



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{11}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $3^{18}7^{16}$ ,  $ac$  делится на  $3^{21}7^{38}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=16$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения  $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX=2\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD:DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$ab: 3^{11} \cdot 7^{11} \quad a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$bc: 3^{10} \cdot 7^{16}$$

$$ac: 3^{21} \cdot 7^{38}$$

$$ac: abc_{\min} = ?$$

$$\frac{ab}{3^{11} \cdot 7^{11}} = K; \frac{bc}{3^{10} \cdot 7^{16}}$$

$$abc: 3^{11} \cdot 7^{11} \text{ (т.к. } ab: 3^{11} \cdot 7^{11})$$

$$abc: 3^{10} \cdot 7^{16} \text{ (т.к. } bc: 3^{10} \cdot 7^{16})$$

$$abc: 3^{21} \cdot 7^{38} \text{ (т.к. } ac: 3^{21} \cdot 7^{38})$$

$$ab \cdot bc = ab^2c : \sqrt{29} \quad 3^{11+10} \cdot 7^{11+16} = 3^{21} \cdot 7^{27}$$

$$ac \cdot bc = abc^2 : \sqrt{11+21} \quad 3^{11+38} \cdot 7^{16} = 3^{49} \cdot 7^{54}$$

$$ab^2c \cdot ac = (abc)^2 : (3^{29+21} \cdot 7^{27+54})$$

$$\frac{(abc)^2}{3^{50} \cdot 7^{81}} = K; \quad K \in \mathbb{N}, \text{ т.к. } abc \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{(abc)^2} = \sqrt{K} \sqrt{3^{50} \cdot 7^{81}}$$

$$abc = 3^{25} \sqrt{K} \sqrt{3^{50} \cdot 7^{81}} \text{ , тогда } \sqrt{7^{81} \cdot K} \in \mathbb{N}; K_{\min} = 7$$

$$abc_{\min} = 3^{25} \cdot \sqrt{7^{81} \cdot 7}$$

$$abc_{\min} = 3^{25} \cdot 7^{33}$$

$$\text{Ответ: } 3^{25} \cdot 7^{33}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$$

$\frac{a}{b}$  несократима  $\Rightarrow \frac{b}{a}$  несократима

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$$

$$\frac{a+b}{m} = k; \quad \frac{a^2-8ab+b^2}{m} = n$$

$$\frac{a^2-8ab+b^2}{m} = \frac{a^2+2ab+b^2-2ab-10ab}{m} = \frac{(a+b)^2-10ab}{m}$$

$$= \frac{(a+b)^2}{m} \cdot \frac{(a+b)}{m} - \frac{10ab}{m} = k^2 - \frac{10ab}{m} = n$$

$$m = \frac{k^2 - n}{\frac{10ab}{m}} = \frac{(a+b)^2}{m} \cdot \frac{a^2-8ab+b^2}{m} = \frac{k^2+2ab+b^2-a^2+8ab-b^2}{10abm}$$

$$= \frac{10ab}{ab}$$

$$\frac{(a+b)m}{(a+b)^2-10ab} = \frac{k}{n} = \frac{k}{k^2-10\frac{ab}{m}}$$

$$k((a+b)^2-10ab) = m(a+b)(k^2-10\frac{ab}{m})$$

$$k(a+b)^2-10abk = k^2(a+b) - \frac{10ab(a+b)}{m}$$

$$k(a+b)(a+b+k) = 10abk(k - \frac{a+b}{m})$$

$$m = a+b$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

$$\sqrt{2x^2+x-4x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

$$\sqrt{2x^2+x+1-4x+3} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

Положим:

$$2x^2+x = a; \quad b = 1-4x$$

$$\sqrt{a+b+3} - \sqrt{a+3} = b \quad | \cdot (\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3})$$

$$(\sqrt{a+b+3} - \sqrt{a+3})(\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3}) = b(\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3})$$

