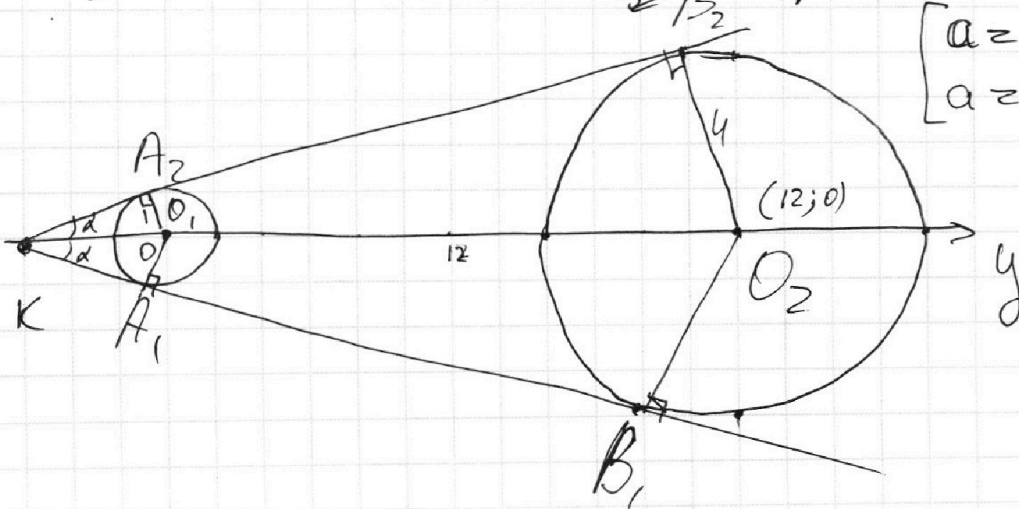
$$A_1 K = \sqrt{O_1 K^2 - O_1 A_1^2}$$

$$A_1 K = \sqrt{2,4^2 - 2^2} = \sqrt{0,4 \cdot 8,4} = \sqrt{3,36} = \sqrt{4 \cdot 0,01 \cdot 4 \cdot 21} = \frac{2}{5} \sqrt{21}$$

$$\operatorname{ctg} d = \frac{A_1 K}{O_1 A_1}$$

$$\operatorname{ctg} d = \frac{\frac{2}{5} \sqrt{21}}{1} = \frac{2}{5} \sqrt{21}$$

$$\begin{cases} a = \frac{2}{5} \sqrt{21} \\ a = -\frac{2}{5} \sqrt{21} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{KO_1}{KO_2} = \frac{O_1A_1}{O_2B_1} = \frac{1}{4}$$

$$1 - \frac{KO_1}{KO_2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{KO_2 - KO_1}{KO_2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{O_1O_2}{KO_2} = \frac{3}{4}$$

$$KO_2 = \frac{4 \cdot 12}{3} = 16$$

$$KO_2 = 16$$

$$KO_1 = 4$$

$$A_1K = \sqrt{KO_1^2 - O_1A_1^2}$$

$$A_1K = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{A_1K}{O_1A_1}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{1} = \sqrt{15}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{15} \\ a = -\sqrt{15} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } a = -\frac{2}{5}\sqrt{21}$$

$$a = \sqrt{15}$$

$$a = \frac{2}{5}\sqrt{21}$$

$$a = -\sqrt{15}$$

Аналогично т.к. картинка симметрична отн. Oy: $\begin{cases} a = \operatorname{ctg} \alpha \\ a = -\operatorname{ctg} \alpha \end{cases}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

