



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже ~~велосипедиста~~. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .  
*мотоциклиста*

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = \sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№

$$a^4 \cdot b^3 \cdot c^2 \geq 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot 3^{23} \cdot 7^{42} \geq 3^{56} \cdot 7^{72}$$

$$a^2 b^2 c^2 = (abc)^2 \geq 3^{56} \cdot 7^{72}$$

$$abc \geq \pm \sqrt{3^{56} \cdot 7^{72}}$$

~~abc~~ = Так  $a, b$  и  $c$  - натуральные, то  $abc \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow abc \geq + \sqrt{3^{56} \cdot 7^{72}} = 3^{28} \cdot 7^{36}$$

Ответ:  $3^{28} \cdot 7^{36}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

Т.к.  $m$  - это НОД  $(a+b; a^2-9ab+b^2)$ , то если мы перевернём дробь  $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$ , то  $m$  не изм. Тогда

$$\frac{a^2-9ab+b^2}{a+b} = a-10b + \frac{11b^2}{(a+b)};$$

$$\begin{array}{r|l} a^2-9ab+b^2 & a+b \\ \hline a^2+ab & a-10b \\ -10ab+b^2 & \\ -10ab-10b^2 & \\ \hline 11b^2 & \end{array}$$

Т.к.  $\frac{a}{b}$  - несократ. дробь, то  $a$  и  $b$  НОД = 1, а значит  $b^2 \nmid (a+b)$ . Тогда макс.

дел. дроби  $\frac{11b^2}{(a+b)}$  будет 11  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  Максимальный делитель  $\frac{a^2-9ab+b^2}{a+b}$  будет

$$11 \left( \frac{a^2-9ab+b^2}{a+b} = \frac{(a+b)(a-10b)+11b^2}{(a+b)} \right), \text{ т.к. } (a+b) \nmid 11,$$

то дробь : на 11)

Ответ: 11.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 МФТИ

№3

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

Пусть  $a = 3x^2 - 5x + 6$ , тогда  $3x^2 + x + 1 = a - 6x + 5$ ;

~~$$\sqrt{a} - \sqrt{a - 6x + 5} = 5 - 6x$$~~

~~$a + a =$~~

$$\sqrt{a} - \sqrt{a - 6x + 5} = 5 - 6x$$

$$a + a - 6x + 6x + 5 - 5 = 2\sqrt{a^2 - 6xa + 5a}$$

$$a = \sqrt{a^2 - 6xa + 5a}$$

$$a^2 = a^2 - 6xa + 5a$$

$$6x = 5$$

$$x = \frac{5}{6}$$

Об:  $5/6$ .



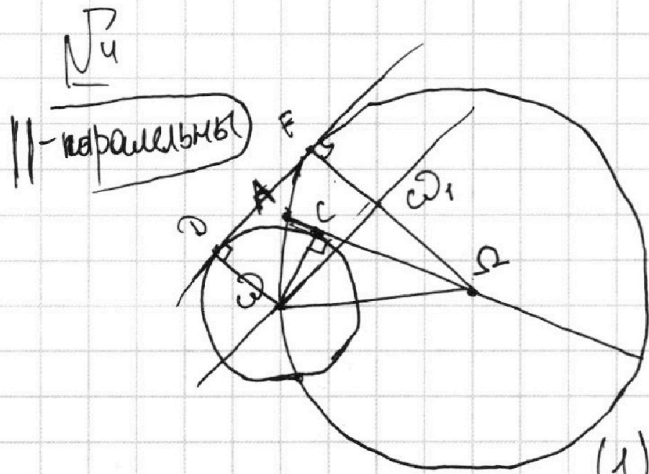
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $D$  и  $F$  — точки касания окружностей  $\omega$  и  $\Omega$  с общ. кас. — ой  $DF$  соответственно.

$$(1) \quad d(\text{расстояние}) = 2r(\text{радиус}) = 1 + 25 = 26 \quad (\text{для окр. } \Omega), \text{ а значит } r = 13.$$

$$\text{Из } \triangle \omega C \Omega \text{ по теор. Пифагора } r \text{ окр. } \omega = \omega C = \sqrt{r^2 - \Omega C^2} = \sqrt{13^2 - (13-1)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