$$a+b+3 - (a+3) - b(\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3}) = 0$$

$$a+b+3 - a - 3 - b(\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3}) = 0$$

$$b(1 - \sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3}) = 0$$

$$b = 0 \quad | \quad 1 - (\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3}) = 0 \quad | \cdot (\sqrt{a+b+3} - \sqrt{a+3})$$

$$1-4x=0 \quad (\sqrt{a+b+3} - \sqrt{a+3}) - (a+b+3 - (a+3)) = 0$$

$$x = \frac{-1}{-4} \quad \sqrt{a+b+3} - \sqrt{a+3} - (a+b+3 - a - 3) = 0$$

$$x = \frac{1}{4} \quad \frac{2}{1 + (\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3})^2}$$

$$a+b+3 + a+3 + 2(\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3})(\sqrt{a+3})(\sqrt{a+b+3}) = 1$$

$$2a+6+b+2\sqrt{a^2+ab+3a+3a+3b+9} = 1$$

$$2a+5+b+2\sqrt{a^2+ab+6a+3b+9} = 0$$

$$2a+5+b+2\sqrt{(a+3)^2+b(a+3)} = 0$$

$$2a+5+b+2\sqrt{(a+3)(a+3+b)} = 0$$

$$D_3: 2x^2-3x+4 \geq 0$$

$$2x^2+x+3 \geq 0$$

$$2x^2-3x+4=0$$

$$2x^2+x+3=0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 9 - 32 = -23 < 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 - 24 = -23 < 0$$

нет корней

нет корней

выражения при любых  $x$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 (сложнее)

$$1 - (\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3}) = 0 \quad | + (\sqrt{a+b+3} - \sqrt{a+3})$$

$$(\sqrt{a+b+3} - \sqrt{a+3}) - ((\sqrt{a+b+3})^2 - (\sqrt{a+3})^2) = 0 \quad | \sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3} \neq 0$$

$$(\sqrt{a+b+3} - \sqrt{a+3}) - (a+b+3 - a-3) = 0$$

$$(\sqrt{a+b+3} - \sqrt{a+3}) (1 - \sqrt{a+b+3} - \sqrt{a+3}) = 0$$

$$\text{III.4} \quad \sqrt{a+b+3} \geq 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{a+3} \geq 0$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} > 0, \quad \sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} < 1$$

$$2x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$\sqrt{2x^2 + x + 3} < 1$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 < 0 \quad | \text{Нет корней}$$

$$2x^2 - 3x + 3 < 0$$

$$2x^2 + x + 2 = 0$$

$$2x^2 + x + 2 < 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 < 0 \quad | \text{Нет корней}$$

III тогда  $\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1$  не имеет решений.

Ответ:  $\frac{1}{4}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

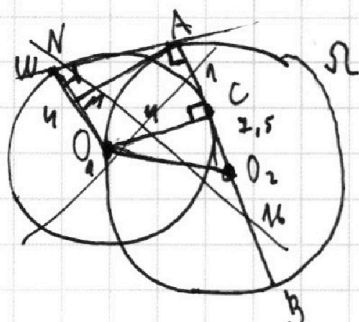
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$R_2 = AC + BC = 17$  (радиус окружности)

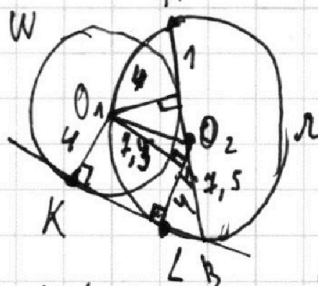
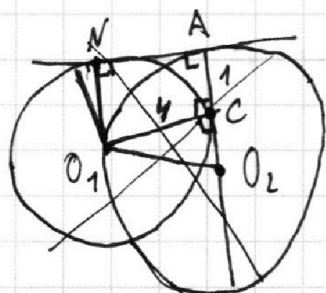
$R_1$