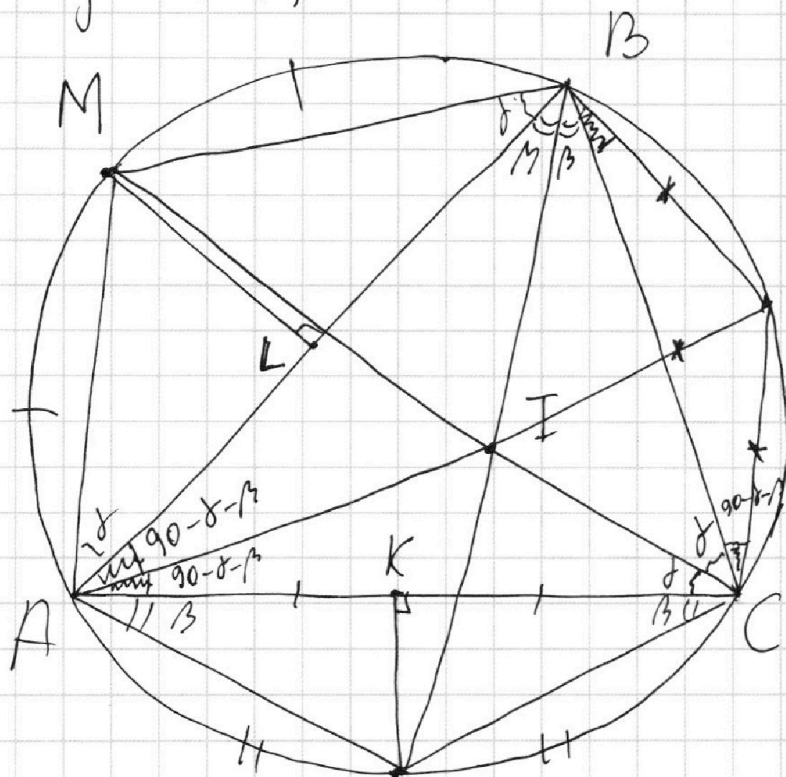
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №7



Дано: $KN = 2,5$
 $ML = 5$

P

P-точка пересечения AI и окруж

I - точка пересечения биссектрис (центр вписанной)
 M, N - является серединой дуги AB - она лежит на прямой содержащей биссектрису из C
 Аналогично $N \in BI$

$$\angle ABT = \angle IBC = \beta$$

$$\angle ACI = \angle ICB = \gamma$$

$$ANCB - \text{вписан. четырёхугол} \Rightarrow \angle ACN = \angle CAN = \beta$$

$$AMBC - \text{вписан. четырёхугол} \Rightarrow \angle MBA = \angle MAB = \gamma$$

$$AB = 2 \cdot 5 \cdot \operatorname{ctg} \gamma = 10 \operatorname{ctg} \gamma$$

$$AC = 2 \cdot 2,5 \cdot \operatorname{ctg} \beta = 5 \operatorname{ctg} \beta$$

$$BC = 10 \operatorname{ctg} \gamma \cdot \cos 2\beta + 5 \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos 2\gamma$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

По лемме о Трезубце

$$PI = PB = PC$$

$$\angle PBC = \angle PCB = 90^\circ - \beta - \gamma$$

$$PC = PB = \frac{BC}{2 \cdot \cos(90^\circ - \beta - \gamma)} = \frac{BC}{2 \sin(\beta + \gamma)} = PI$$

По теореме синусов

$$\frac{BC}{\sin(\angle ACP)} = \frac{AP}{\sin(90^\circ - \gamma - \beta)}$$

$$AP = \frac{PC \cdot \sin(90^\circ + \gamma - \beta)}{\sin(90^\circ - \gamma - \beta)}$$

$$AI = AP - PI$$

$$PI = \frac{10 \operatorname{ctg} \gamma \cdot \cos 2\beta + 5 \operatorname{ctg} \beta \cos 2\gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)} = PC$$

$$PI = \frac{10 \operatorname{ctg} \gamma \cos 2\beta + 5 \operatorname{ctg} \beta \cos 2\gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)} \cdot \left(\frac{\sin(90^\circ + \gamma - \beta)}{\sin(90^\circ - \gamma - \beta)} - 1 \right) =$$

$$= \frac{(10 \operatorname{ctg} \gamma \cos 2\beta + 5 \operatorname{ctg} \beta \cos 2\gamma) (\cos(\beta - \gamma) - \cos(\gamma + \beta))}{2 \sin(\beta + \gamma) \cos(\gamma - \beta)} =$$

$$= \frac{(10 \operatorname{ctg} \gamma (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) + 5 \operatorname{ctg} \beta (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma)) \cdot (\cos(\beta - \gamma) - \cos(\gamma + \beta))}{\sin(2\beta - 2\gamma)}$$



