



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



стр 1

$$\begin{cases} ab: 3^4 7^{13} \\ bc: 3^{19} 7^{17} \\ ac: 3^{23} 7^{42} \end{cases}$$

Наименьшее возм. значение abc - ?

$$ab \cdot bc \cdot ac: 3^{4+19+23} \cdot 7^{13+17+42}$$

$$a^2 b^2 c^2: 3^{38} \cdot 7^{72}$$

$$\Rightarrow abc: 3^{28} \cdot 7^{36}$$

$abc \neq 0 \Rightarrow$, т.к. $a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Минимальное число

! $3^{28} \cdot 7^{36}$ не равно 0 - это само число $3^{28} \cdot 7^{36} \Rightarrow$ минимальное значение $abc = 3^{28} \cdot 7^{36}$.

$$\text{Ответ: } 3^{28} \cdot 7^{36}$$

\Rightarrow значит, т.к. $a^2 b^2 c^2 = (abc)^2$, то какой-то делитель abc входит в $a^2 b^2 c^2$ дважды \Rightarrow

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{a}{b}$ - несократимая дробь $\Rightarrow a \not\equiv b \pmod{1} \quad (a; b) = 1$

стр 2

$$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$$

$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$ - дробь, записанная на доске

m - наибольшее число, ^{на} которое можно сократить и

числитель, и знаменатель записанной дроби. Т.е. $(a+b; a^2-9ab+b^2) = m$

По св-ву НОД $(x; y) = \text{НОД}(x; y - kx)$:

$$(a+b; a^2-9ab+b^2) = (a+b; a^2-9ab+b^2 - (a+b)^2) = (a+b; a^2-9ab+b^2 - a^2 - b^2 - 2ab) =$$

$$= (a+b; -11ab) = (a+b; 11ab)$$

$$(a+b; 11ab) = m$$

Т.к. $(a; b) = 1$, то ~~$(a+b; a)$ и $(a+b; b)$~~

$\Rightarrow (a+b; b) = 1, (a+b; a) = 1$ числа $a+b$ и b взаимно просты и $a+b$ и a взаимно просты, тогда $a+b$ и ab тоже взаимно просты, т.к. в a и b не входят никакие общие делители с $a+b$ кроме 1, т.к. значения их произведения ab не будут входить никакие общие делители с $a+b$ кроме 1. Т.е. Т.к. Т.к.

$(a+b; 11ab) = m$. Значит, т.к. $(a+b; ab) = 1$, то общий делитель $m =$ либо 1, либо 11. В задаче просят найти максималь-

$$(a+b; 11ab) = \text{искомое} \quad \text{т.к. } 11 - \text{простое число.}$$

нее m , следовательно $m = 11$.

Ответ: $m = 11$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \quad \text{чр. 3}$$

$$3x^2 - 5x + 6 + 3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6}\sqrt{3x^2 + x + 1} = 25 + 36x^2 - 60x$$

$$6x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6}\sqrt{3x^2 + x + 1} = 25 + 36x^2 - 60x$$

$$-2\sqrt{3x^2 - 5x + 6}\sqrt{3x^2 + x + 1} = 18 + 30x^2 - 56x$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6}\sqrt{3x^2 + x + 1} = -9 - 15x^2 + 28x$$

О.О.:

$$\begin{cases} 3x^2 - 5x + 6 \geq 0 & D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 25 - 72 < 0 \Rightarrow \text{значение всегда } > 0, \text{ параболы не пересекает } OX \\ 3x^2 + x + 1 \geq 0 & D = 1 - 4 \cdot 3 = -11 < 0 \Rightarrow \text{значение всегда } > 0, \text{ параболы не пересекает } OX \\ -9 - 15x^2 + 28x \geq 0 & D = 28^2 - 4 \cdot 15 \cdot 9 = 4(7 \cdot 28 - 15 \cdot 9) = 4(196 - 135) = 4 \cdot 61 > 0 \end{cases}$$

$$-15 \left(x - \frac{-28 - 2\sqrt{61}}{-30} \right) \left(x + \frac{-28 + 2\sqrt{61}}{-30} \right) \geq 0$$

$$\left(\frac{28 + 2\sqrt{61}}{30} - x \right) \left(x + \frac{28 + 2\sqrt{61}}{30} \right) \geq 0$$

$$\begin{array}{c} \text{+ -} \quad \quad \quad \text{+} \quad \quad \quad \text{-} \\ \hline \frac{-\frac{28 + 2\sqrt{61}}{30}}{15} \quad \quad \quad \frac{\frac{28 + 2\sqrt{61}}{30}}{15} \end{array}$$

$$x \in \left[-\frac{14 + \sqrt{61}}{15}, \frac{14 + \sqrt{61}}{15} \right]$$

$$(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1) = (-9 - 15x^2 + 28x)^2$$

$$9x^4 - 15x^3 + 18x^2 + 3x^3 - 5x^2 + 6x + 3x^2 - 5x + 6 = (-9 - 15x^2 + 28x)^2$$

$$9x^4 - 15x^3 + 16x^2 + 3x^3 + x + 6 = (28x - 15x^2 - 9)^2$$

$$9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6 = (28x - 15x^2 - 9)^2$$

$$9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6 = 28^2 x^2 + (15x^2 + 9)^2 - 2 \cdot 28x(15x^2 + 9)$$

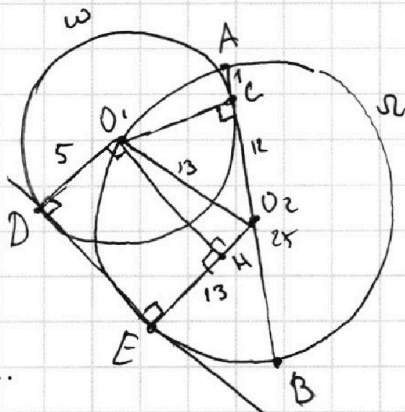
$$9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6 = 28^2 x^2 + 15^2 x^4 + 81$$

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



стр. 8



DE - общая кас.