$O_1O_2 = \frac{R_2}{2} = 8,5$  (радиус окружности)

$O_1C = \sqrt{O_1O_2^2 - OC^2} = \sqrt{8,5^2 - 7,5^2} = \sqrt{(8,5 - 7,5)(8,5 + 7,5)} =$

$= \sqrt{10} = 4$  (радиус окружности W, т.к.  $\angle O_1CO_2 = 90^\circ$  - угол между радиусом и касательной)

Проведем касательную ~~AN~~  $KL$ , тогда  $O_1KL = 90^\circ$  и



$O_2LK = 90^\circ$  (угол между касат. и радиусом)

$O_1K \parallel O_2L; O_1O_2 \parallel KL$

$O_1O_2KL$  - параллелограмм.

$O_1O_2KL$  - прямоугольный параллелепипед

Проведем высоту  $O_1H$

$O_2H = O_2L - LH = O_1O_2 - O_1K = 7,5 - 4 = 3,5$  ( $O_1H$  является

$LH$ , равна  $O_1K$  т.к. является высотой)

$O_1H = KL$  (высоты)

$O_1H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2H^2} = \sqrt{7,5^2 - 3,5^2} = \sqrt{(7,5 + 3,5)(7,5 - 3,5)} = \sqrt{11 \cdot 4} =$

$= 2\sqrt{11} = KL$

Ответ:  $2\sqrt{11}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$1) \begin{cases} 3x + 2y = z \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \quad | \cdot xyz \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = z \\ 3yz + xz = 2xy \end{cases}$$

$$2) z + 3y + x = 2xy$$

$$z = \frac{2xy}{3y+x} \quad ; \quad z = 3x+2y$$

$$\frac{2xy}{3y+x} = 3x+2y$$

$$2xy = (3x+2y)(3y+x)$$

$$3) \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3x^2 - 4y^2 - (3x+2y)^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3x^2 - 4y^2 - 9x^2 - 12xy - 4y^2}{x^2 - 6y^2} =$$

$$= \frac{-6x^2 - 12xy - 8y^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{-2(3x^2 + 6xy + 4y^2)}{(x-2y)(x+3y)}$$

$$4) 2xy = (3x+2y)(3y+x) = 9xy + 3x^2 + 6y^2 + 2xy$$

$$2xy - 2xy = 3x^2 + 9xy + 6y^2 = 0 \quad ; \quad \sqrt{3}x + \sqrt{6}y$$

$$\frac{-2(3x^2 + 6xy + 3xy - 3xy + 4y^2 + 2y^2 - 2y^2)}{x^2 - 6y^2} = \frac{-2(-3xy - 2y^2)}{x^2 - 6y^2} =$$

$$= \frac{6xy + 4y^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{2y(y + 3x + 2y)}{x^2 - 6y^2} = \frac{2yZ}{x^2 - 6y^2} = \frac{2yZ}{(x-2y)(x+3y)}$$

$$x = \frac{2-2y}{3} \quad ; \quad x^2 = \frac{z^2 - 4zy + 4y^2}{9}$$

$$3y = z = \frac{z-3x}{2} \quad ; \quad 6y^2 = \frac{6z^2 - 36zx + 9x^2}{2} = 3z^2 - 18zx + 27x^2$$

$$x^2 - 6y^2 = \frac{z^2 - 4zy + 4y^2}{9} - (3z^2 - 18zx + 27x^2) = \frac{z^2 - 4zy + 4y^2}{9} - z^2 + 2zx - 3x^2 =$$

$$= \frac{z^2 - 4zy + 4y^2 - 27z^2 + 9 \cdot 18zx + 9 \cdot 27x^2}{9} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$3x^2 + 9xy + 6y^2 = 0$$