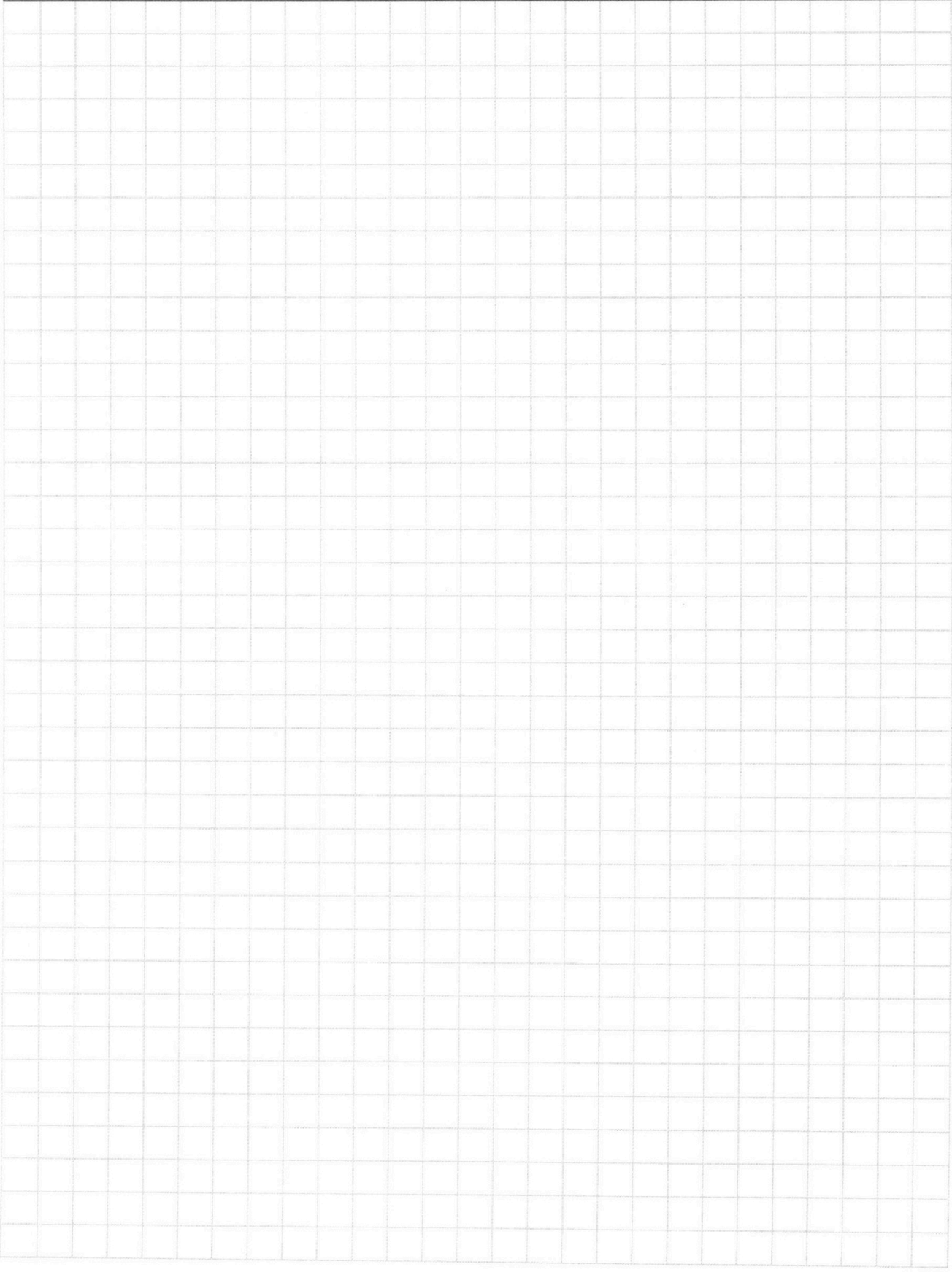
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