D - точка кас. ω и общ. кас. к ω и Ω

E - точка кас. Ω и общ. кас. к ω и Ω
т.к. AC кас. к ω в т. C

П.к. $\triangle O_1CO_2$ - тупой, то можно записать т. Пифагора

где $\triangle O_1CO_2$:

$$O_1O_2^2 = O_1C^2 + O_2C^2 \quad 13^2 = O_1C^2 + 144 \quad O_1C^2 = 169 - 144 = 25$$

$\Rightarrow O_1C^2 = 25 \Rightarrow O_1C = 5$, так как O_1C - радиус $\omega \Rightarrow$ радиус $\omega = 5$.

Проведем касат. O_1H к O_2E . П.к. DE - касательная, то $DE \perp DO_1$, и

$DE \perp O_2E$. Тогда то, как провели O_1H образует прямоугольник O_1DHE , т.к. $O_1D \perp O_2E$, т.к. $O_1D \perp DE$ и $O_2E \perp DE$

DO_1HE , т.к. DE - общая касательная, следовательно он прямоугольник, 4 угла прямые в этом четырехугольнике, следовательно он прямоугольник.

Тогда $EH = O_1D$, Тогда $EO_2 = O_2H + EH$, $O_2H = EO_2 - EH = EO_2 - O_1D$,

$O_2H = 13 - 5 = 8$. Запишем т. Пифагора где прямые. $\triangle HO_1O_2$:

$$O_1O_2^2 = O_1H^2 + HO_2^2 \quad 169 = O_1H^2 + 64 \quad O_1H^2 = 105$$

$$O_1H = \sqrt{105}$$

П.к. O_1DHE - прямоугольник, противоп. ст. равны $\Rightarrow DE = O_1H = \sqrt{105}$.

Ответ: $\sqrt{105}$.

Т.к. т. A, C, B лежат на
 одной прямой - AB - диаметр,
 $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 1$, $BC = 25$, то
 радиус Ω равен $\frac{25+1}{2} = 13$.
 O_1 - центр ω
 O_2 - центр Ω
 $O_1O_2 = 13$, т.к. центр
 лежит на Ω , значит O_1O_2 - радиус.
 $O_2C = O_2A - AC$
 $O_2A = 25$ радиус
 $O_2C = 25 - 1 = 24$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

стр 4

a) $x = 2y$

$$z = \frac{5x - y}{3}$$

$$z = \frac{10y - y}{3} = 3y$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25 \cdot 4y^2 - y^2 - 9y^2}{y^2 + 9y^2} = \frac{100y^2 - 10y^2}{28y^2} = \frac{90}{28} = \frac{45}{14} =$$

$$= 3 \frac{3}{14}$$

б) $x = -0,8y$ — пусть $z = \frac{5x - y}{3}$

$$z = \frac{-4y - y}{3} = -\frac{5}{3}y$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25 \cdot 0,64y^2 - y^2 - \frac{25}{9}y^2}{y^2 + 3 \cdot \frac{25}{9}y^2} = \frac{16y^2 - y^2 - \frac{25}{9}y^2}{y^2 + \frac{25}{3}y^2} = \frac{16 - 1 - \frac{25}{9}}{1 + \frac{25}{3}} = \frac{15 - \frac{25}{9}}{1 + \frac{25}{3}} = \frac{45 - \frac{25}{3}}{3 + 25} =$$

$$= \frac{45 - \frac{25}{3}}{28} = \frac{45 \cdot 3 - 25}{28 \cdot 3} = \frac{135 - 25}{84} = \frac{110}{84} = \frac{55}{42} = 1 \frac{13}{42}$$

~~$3 \frac{3}{14}$~~ $1 \frac{13}{42} < 3 \frac{3}{14}$, следовательно наименьшее возможное

значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$ равно $1 \frac{13}{42}$.

Ответ: $1 \frac{13}{42}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

стр 3

$5x - 8y = 3z$ $x, y, z \neq 0 \Rightarrow$ Мы можем делить, получим на x, y, z .

$$\begin{cases} 5x - y = 3z \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{5x - y}{3} \\ \frac{8yz + xz - 15xy}{xyz} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{5x - y}{3} \\ 8yz + xz - 15xy = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = \frac{5x - y}{3} \\ z(8y + x) = 15xy \end{cases} \quad \begin{cases} z = \frac{5x - y}{3} \\ z = \frac{15xy}{8y + x} \end{cases}$$

$$\frac{5x - y}{3} = \frac{15xy}{8y + x}$$

$$(5x - y)(8y + x) = 45xy$$

$$40xy + 5x^2 - 8y^2 - yx = 45xy$$

$$5x^2 - 8y^2 - 6yx = 0$$

Выразим x через y .

$$D = 36y^2 + 4 \cdot 5 \cdot 8y^2 = 36y^2 + 160y^2 = 196y^2$$

~~то есть $\sqrt{196y^2} = 14y$~~

1) $y \geq 0$

$$x_1 = \frac{6y + \sqrt{196y^2}}{10} = \frac{6y + 14y}{10} = 2y$$

$$x_2 = \frac{6y - \sqrt{196y^2}}{10} = \frac{6y - 14y}{10} = -0,8y$$

2) $y < 0$

$$x_3 = \frac{6y + \sqrt{196y^2}}{10} = \frac{6y + |14y|}{10} = \frac{6y - 14y}{10} = -0,8y$$

$$x_4 = \frac{6y - \sqrt{196y^2}}{10} = \frac{6y - |14y|}{10} = \frac{6y + 14y}{10} = 2y$$