$$D = (9y)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3y^2 = 9y^2$$

$$x_1 = \frac{-9y + \sqrt{9y^2}}{2 \cdot 3} = \frac{-9y + 3y}{6} = -y$$

$$x_2 = \frac{-9y - \sqrt{9y^2}}{6} = \frac{-12y}{6} = -2y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -y \\ x = -2y \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} 1) \frac{-2(3x^2 + 6xy + 4y^2)}{x^2 - 6y^2} &= \frac{-2(3(-y)^2 + 6(-y)y + 4y^2)}{(-y)^2 - 6y^2} = \\ &= \frac{-2(3y^2 - 6y^2 + 4y^2)}{-5y^2} = \frac{-2y^2}{-5y^2} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{-2(3(-2y)^2 + 6(-2y)y + 4y^2)}{(-2y)^2 - 6y^2} &= \frac{-2(12y^2 - 12y^2 + 4y^2)}{4y^2 - 6y^2} = \\ &= \frac{-8y^2}{-2y^2} = 4 \end{aligned}$$

Ответ: 4



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (чужой)

$$x_2^2 - 48x_2 + 590 = 0$$

$$D = (-48)^2 - 4 \cdot 590 = 2304 - 2360 = -56$$

$$x_{21} = \frac{48 + \sqrt{144}}{2} = \frac{48 + 12}{2} = 30$$

$$x_{22} = \frac{48 - \sqrt{144}}{2} = 18$$

$x_2 > r_1$  по условию;  $r_2 = 30$ ;  $r_1 = 18$

$$S_{AB}(r_2 - r_1) = 2r_1r_2$$

$$S_{AB} = \frac{2r_1r_2}{r_2 - r_1} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 18}{30 - 18} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 18}{12} = 5 \cdot 18 = 90$$

Ответ: 90 км

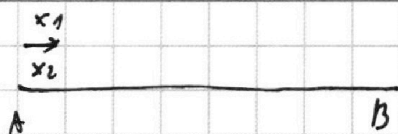
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x_1$  - скорости велосипедиста

$x_2$  - скорости мотоциклиста

$S_{AB}$  - путь от A до B

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{S_{AB}}{x_1} - \frac{S_{AB}}{x_2} &= 2 \quad | \cdot x_1 x_2 \\ \frac{x_2 S_{AB}}{x_1} - \frac{S_{AB} x_1}{x_2} &= 96 \quad | \cdot x_1 x_2 \\ \frac{S_{AB}}{x_1 + 6} - \frac{S_{AB}}{x_2 + 6} &= 1 \frac{1}{4} \quad | \cdot (x_1 + 6)(x_2 + 6) \end{aligned} \right.$$

$$2x_2 = 2 \quad ; \quad 12 \text{ км} = 1 \frac{1}{4}, \quad x_2 > x_1$$

$$\left\{ \begin{aligned} S_{AB} x_2 - S_{AB} x_1 &= 2 x_1 x_2 \\ S_{AB} x_2^2 - S_{AB} x_1^2 &= 96 x_1 x_2 \\ S_{AB} (x_2 + 6) - S_{AB} (x_1 + 6) &= \frac{5}{4} (x_1 + 6)(x_2 + 6) \end{aligned} \right.$$

$$S_{AB} x_2^2 - S_{AB} x_1^2 = 96 x_1 x_2$$

$$S_{AB} (x_2 + 6) - S_{AB} (x_1 + 6) = \frac{5}{4} (x_1 + 6)(x_2 + 6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} S_{AB} (x_2 - x_1) &= 2 x_1 x_2 \\ S_{AB} (x_2^2 - x_1^2) &= 96 x_1 x_2 \\ S_{AB} (x_2 + 6 - x_1 - 6) &= \frac{5}{4} (x_1 x_2 + 6x_1 + 6x_2 + 36) \end{aligned} \right.$$

$$S_{AB} (x_2^2 - x_1^2) = 96 x_1 x_2$$

$$S_{AB} (x_2 + 6 - x_1 - 6) = \frac{5}{4} (x_1 x_2 + 6x_1 + 6x_2 + 36)$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_2 + x_1 &= 48 \quad | \cdot x_2 \\ 2x_1 x_2 &= \frac{5}{4} x_1 x_2 + \frac{15x_1}{2} + \frac{45x_2}{2} + 45 \end{aligned} \right.$$