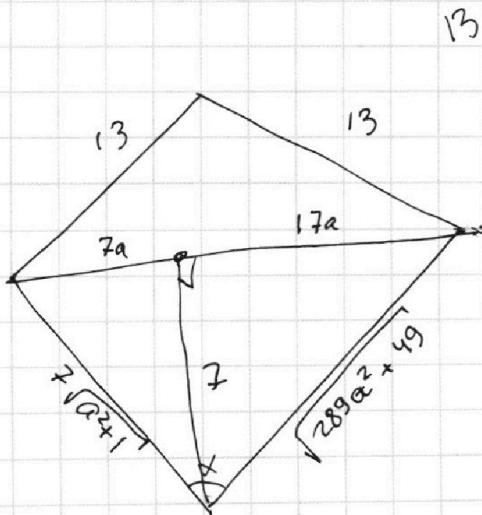
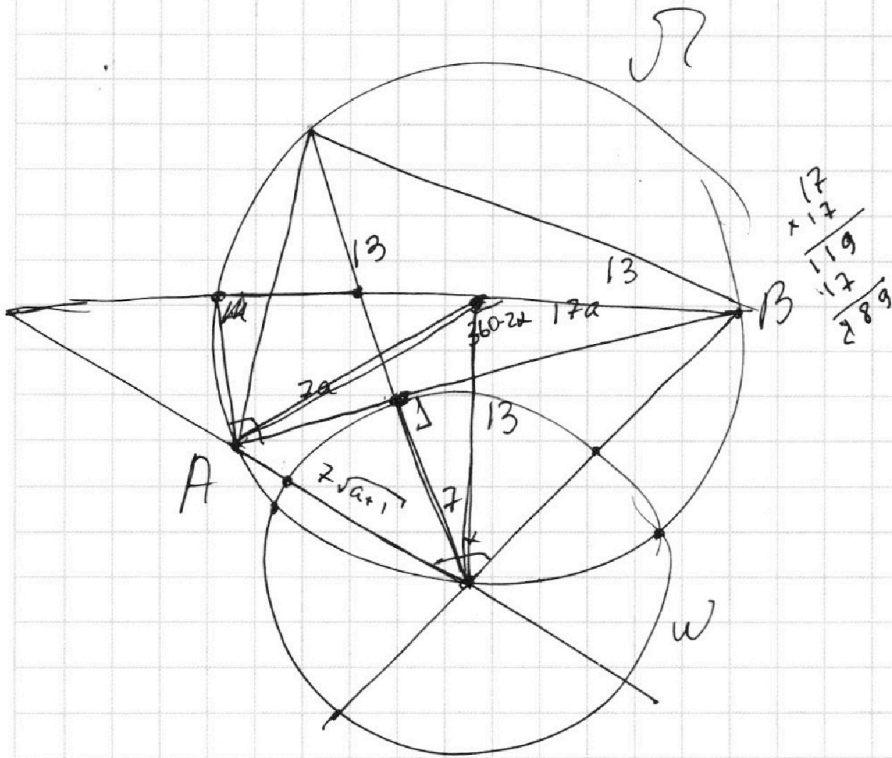
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

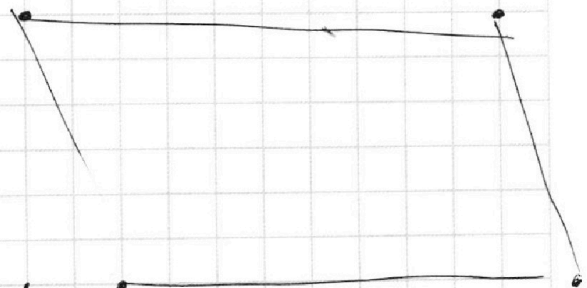


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$13^2 + 13^2 - 2 \cos \alpha \cdot 13^2$$

=



$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$t = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \quad d = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$t - d = t^2 - d^2$$

$$-\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1$$

$$(t-d)(t+d) = (t-d) \sqrt{36 + \sqrt{312}}$$

$$(t-d)(t+d-1) = 0$$

$$\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{1}{27} + \frac{4}{3} = \frac{37}{27}$$

$$\frac{2}{23} \pm \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 13 + 6}$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$144 + 4 \cdot 4 \cdot 69$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 1 + 3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$9x - 2 = -2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$\frac{81}{4}x^2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

2

$$3 + \frac{4}{3} - \frac{3}{\sqrt{3}} - 6 + \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 16 \\ \hline 414 \\ 69 \\ \hline 1104 \end{array}$$