(2) Проверим предположение паралл.  $DF$ . Пусть она пересекает  $\Omega F$  в точке  $\omega_1$ . Так эти прямые ~~не~~  $\parallel$ , то  $\angle F\omega_1\omega = 160^\circ - \angle DFC\omega_1$ , как односторонний, тогда  $\angle F\omega_1\omega = 160^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ , а значит  $D\omega_1F$  — прямоугольник, тк. все его углы  $= 90^\circ$  ( $\angle FPC\omega = 90^\circ$ , тк  $\omega D$  — радиус в точку кас.;  $\angle \omega_1 F D = 90^\circ$ , как радиус в точку кас.;  $\angle F\omega_1\omega = 90^\circ$ ;  $\angle D\omega_1\omega = 360^\circ - 90^\circ \cdot 3 = 90^\circ$ ). Тогда  $DF = \omega\omega_1$ , а  $D\omega = F\omega_1 = 5$ , значит  $\Omega\omega_1 = 13 - 5 = 8$ . Из  $\triangle \Omega\omega_1\omega$  по теор. Пифагора  $\omega\omega_1 = DF = \sqrt{\omega\Omega^2 - \Omega\omega_1^2} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105}$

Ответ:  $\sqrt{105}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$5x - y = 3z$$

$$(1) 5x = 3z + y \quad (x = \frac{3z + y}{5})$$

$$(2) 25x^2 = 9z^2 + 6zy + y^2$$

$$\text{Подставлю (2) } \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$= \frac{\cancel{3z^2 + y^2} + \cancel{6zy} - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$= \frac{3z^2 + y^2 + 6z^2 + 6zy - y^2 - z^2}{3z^2 + y^2} =$$

$$= 1 + \frac{6z^2 - z^2 + 6zy - y^2}{3z^2 + y^2} =$$

$$= \frac{5z^2 + 6zy - y^2}{3z^2 + y^2} + 1$$

Подставлю (3):

$$1 + \frac{5z^2 + 2z^2 - \frac{z^2}{3}}{3z^2 + \frac{z^2}{3}} = \frac{62z^2}{28z^2} + 1 =$$

$$= 1 + \frac{21}{14} = 3 \frac{3}{14}$$

Подставлю (4)

$$\frac{5z^2 - \frac{18z^2}{5} - \frac{9z^2}{25}}{3z^2 + \frac{9z^2}{25}} + 1 = \frac{26z^2}{84z^2} + 1$$

$$= 1 \frac{13}{42} < 3 \frac{3}{14}$$

Ответ:  $1 \frac{13}{42}$ .

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \quad (* \text{ все умно})$$

хано на хуз)

$$8yz + xz = 15xy$$

$$8yz = 15xy - xz$$

$$6yz = 3 \frac{(15xy - xz)}{4}$$

$$6yz = 3x \frac{(15yz)}{4}$$

Подставлю вместо

$$x \frac{3z + y}{5}$$

$$2zy = \frac{(3z + y)(15y - z)}{20}$$

$$40zy = 45xy + 15y^2 - 3z^2 - yz$$

$$15y^2 + 41zy - 3z^2 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 49z^2 = (7z)^2$$

$$(3) y_1 = \frac{-2z + 7z}{15} = \left(\frac{z}{3}\right)$$

$$(4) y_2 = \frac{-2z - 7z}{15} = \left(-\frac{3z}{5}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

Пусть  $x$  км/ч —  $v$  велосипедиста (В),

$y$  км/ч —  $v$  мотоциклиста (М)

$S$  км — расстояние АВ

Т.к. В едет на 17 раньше чем М, то

$$\frac{S}{x} = \frac{S}{y} + 1.$$

~~Из~~ Из второго условия получаем, что

$$\frac{xS}{y} = \frac{yS}{x} - 49.$$

Из третьего условия получаем, что

$$\frac{S}{x+7} = \frac{S}{y+7} + 0,6$$

Тогда мы получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{S}{x} = \frac{S}{y} + 1 \\ \frac{xS}{y} = \frac{yS}{x} - 49 \\ \frac{S}{x+7} = \frac{S}{y+7} + 0,6 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S = \frac{xy}{y-x}$$

$$xy = 4$$

$$S = \frac{49xy}{y^2-x^2}$$

121 - 60 = 60  
 $y-x = \sqrt{\quad}$   
 $y^2-x^2 = U^2 + 2U$

$$y^2-x^2 = 49(y-x)$$

$$\sqrt{a^2 - 6ax + 5a} = 5 - 6b$$

$$a + a - 6ax + 5 - 2\sqrt{a^2 - 6ax + 5a}$$

$$S = \frac{0,6 \cdot (x+7)(y+7)}{y-x}$$

$$= \frac{0,6xy + 0,6(7x+7y) + \frac{6 \cdot 49}{6}}{y-x}$$

$$2a = 2\sqrt{a^2 - 6ax + 5a}$$

$$4a^2 = 4a^2 - 6ax + 5a$$

$$4a - a = 5 - 6x$$

$$9x^2 - 15x + 18 - 5 + 6x = 0$$

$$9x^2 - 9x + 13 = 0$$

$$4a^2 = 4a^2 - 24xa + 20a$$

$$24xa = 20a$$

$$x = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} - \frac{25}{6} + 6}$$

$$= \sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} + \frac{5}{6} + 1}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