Итак, в итоге x через y выражается 2 вариантами:

$$\begin{cases} x = 2y \\ x = -0,8y \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ср. 6

~~Площадь полученная выражение $S_{AB} = \frac{V_A V_B}{V_A + V_B}$~~

значит, что ~~выражение~~ по (2):

$$S_{AB} = \frac{(49 - V_B) V_B}{\sqrt{49 - 2V_B}}$$

Площадь S_{AB} и по (2):

$$\frac{V_B (49 - V_B)}{(49 - 2V_B)(49 + 7 - V_B)} + \frac{3}{5} = \frac{V_B (49 - V_B)}{(49 - 2V_B)(49 + V_B + 7)}$$

$$\frac{V_B (49 - V_B)}{(49 - 2V_B)} \left(\frac{1}{56 - V_B} - \frac{1}{V_B + 7} \right) = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{V_B (49 - V_B)}{49 - 2V_B} \left(\frac{V_B + 7 - 56 + V_B}{(56 - V_B)(V_B + 7)} \right) = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{V_B (49 - V_B) (2V_B - 49)}{(49 - 2V_B) (56 - V_B) (V_B + 7)} = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{V_B (49 - V_B)}{(56 - V_B) (V_B + 7)} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{49V_B - V_B^2}{56V_B + 56 \cdot 7 - V_B^2 - 7V_B} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{49V_B - V_B^2}{49V_B + 56 \cdot 7 - V_B^2} = \frac{3}{5}$$

$$5 \cdot 49V_B - 5V_B^2 = 3 \cdot 49V_B + 3 \cdot 56 \cdot 7 - 3V_B^2$$

$$\begin{aligned}
 & 2V_B^2 + 349V_B \\
 & 2V_B^2 - 249V_B + 3 \cdot 56 \cdot 7 = 0 \\
 & V_B^2 - 49V_B + 3 \cdot 28 \cdot 7 = 0 \\
 & D = 49^2 - 4 \cdot 3 \cdot 28 \cdot 7 \\
 & D = 7^2 (7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4) \\
 & D = 7^2 (49 - 48) = 7^2 \\
 & V_{B1} = \frac{49 + 7}{2} = 28 \\
 & V_{B2} = \frac{49 - 7}{2} = 21
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



стр. 7

1) $V_B = 28$; тогда $V_M = 49 - 28 = 21$

Но $S_{AB} = \frac{V_M V_B}{V_M - V_B}$, если

$V_M < V_B$, то но при этом $V_M \geq 0$, $V_B > 0$, то

$S_{AB} < 0$, а такое быть не может. Поэтому $V_B = 28$ не

подходит, т.к. $V_M > V_B$.

2) $V_B = 21$, тогда $V_M = 49 - 21 = 28$

$S_{AB} = \frac{21 \cdot 28}{28 - 21} = \frac{21 \cdot 28}{7} = 4 \cdot 21 = 84 \Rightarrow$ расстояние между
пунктами A и B = 84 км

Ответ: 84 км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

стр. 5
 Пусть V_M — скорость, с которой мотоциклист ехал на первом этапе.
 Пусть V_B — скорость, с которой ехал велосипедист — V_B .
 Пусть S_{AB} — расстояние между пунктами А и В.

Запишем уравнения, которые следуют из условия (без лишних измерений, мы предполагаем заранее перевести то, что нужно, чтобы ответ получился в км, а скорости в км/ч).

Ил.о. $36 \text{ мин} = \frac{36}{60} \text{ ч} = \frac{3}{5} \text{ ч}$

$$\begin{cases} \frac{S_{AB}}{V_M} + 1 = \frac{S_{AB}}{V_B} & (1) \text{ — т.к. мотоциклист прибыл на 1 ч раньше} \\ \frac{S_{AB}}{V_M + 7} + \frac{3}{5} = \frac{S_{AB}}{V_B + 7} & (2) \text{ — т.к. если увеличить их скорости на } 7 \text{ км/ч, то велосипедист} \\ & \text{приехал бы позже, чем мотоциклист} \\ & \text{на } \frac{3}{5} \text{ ч.} \\ \left(\frac{S_{AB}}{V_M} + 1 \right) V_M - \frac{S_{AB}}{V_B} V_B = 49 & (3) \text{ — т.к. если бы велосипедист ехал} \\ & \text{в той же скорости в течение того} \\ & \text{времени, что потратилась мотоциклист} \\ & \text{на путь от А к В, а мотоциклист —} \\ & \text{в течение того времени, что потратилась} \\ & \text{велосипедист на этот путь, то мотоциклист} \\ & \text{бы проехал на 49 км больше} \end{cases}$$

Выразим S_{AB} из (1):

$$S_{AB} \left(\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_M} \right) = 1$$

$$S_{AB} \left(\frac{V_M - V_B}{V_M V_B} \right) = 1$$

$$S_{AB} = \frac{V_M V_B}{V_M - V_B}$$

Теперь подставим полученное выражение в (3):

$$\left(\frac{V_B}{V_M - V_B} + 1 \right) V_M - \frac{V_B}{V_M - V_B} V_B = 49$$

$$\frac{V_B V_M}{V_M - V_B} + V_M - \frac{V_B^2}{V_M - V_B} = 49$$

$$\frac{V_B V_M + V_M^2 - V_B V_M - V_B^2}{V_M - V_B} = 49$$

$$\frac{(V_M - V_B)(V_M + V_B)}{V_M - V_B} = 49$$

$$V_M = 49 - V_B$$

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



стр. 13

Сумма корней DF уравнения имеет вид $b(1) + b(2)$:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a}$ по м. Виета
 $ax^2 + bx + c = 0$ по формуле.