$$\frac{312}{4} \quad \frac{6+9}{69} = \frac{5}{23}$$

$$78 = 3 \cdot 26$$

$$4\sqrt{78}$$



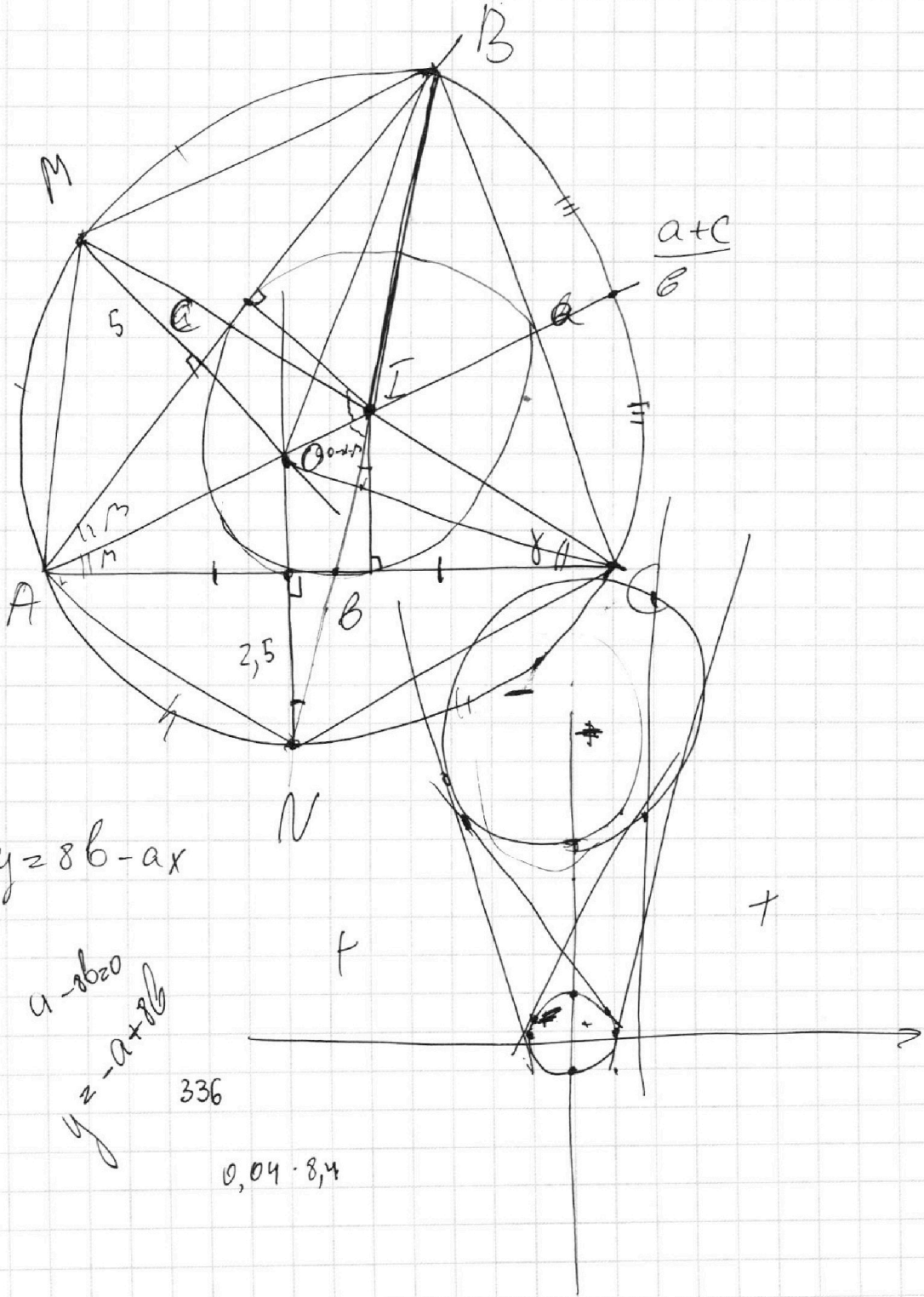
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