Пусть  $a = 3x^2 - 5x + 6$ , тогда  $3x^2 + x + 1 =$   
 $= a - 6x + 5$ !

$$\sqrt{a} - \sqrt{a - 6x + 5} = 5 - 6x$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{a - 6x + 5})^2 = (5 - 6x)^2$$

$$a + a - 6x + 5 - 2\sqrt{a^2 - 6xa + 5a} = 25 - 60x + 36x^2$$

$$2a + 54x - 20 - 36x^2 = 2\sqrt{a^2 - 6xa + 5a}$$

$$6x^2 - 10x + 12 + 54x - 20 - 36x^2 = 44x - 250x^2 - 8$$

$$6x^2 - 4x + 7 - 36x^2 + 60x - 25 = 2\sqrt{\dots}$$

$$56x - 20x^2 - 18 = 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)}$$

$$28x - 10x^2 - 9 = \sqrt{\dots}$$

$$3x^2 - 5x + 6 = a$$

$$+ 5a + 21 - 2x = \sqrt{a(a + 6x - 5)}$$

$$25a^2 + 105a - 15ax + 21^2 - 63x + 9x^2 = a(a + 6x - 5)$$

$$25a^2 + 105a - 15ax + 21^2 - 63x + 9x^2$$

$$\left(3x^2 + \frac{30}{46}\right) - \left(3x^2 + \frac{15}{6}\right)$$





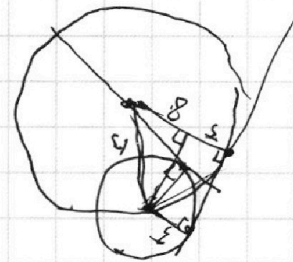
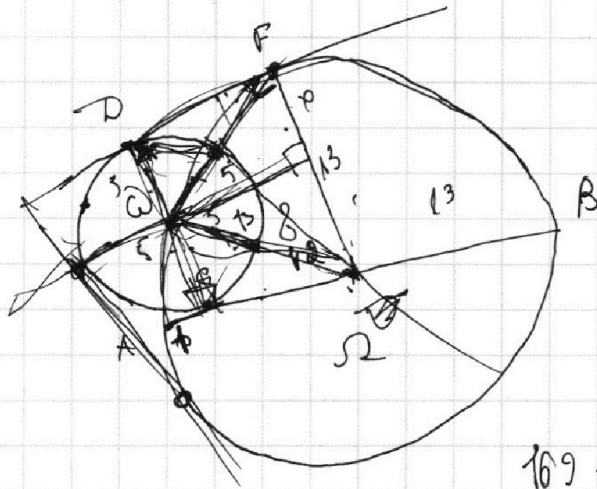
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