$$2x_1 x_2 = \frac{5}{4} x_1 x_2 + \frac{15x_1}{2} + \frac{45x_2}{2} + 45$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_2 + x_1 &= 48 \quad | \cdot x_2 \quad x_1 = 48 - x_2 \\ -2x_1 x_2 + \frac{5}{4} x_1 x_2 + \frac{15}{2} (x_1 + x_2) + 45 &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$-2x_1 x_2 + \frac{5}{4} x_1 x_2 + \frac{15}{2} (x_1 + x_2) + 45 = 0$$

$$\frac{3}{4} x_1 x_2 = \frac{15}{2} \cdot \frac{24}{4} x_1 x_2 + 45$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{15}{2} (48 - x_2 + x_2) + 45 - \frac{3}{4} x_2 (48 - x_2) = 0$$

$$24 \cdot 15 + 45 - \frac{3}{4} \cdot 48 x_2 + \frac{3}{4} x_2^2 = 0 \quad | \cdot \frac{4}{3}$$

$$\frac{24 \cdot 15 \cdot 4 + 45 \cdot 4}{4}$$

$$\frac{3}{4} x^2 - 36 x_2 + 24 \cdot 15 + 45 = 0 \quad | \cdot \frac{4}{3}$$

$$x^2 - \frac{36 \cdot 4}{3} x_2 + \frac{24 \cdot 15 \cdot 4}{3} + \frac{45 \cdot 4}{3} = 0$$

$$x^2 - 48 x_2 + 540$$

(продолжение на другой странице)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{v_1}{v_2}$   
 A  $t_1 + t_2$  B  $v_1$  - <sup>скорость</sup> велосиста  
 $v_2$  - скорость мотоциклиста  
 $\Delta t = 2$  (раса) (разница во времени)  $t_1$  - время велосиста  
 $S = vt$  ;  $S_{AB}$  - путь от А до В.  $t_2$  - время мотоциклиста

$$\begin{cases} t_1 - t_2 = 2 \\ v_1 t_2 + 96 = v_2 t_1 \\ \frac{S_{AB}}{v_1 + 6} - \frac{S_{AB}}{v_2 + 6} = 1 \cdot \frac{1}{4} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 1 \cdot 2 \cdot 15 \text{ км} = 1 \cdot \frac{15}{66} = 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \\ S_{AB} = v_1 t_1 ; S_{AB} = v_2 t_2 \\ v_2 > v_1 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \frac{S_{AB}}{v_1} - \frac{S_{AB}}{v_2} = 2 & | \cdot v_1 v_2 \\ v_1 t_2 + 96 = v_2 t_1 \\ \frac{S_{AB}}{v_1 + 6} - \frac{S_{AB}}{v_2 + 6} = 1 \cdot \frac{1}{4} & | \cdot (v_1 + 6)(v_2 + 6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{AB} \cdot v_2 - S_{AB} \cdot v_1 = 2 v_1 v_2 \\ v_1 t_2 + 96 = v_2 t_1 \\ S_{AB} (v_2 + 6) - S_{AB} (v_1 + 6) = 1 \cdot \frac{1}{4} (v_2 + 6)(v_1 + 6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{AB} (v_2 - v_1) = 2 v_1 v_2 \\ v_1 t_2 + 96 = v_2 t_1 \\ S_{AB} (v_2 + 6 - v_1 - 6) = 1 \cdot \frac{1}{4} (v_2 + 6)(v_1 + 6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 v_1 v_2 = 1 \cdot \frac{1}{4} (v_2 t_2 + 6 v_2 + 6 v_1 + 36) \\ v_2 t_1 - v_1 t_2 = 96 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} 2v_1v_2 = 1\frac{1}{4}v_1v_2 + \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{8}v_2 + \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{8}v_1 + \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{4} \\ v_2t_1 - v_1t_2 = 96 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2v_1v_2 - \frac{5}{4}v_1v_2 = \frac{15}{2}v_2 + \frac{15}{2}v_1 + 45 \\ v_2t_1 - v_1t_2 = 96 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4}v_1v_2 = \frac{15}{2}v_2 + \frac{15}{2}v_1 + 45 \quad | \cdot 4 \\ v_2t_1 - v_1t_2 = 96 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 + v_2 = 48 \\ v_1v_2 = 10v_2 + 10v_1 + 60 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3v_1v_2 = 30v_2 + 30v_1 + 180 \quad | : 3 \\ v_2t_1 - v_1t_2 = 96 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1v_2 = 10v_2 + 10v_1 + 60 \\ v_2t_1 - v_1t_2 = 96 \end{array} \right.$$