~~DD3.~~ $(\sqrt{5}xy - Dy)^2 + DF^2 - \sqrt{2}(\sqrt{5}xy - Dy)DF = 2xy^2 +$

$+ (\sqrt{\frac{5}{2}}DF - xy)^2 - \sqrt{2}Ex(\sqrt{\frac{5}{2}}DF - xy)$

$(\sqrt{5}xy - Dy)^2 + DF^2 - \sqrt{10}xy + \sqrt{2}DyDF = 2xy^2 +$

$+ \frac{5}{2}DF^2 - 2\sqrt{\frac{5}{2}}DFxy + xy^2 - \sqrt{5}ExDF + \sqrt{2}Exxy$

$- (\sqrt{5}xy - Dy)^2 + \sqrt{10}xy + 2xy^2 + xy^2 + \sqrt{2}Exxy +$

$+ \frac{5}{2}DF^2 + 1.5DF^2 - 2\sqrt{\frac{5}{2}}DFxy - \sqrt{2}DyDF - \sqrt{5}ExDF = 0$

$- (\sqrt{5}xy - Dy)^2 + \sqrt{10}xy + 2xy^2 + xy^2 + \sqrt{2}Exxy +$

$+ 1.5DF^2 + DF(-2\sqrt{\frac{5}{2}}xy + \sqrt{2}Dy + \sqrt{5}Ex) = 0$

$-\frac{b}{2a} = \frac{2\sqrt{\frac{5}{2}}xy + \sqrt{2}Dy + \sqrt{5}Ex}{3} = \frac{2\sqrt{\frac{5}{2}}xy + \sqrt{2}Dy + \sqrt{10}xy}{3}$

$= \frac{2\sqrt{10}xy + \sqrt{2}Dy}{3}$

Приведем к виду (2):

~~$\frac{b}{2a}$~~ $1.5DF^2 - Dy - \sqrt{2}DyDF = 0$

$-\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{2}Dy}{3}$

$\frac{\sqrt{2}Dy}{3} = \frac{2\sqrt{10}xy + \sqrt{2}Dy}{3}$

$\sqrt{2}Dy = 2\sqrt{10}xy + \sqrt{2}Dy$

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

стр. 11

$$\angle EXY = 180^\circ - \angle EXF = 180^\circ - 45^\circ - 135^\circ$$

Заметим т. пок. для $\triangle EXY$:

$$EX = \sqrt{2}XY$$

$$EY^2 = EX^2 + XY^2 - 2 \cos 135^\circ \cdot EX \cdot XY$$

$$EY^2 = EX^2 + XY^2 + 2 \cos 45^\circ \cdot EX \cdot XY$$

$$EY^2 = EX^2 + 2XY^2 + XY^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot XY \cdot XY = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot XY \cdot XY$$

$$EY^2 = 2XY^2 + XY^2 + 2XY^2 = 5XY^2$$

$$EY^2 = 5XY^2$$

$$EY = \sqrt{5}XY$$

$EA \parallel YC$, $\angle ADE = \angle CDY \Rightarrow \triangle EDA \sim \triangle YDC$ по

3 углам, т. пок. $EA \parallel YC$, т. пок. $\angle DYC = \angle DEA$ и $\angle EAD = \angle DCY$.

П.о. $\frac{ED}{DY} = \frac{AD}{DC}$, т. пок. чтобы найти $\frac{AD}{DC}$ можно найти $\frac{ED}{DY}$.

$$ED + DY = EY$$

$$ED + DY = \sqrt{5}XY$$

• ~~Эт~~

$$\triangle EYX \sim \triangle FYD$$

по 3 углам,

$$\angle DEY = \angle DFY, \text{ т. пок.}$$

от бисс. и смежные

т. пок. $\angle EYX$

$\angle EYF$ - одност. П.о.

$$\frac{EY}{FY} = \frac{EX}{DF}$$

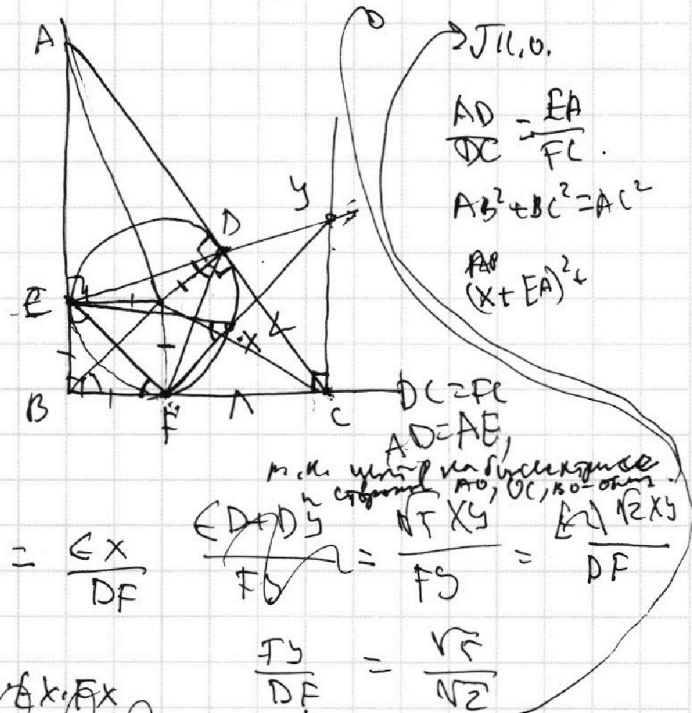
$$\frac{ED + DY}{FY} = \frac{EX}{DF} = \frac{\sqrt{2}XY}{DF} = \frac{EY}{DF}$$