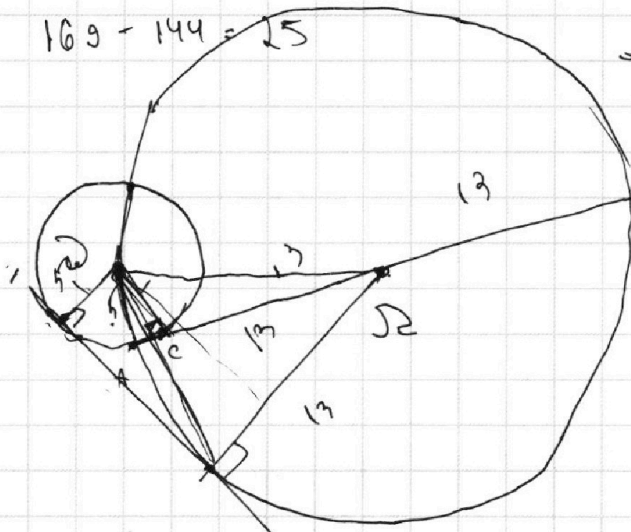


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$169 - 169 + 26x - x^2 -$$

$$169 - 144 = 25$$

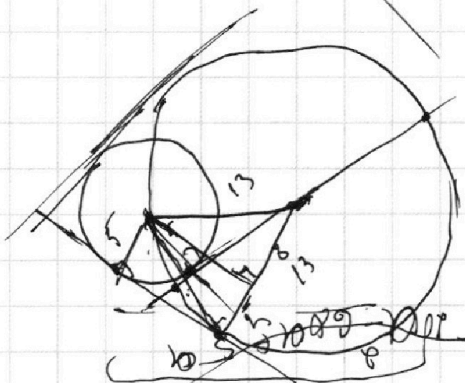


$$18 \cdot 5 = 90$$

$$105 = 507$$

$$169 - 64 = 105$$

$$18 \cdot 5 = 90$$



$$18 \cdot 5 = 90$$

$$18 \cdot 5 = 90$$

$$18 \cdot 5 = 90$$

25

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$8yz + xz = 15xy$$

$$6zy = 3 \cdot \frac{(15xy - xz)}{4}$$

$$25x^2 = y^2 + 3z^2 + 6zy$$

$$6zy = 3 \cdot \frac{(3z + y)(15y - z)}{20}$$

$$1 + \frac{6zy - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$40zy = 45zy + 15y^2 - 3z^2 - zy$$

$$-4zy = 15y^2 - 3z^2$$

$$\frac{5z^2 + 2z^2 - \frac{z^2}{9}}{36 + \frac{z^2}{9}} =$$

$$15y^2 + 4zy - 3z^2 = 0$$

$$D = \frac{16z^2 \pm 4z^2 + 45z^2}{4} = 49z^2$$

$$= \frac{62z^2}{28z^2} = \frac{31}{14}$$

$$y_1 = \frac{-2z + 7z}{15} = \frac{z}{3}$$

$$5z^2 - \frac{18z^2}{5} - \frac{9z^2}{25}$$

$$y_2 = \frac{-2z - 7z}{15} = -\frac{3z}{5}$$

$$3z^2 + \frac{9z^2}{25}$$

$$= \frac{125z^2 - 90z^2 + 9z^2}{75z^2 + 9z^2}$$

$$= \frac{1344}{42} = \frac{13}{42}$$

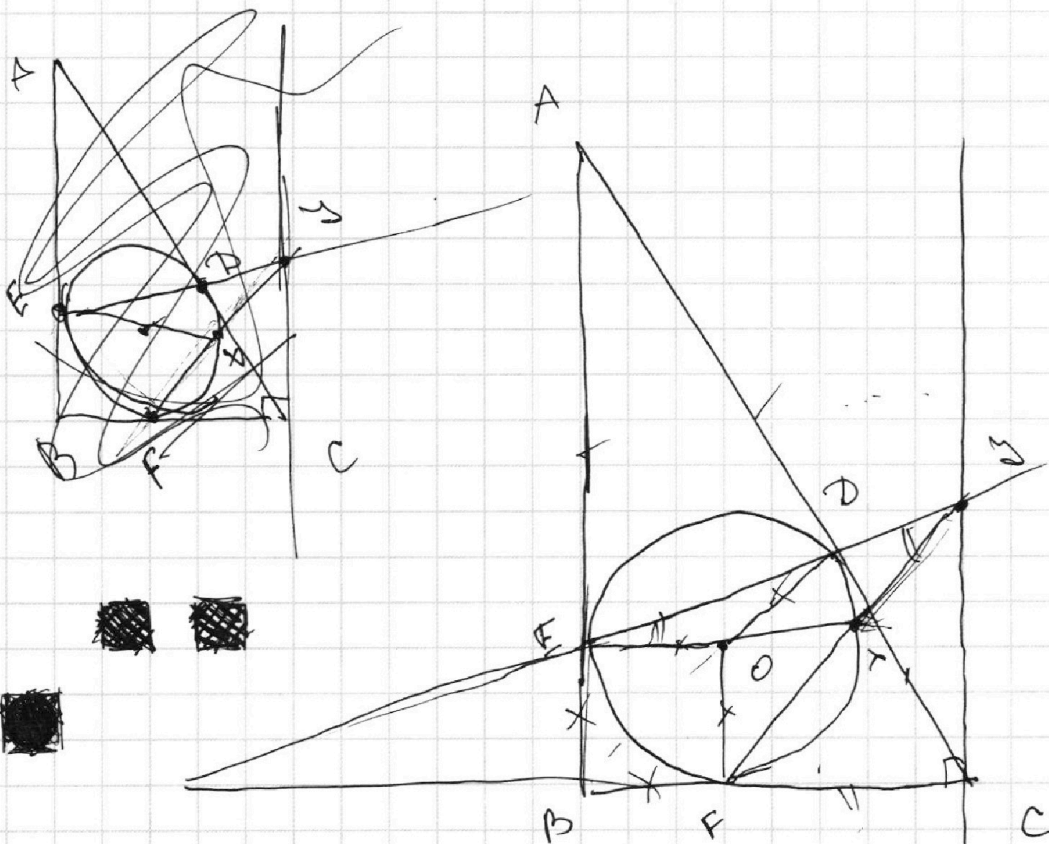
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