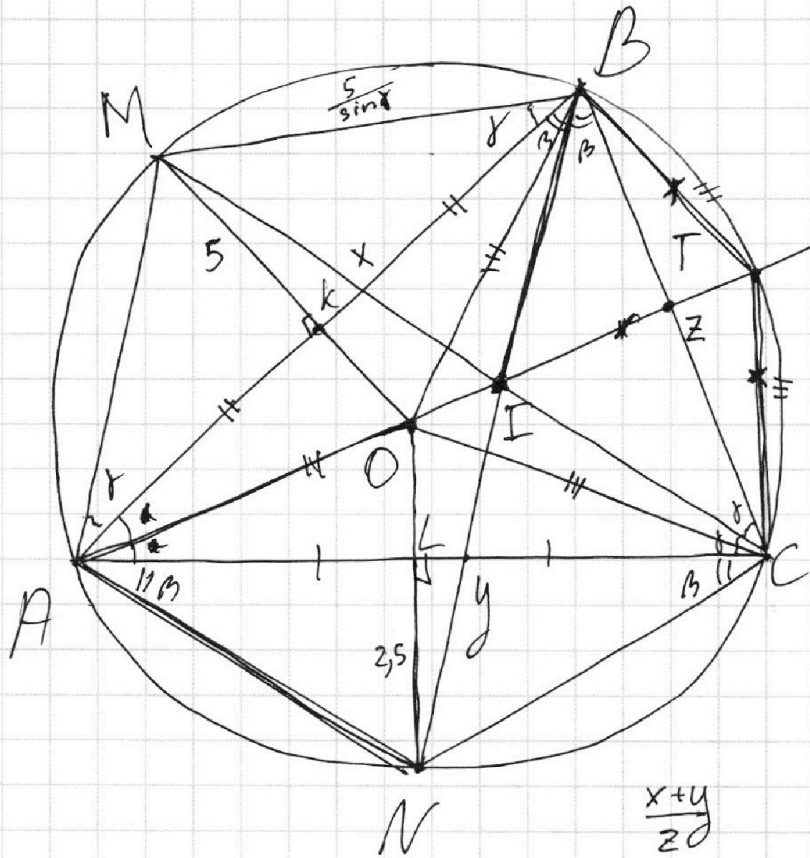
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\frac{5 \operatorname{ctg} \beta + 10 \operatorname{ctg} \beta}{5 \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\frac{BT}{TC} = \frac{x}{y}$$

$$\left(\frac{x}{y} + 1\right) \cdot z$$

$$ky - \left(\frac{x}{y} + 1\right) \cdot z = \left(\frac{y}{x} + 1\right) \cdot z$$

$$(xy - \left(z + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \cdot z) \cdot \frac{x+y}{z}$$

$$ky(x+y) - 2x - 2y + \dots$$

$$AC = 5 \operatorname{ctg} \beta \quad AB = 10 \operatorname{ctg} \beta$$

$$BC = 5 \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos 2\beta + 10 \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos 2\beta =$$

$$= 5 \operatorname{ctg} \beta \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} + 10 \operatorname{ctg} \beta \cdot \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \beta}$$

$$= \frac{5(\operatorname{ctg} \beta \cdot \sin^2 \beta + 10 \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos^2 \beta)}{10 \operatorname{ctg} \beta}$$

$$= \frac{5(\operatorname{ctg} \beta \cdot \sin^2 \beta + 10 \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos^2 \beta)}{5 \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \cdot (x+y) =$$