$$\frac{FY}{DF} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

П.о. пок. для $\triangle EFX$:

$$EF^2 = EX^2 + FX^2 - 2 \cos 45^\circ \cdot EX \cdot FX$$

$$EF^2 = 2XY^2 + FX^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot XY \cdot FX$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ил. кос. где $\Delta F D Y$; $FS^2 = DF^2 + DY^2 - 2 \cos 135^\circ \cdot DY \cdot DF$

$$FS^2 = DF^2 + DY^2 + \sqrt{2} \cdot DY \cdot DF$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} DF\right)^2 = DF^2 + DY^2 + \sqrt{2} \cdot DY \cdot DF$$

$$2,5 DF^2 = DF^2 + DY^2 + \sqrt{2} \cdot DY \cdot DF$$

$$1,5 DF^2 = DY^2 + \sqrt{2} \cdot DY \cdot DF$$

Ил. кос. где $\Delta E D F$:

$$EF^2 = ED^2 + DF^2 - 2 \cos 45^\circ \cdot ED \cdot DF$$

Ил. кос. где $\Delta E X F$:

$$EF^2 = EX^2 + FX^2 - 2 \cos 45^\circ \cdot EX \cdot FX$$

$$\begin{cases} ED^2 + DF^2 - 2 \cos 45^\circ \cdot ED \cdot DF = EX^2 + FX^2 - 2 \cos 45^\circ \cdot EX \cdot FX \\ 1,5 DF^2 = DY + \sqrt{2} \cdot DY \cdot DF \\ ED + DY = \sqrt{5} \cdot XY \end{cases}$$

$$ED^2 + DF^2 - \sqrt{2} \cdot ED \cdot DF = 2 \cdot XY^2 + (FS - XY)^2 - 2 \cos 45^\circ \cdot EX \cdot FX$$

$$\begin{cases} ED^2 + DF^2 - \sqrt{2} \cdot ED \cdot DF = 2 \cdot XY^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{2}} DF - XY\right)^2 - 2 \cos 45^\circ \cdot EX \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{2}} DF - XY\right) \\ 1,5 DF^2 = DY + \sqrt{2} \cdot DY \cdot DF \end{cases}$$

$$1,5 DF^2 = DY + \sqrt{2} \cdot DY \cdot DF$$

$$\left(\sqrt{5} \cdot XY - DY\right)^2 + DF^2 - \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{5} \cdot XY - DY\right) \cdot DF = 2 \cdot XY^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{2}} DF - XY\right)^2 - \sqrt{2} \cdot EX \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{2}} DF - XY\right)$$

$$1,5 DF^2 = DY + \sqrt{2} \cdot DY \cdot DF \quad (*)$$

$$\left(\sqrt{\frac{5}{2}} DF - XY\right) \cdot EX$$

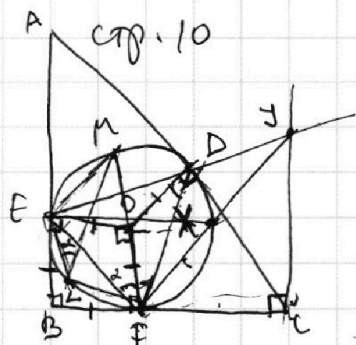
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle X = \sqrt{2} \angle Y$$

0-угол больше 0-уг.

$$\angle FDY + \angle EDF = 180^\circ, \text{ т.к.}$$

они смежные.

$\angle EDF$ - вписанный, опирается на дугу $\overset{\frown}{ED}$ меньшего круга EF .

~~Смотрим на $\angle EFD = 180^\circ - \angle EDF$, т.к.~~

~~меньше~~
 Видим на дуге EF меньший $\angle EFD$
 т.к. $\angle EFD < \angle EDF$ опираются на большую дугу EF .

Проведем FO до перес. с окружностью в точке M .

$\angle FLM = 90^\circ$, т.к. смотрим на диаметр ME . $\angle ELM = \angle LFM$,
 т.к. они опираются на одну дугу. $\angle EFC = \alpha + 90^\circ$, т.к. $OF \perp BC$,
 т.к. $OB = OC$. $\angle ELF = \alpha + 90^\circ$, т.к. $\angle ELF = \angle ELM +$
 $+ \angle MCF$, т.к. $\angle EFC = \angle ELF$, т.к. $\angle ELF = 180^\circ - \angle EDF$,

т.к. $\angle EFD$ - впис. четырехугольник. Тогда $\angle EFD = 90^\circ$

$$\angle FDY = \angle EFC, \text{ т.к. } \angle EFB = \angle EDF.$$

Т.к. $OE \perp AB$, $OF \perp BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, то $\angle OFB$ - прямоугольный.

Т.к. $EO = OF$ то $\angle OFB$ - равнобедренный. Тогда $EB = BF$. Тогда

$$\angle EFB = \frac{180 - 90}{2} = 45^\circ. \text{ Тогда } \angle EDF = 45^\circ.$$

$\angle EXF$ опирается на ту же дугу, что и $\angle EDF \Rightarrow$

- впис. \angle

$$\angle EXF = \angle EDF = 45^\circ.$$

~~$\angle EXF = \angle EDF$~~ $\angle EXF = \angle DFX$, т.к. они впис. и опираются на одну дугу

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} =$$

Черновик

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\begin{cases} 8zy + xz - 15xy = 0 \\ 5x - y = 3z \end{cases}$$

$$z(8y + x) = 15xy$$

$$z = \frac{5x - y}{3}$$

$$\frac{5x - y}{3} = \frac{15xy}{8y + x}$$

$$(8y + x)(5x - y) = 45xy$$

$$40xy - 8y^2 + 5x^2 - xy = 45xy$$

$$5x^2 - 8y^2 = 6xy$$

$$5x^2 - 8y^2 - 6xy = 0$$

$$D = 36y^2 + 4 \cdot 5 \cdot 8y^2 = 196y^2$$

$$x_1 = \frac{6y - 14y}{2 \cdot 10} = -0,8y$$

$$x_2 = \frac{6y + 14y}{10} = 2y$$

1) $x = 2y$

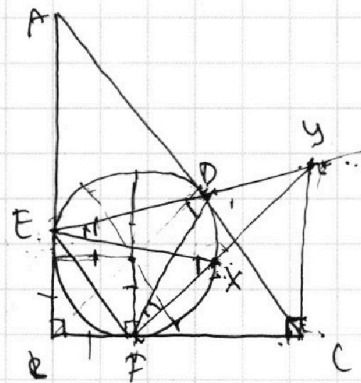
$$5 \cdot 4y - y = 3z$$

$$19y = 3z$$

$$z = 3y$$

$$\frac{8}{2y} + \frac{1}{y} = \frac{8}{2y} + \frac{1}{y} = \frac{15}{3y}$$

$$\frac{4 + 1}{3} = \frac{5}{3}$$



$$EX = \sqrt{2}xy$$

$$EY = \sqrt{2x^2 + 2y^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y \geq 0$$

$$EY^2 = 5x^2$$

$$EY = \sqrt{5}x$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - 4}{y^2 + 3z^2} =$$

$$= \frac{25 \cdot 4y^2 - y^2 - 9y^2}{y^2 + 3 \cdot 9y^2} =$$

$$= \frac{100y^2 - 10y^2}{28y^2 \cdot \frac{8}{2} + 1} = \frac{90}{15} = 6$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

О.О.:

$$\begin{cases} 3x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ 3x^2 + x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

, т.к. выражения под корнем

~~возрастают обе части в квадраты, при этом...~~
 Возведем обе части в квадраты.

$$3x^2 - 5x + 6 + 3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6} \cdot \sqrt{3x^2 + x + 1} = (5 - 6x)^2$$

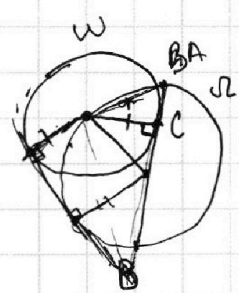
$$6x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6} \cdot \sqrt{3x^2 + x + 1} = 25 + 36x^2 - 60x$$

$$-2\sqrt{3x^2 - 5x + 6} \sqrt{3x^2 + x + 1} = 18 + 30x^2 - 56x$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} \sqrt{3x^2 + x + 1} = 28x - 15x^2 - 9$$

О.О.!: $28x - 15x^2 - 9 \geq 0$

Велосипедист
кружит по окружности мотоциклиста



$AC = 1$
 $BC = 25$

$$\begin{cases} 5x - y = 3z \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \end{cases}$$

$$\frac{15zx + 32z - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{32(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$(5x - y)(5x + y) - z^2$$

$$\frac{8y + x}{xy} = \frac{15}{z} \quad \frac{8yz + xz - 15xy}{xy^2} = 0$$

$$2(8y + x) = 15xy \quad 8yz + xz = 15xy \quad z = \frac{15xy}{8y + x}$$

$$\frac{8yz + xz - 15xy}{xy^2} = 0 \quad \frac{15xy}{8y + x}$$

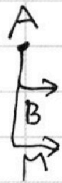
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



B $t_M + 14 = t_B$

$$(t_M + 14)v_M - t_M \cdot v_B = 49 \text{ km}$$

$$\frac{v_M + 7}{v_M + 7} \cdot \left(\frac{S_{AB}}{v_M + 7} \right) + \frac{36}{60} = \frac{S_{AB}}{v_B + 7}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{S_{AB}}{v_M} + 14 &= \frac{S_{AB}}{v_B} \\ \frac{S_{AB}}{v_M + 7} + \frac{36}{60} &= \frac{S_{AB}}{v_B + 7} \end{aligned} \right. \text{ Умножим}$$

$$\frac{S_{AB}}{v_M} + 14 \cdot v_M - t_M \cdot \frac{S_{AB}}{v_M} \cdot v_B = 49 \text{ km}$$

~~S_{AB}~~ S_{AB}?

$$S_{AB} \left(\frac{1}{v_M} - \frac{1}{v_B} \right) = -14$$

$$\frac{v_B v_M}{v_M - v_B} + v_M - \frac{v_B^2}{v_M - v_B} = 49$$

$$S_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{v_B} - \frac{1}{v_M}} = \frac{v_B v_M}{v_M - v_B}$$

$$\frac{v_B v_M - v_B^2 + v_M^2 - v_B v_M}{v_M - v_B} = 49$$

$$\frac{(v_B v_M) (v_M - v_B)}{v_M + 7} + \frac{36}{60} = \frac{v_B v_M}{(v_M - v_B) (v_B + 7)}$$

$$v_B v_M$$

$$\frac{(v_B)}{(v_M - v_B + 7)} v_M - \frac{v_B v_B}{v_M - v_B}$$

$$\frac{(v_M - v_B) (v_M + v_B)}{v_M - v_B} = 49$$

$$v_M + v_B = 49$$

$$v_M = v_B - 49$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{t} - \sqrt{t-a} = a$$