$$= \frac{x^2}{y} + y + x + \frac{y^2}{x}$$

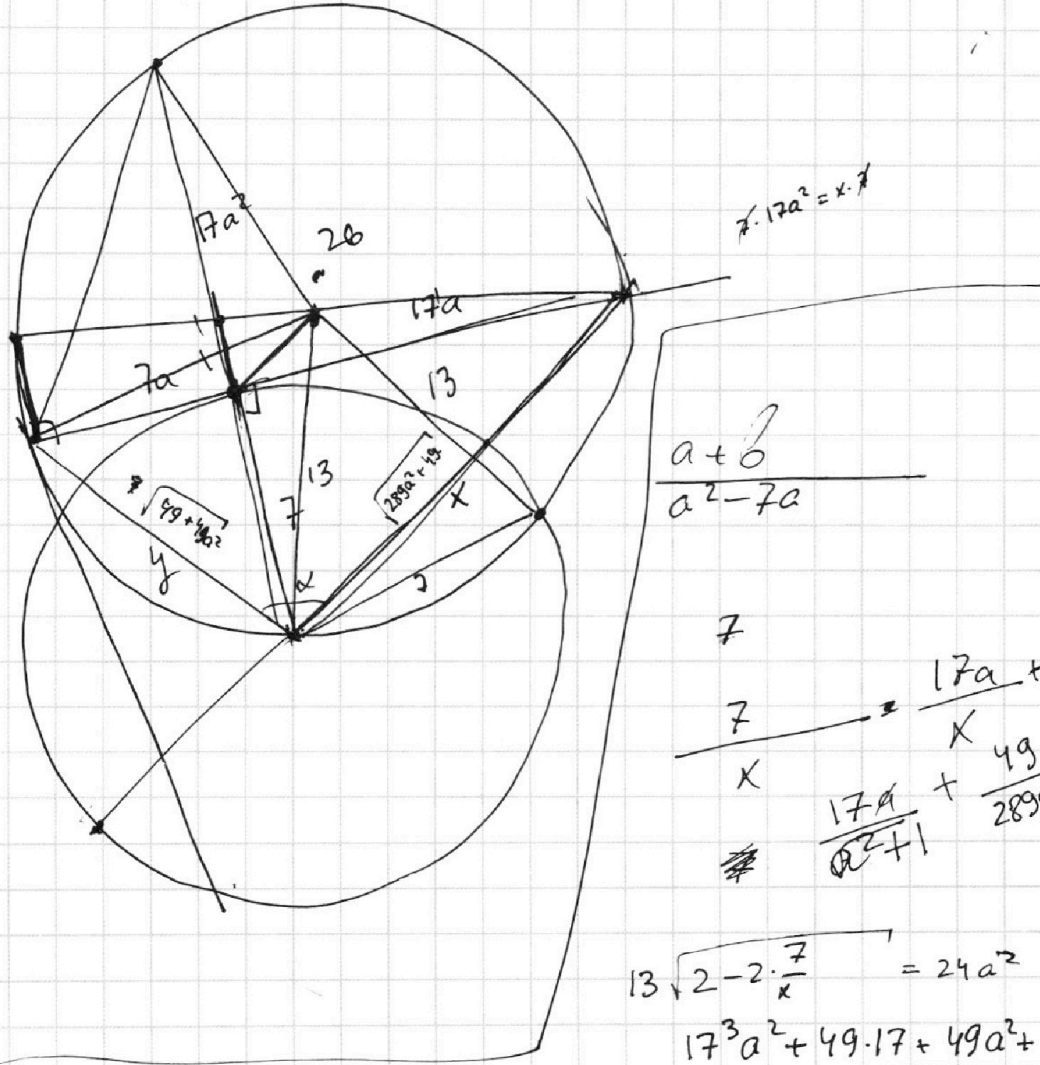
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2-7a}$$

$$\frac{7}{x} = \frac{17a + \frac{7}{y} \cdot \frac{7a}{y}}{\frac{17a}{a^2+1} + \frac{49a}{289a^2+49}} = \frac{17a}{a^2+1} + \frac{49a}{289a^2+49} = \left(\frac{12}{13}\right)^2 a$$

$$13 \sqrt{2 - 2 \cdot \frac{7}{x}} = 24a^2$$

$$\frac{17^3 a^2 + 49 \cdot 17 + 49a^2 + 49}{(a^2+1)(289a^2+49)} = \left(\frac{12}{13}\right)^2 a$$

$$4962a^2 + 4918$$

$$\frac{1002}{287}$$

$$\begin{array}{r} 66 \\ \times 289 \\ \hline 2023 \\ 289 \\ \hline 4913 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a}{b}$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$$\frac{2}{5}$$

$$\frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{a} - 7}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a} - 7}$$

$$\frac{9}{16+25-7 \cdot 20}$$

$$\begin{cases} ab : m \\ a^2 - 7ab + b^2 : m \\ 9ab : m \\ \{ \begin{matrix} 9ab : m \\ a+b : m \end{matrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 9 \cdot 4 \cdot 6 \\ 9 \cdot 6 \cdot 49 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 9ab + 9b^2 : m \\ 9ab : m \\ 9b^2 : m \\ 9a^2 : m \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} b : m \\ 9 : m \\ b^2 : m \end{matrix}$$

$m = pq$ p и q такие, что

$$\begin{matrix} b^2 : p & 9 : q \\ b^2 : q & 9 : p \end{matrix}$$

$$\frac{9a^2 - 9b^2}{9(a^2 - b^2)} = \frac{9(a-b)(a+b)}{9(a-b)(a+b)} = p$$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11} \quad bc : 2^{17} \cdot 7^{18} \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc : ac \Rightarrow abc : 2^{23} \cdot 7^{39} \quad abc : 2^{28}$$

$$a \cdot 2^{29} \quad 55 \quad a = 7^{11} \quad c = 7^{18} \quad b = 1$$

$$\begin{matrix} a^2 b^2 c^2 : ab \cdot bc \cdot ac \\ a^2 b^2 c^2 : 2^{55} \cdot 7^{77} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x+y+z = 28 \\ x+y = 23 \\ y+z = 17 \\ z+x = 15 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 15 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x = 5 \\ y = 18 \\ z = 10 \end{matrix}$$