$$t^2 + t - a - 2\sqrt{t^2 - ta} = a$$

$$-2\sqrt{t^2 - ta} = 2a - 2t$$

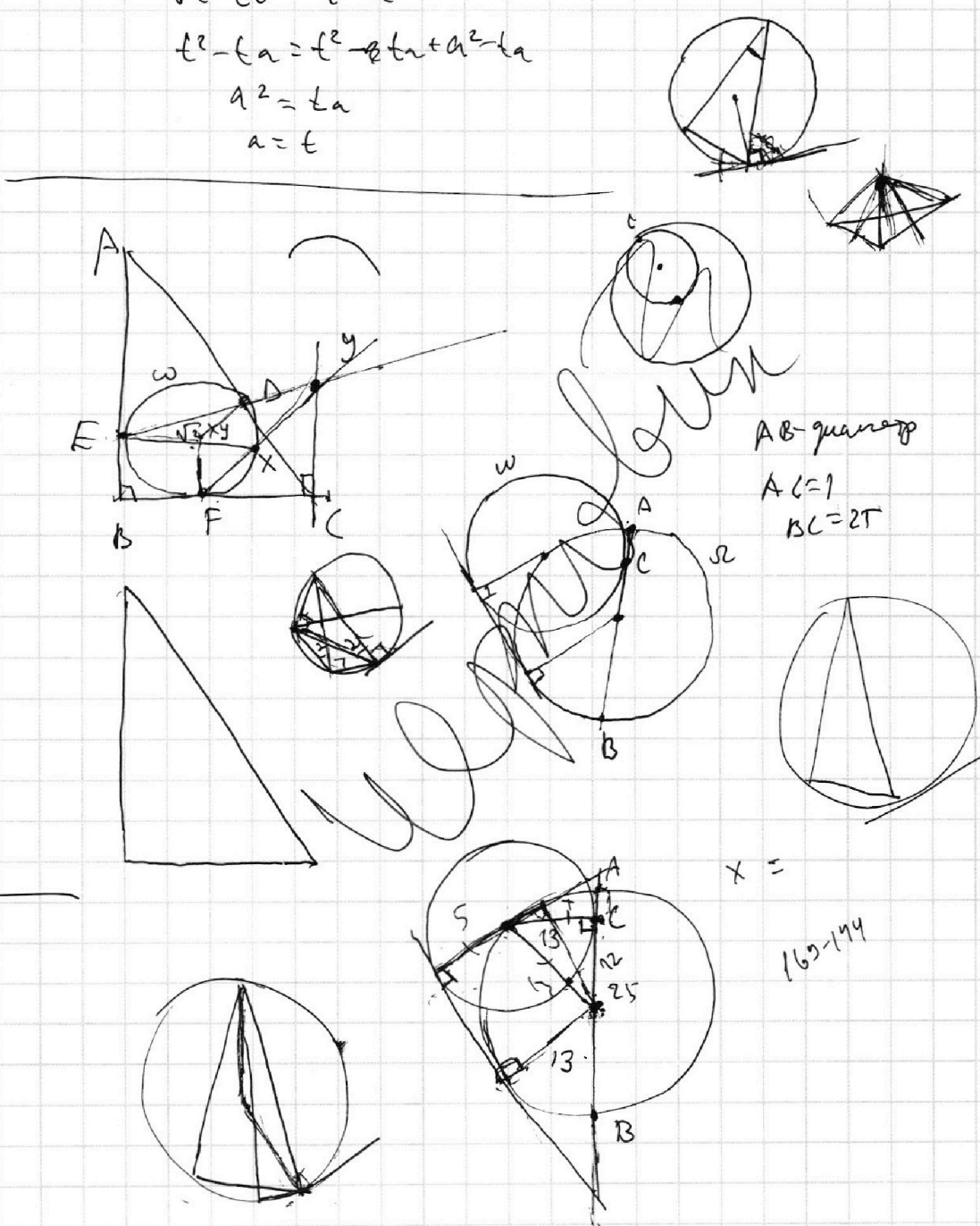
$$\sqrt{t^2 - ta} = t - a$$

$$t^2 - ta = t^2 - 2ta + a^2 - ta$$

$$a^2 = ta$$

$$a = t$$

$12 + 5 + 7 + 6$
 $12 + 19$
 $15 + 32$
 47



AB - диаметр
 $AC = 1$
 $BC = 2\sqrt{3}$

$x =$
 $163-194$



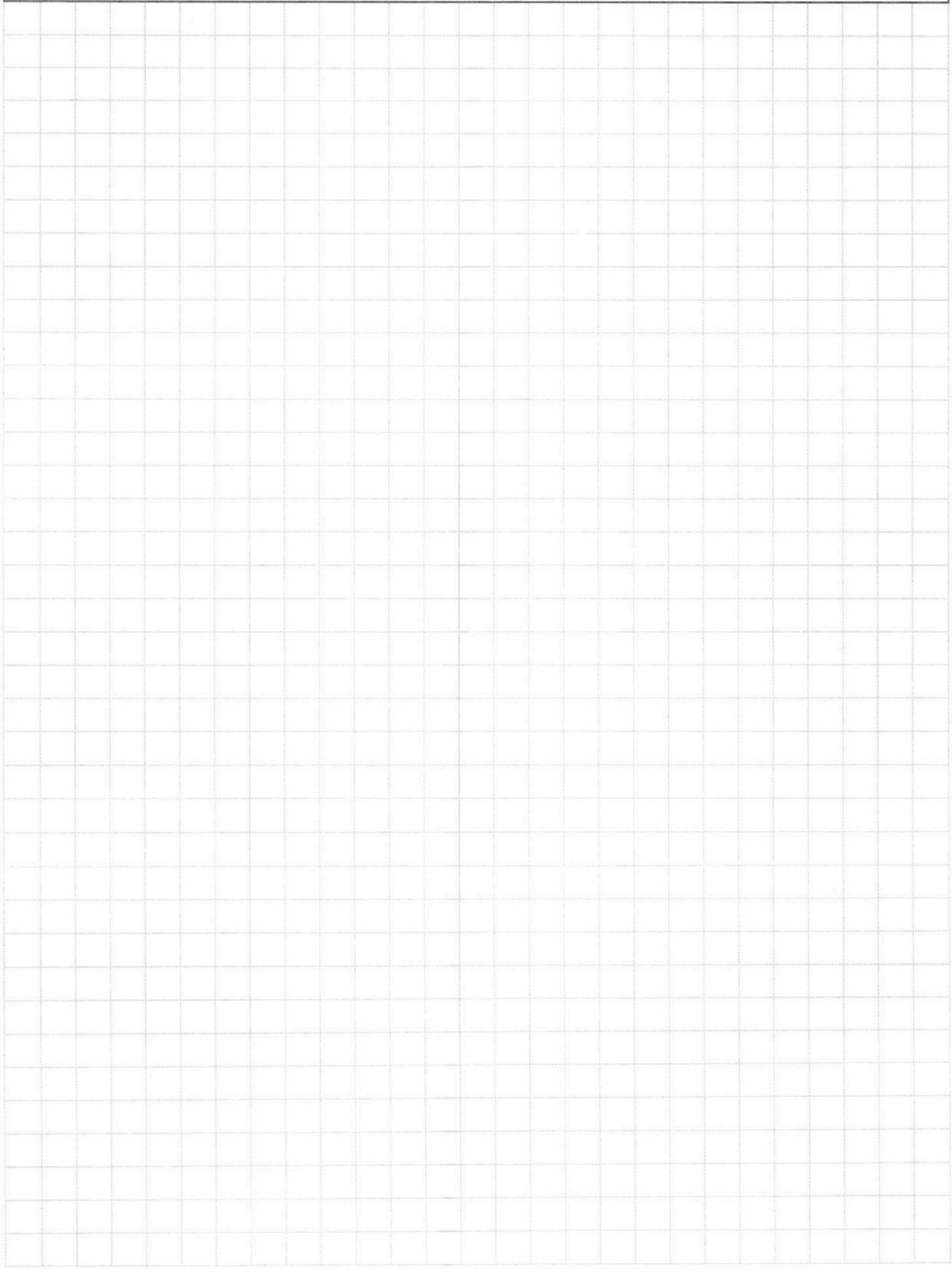
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x$$

ЧЕРНОВИК

$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2-5x+6+6x-5} = 5-6x$$

в этой
странице

~~$3x^2-5x+6 = 3x^2-5x+6+6x-5$~~

$$3x^2-5x+6 + 3x^2-5x+6+6x-5 = (5-6x)^2 + 2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2-5x+6+6x-5)}$$

$$6x^2 - 10x + 12 + 6x - 5 = (6x-5)^2 + 2\sqrt{\dots}$$

$$6x^2 - 4x + 7 - 36x^2 + 25 - 60x + 2\sqrt{\dots}$$

$$-56x + 7 - 25 = -30x^2 = 2\sqrt{\dots}$$

$$3x^2-5x+6 + 3x^2+x+1 - 2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)} = (5-6x)^2$$

$$6x^2-4x+7 - 2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)} = 25+36x^2-60x$$

$$18+30x^2-56x =$$

$$-2\sqrt{\dots}$$

$$56x \quad 28x-15x^2-9 = 2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)}$$

$$28x-15x^2-9 = \sqrt{\frac{9x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 15x^3 - 5x^2 - 5x + 18x^2 + 6x + 6}{6x+6}}$$

$$28x-15x^2-9 = \sqrt{-10x^2 - 12x^3 + 9x^4 + x + 6}$$

$$28x-15x^2-9 = \sqrt{-3x^3(3x-4) + x(1-10x)} = 6$$

$$(28x-15x^2-9)^2 = -10x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

Проведем 2 замены:

Пусть $3x^2 - 5x + 6 = t, t \geq 0$, ~~$3x^2 + x + 1 = a$~~

Пусть $5 - 6x = a$, ~~$3x^2 + x + 1 = a$~~

Тогда: м.к. $\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 - 5x + 6 + 6x - 5} = 5 - 6x$, ~~это то~~

$$\sqrt{t} - \sqrt{t - a} = a$$

Возведем обе части в квадраты, при этом нужно помнить,
что $\begin{cases} t \geq 0 \\ t - a \geq 0 \end{cases}$

Таким образом $t + t - a - 2\sqrt{t}\sqrt{t - a} = a^2$

$$-2\sqrt{t}\sqrt{t - a} = a^2 + a - 2t$$

$$2\sqrt{t}\sqrt{t - a} = 2t - a^2 - a$$

$$t - a^2 - a \geq 0$$

$$4t(t - a) = (2t - a^2 - a)^2$$

$$4t^2 - 4ta = 4t^2 + (a^2 + a)^2 - 2 \cdot 2t \cdot (a^2 + a)$$

$$4t^2 - 4t^2 + 4ta + a^4 + a^2 + 2a^2a - 4ta^2 - 4at = 0$$

$$4t^2 + a^4 + a^2 + 2a^3 - 4ta^2 = 0$$

с этой стороны

Черновик