~~$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 + v_2 = 48 \\ v_1v_2 = 10v_2 + 10v_1 + 60 \end{array} \right.$$~~

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_2 S_{AB}}{v_1} - \frac{S_{AB} \cdot v_1}{v_2} = 96 \quad | v_1 v_2 \\ v_1v_2 = 10v_2 + 10v_1 + 60 \end{array} \right.$$

$$v_1v_2 = 60$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{AB}(v_2^2 - v_1^2) = 96v_1v_2 \\ v_1v_2 = 10v_2 + 10v_1 + 60 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = 48 - v_2 \\ v_1v_2 = 10v_2 + 10v_1 + 60 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{AB}(v_2 - v_1)(v_1 + v_2) = 96v_1v_2 \\ v_1v_2 = 10v_2 + 10v_1 + 60 \end{array} \right.$$

$$(48 - v_2)v_2 = 10v_2 + 10(48 - v_2) + 60$$

$$48v_2 - v_2^2 = 10v_2 + 480 - 10v_2 + 60$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2v_1v_2(v_1 + v_2) = 96v_1v_2 \\ v_1v_2 = 10v_2 + 10v_1 + 60 \end{array} \right.$$

$$v_2^2 - 48v_2 + 420 = 0$$

$$D = 48^2 - 4 \cdot (-420) = 4064$$

~~$$x_{21} = \frac{-48 + \sqrt{4064}}{2} = \frac{48 + 64}{2} = 8$$~~

~~$$x_{22} = \frac{-48 - \sqrt{4064}}{2} < 0 \text{ (не имеет смысла)}$$~~

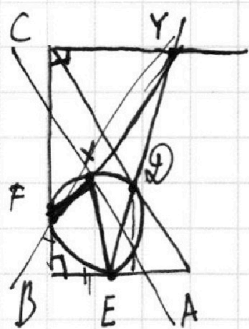
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

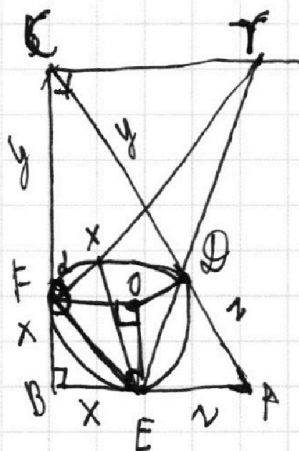
- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$W\text{-окр.}; \quad EX = 2\sqrt{2} \cdot XY$$



$$(x+y)^2 + (x+z)^2 = (y+z)^2$$

$$x^2 + 2yx + y^2 + x^2 + 2xz + z^2 = y^2 + 2yz + z^2$$

$$2x^2 =$$

$$x^2 + 2yx + y^2 + x^2 + 2xz + z^2 = y^2 + 2yz + z^2$$

$$2x^2 + 2yx + 2xz = 2yz$$

$$x^2 + yx + xz = yz$$

$$yx - x(x+z) = y(z-x)$$



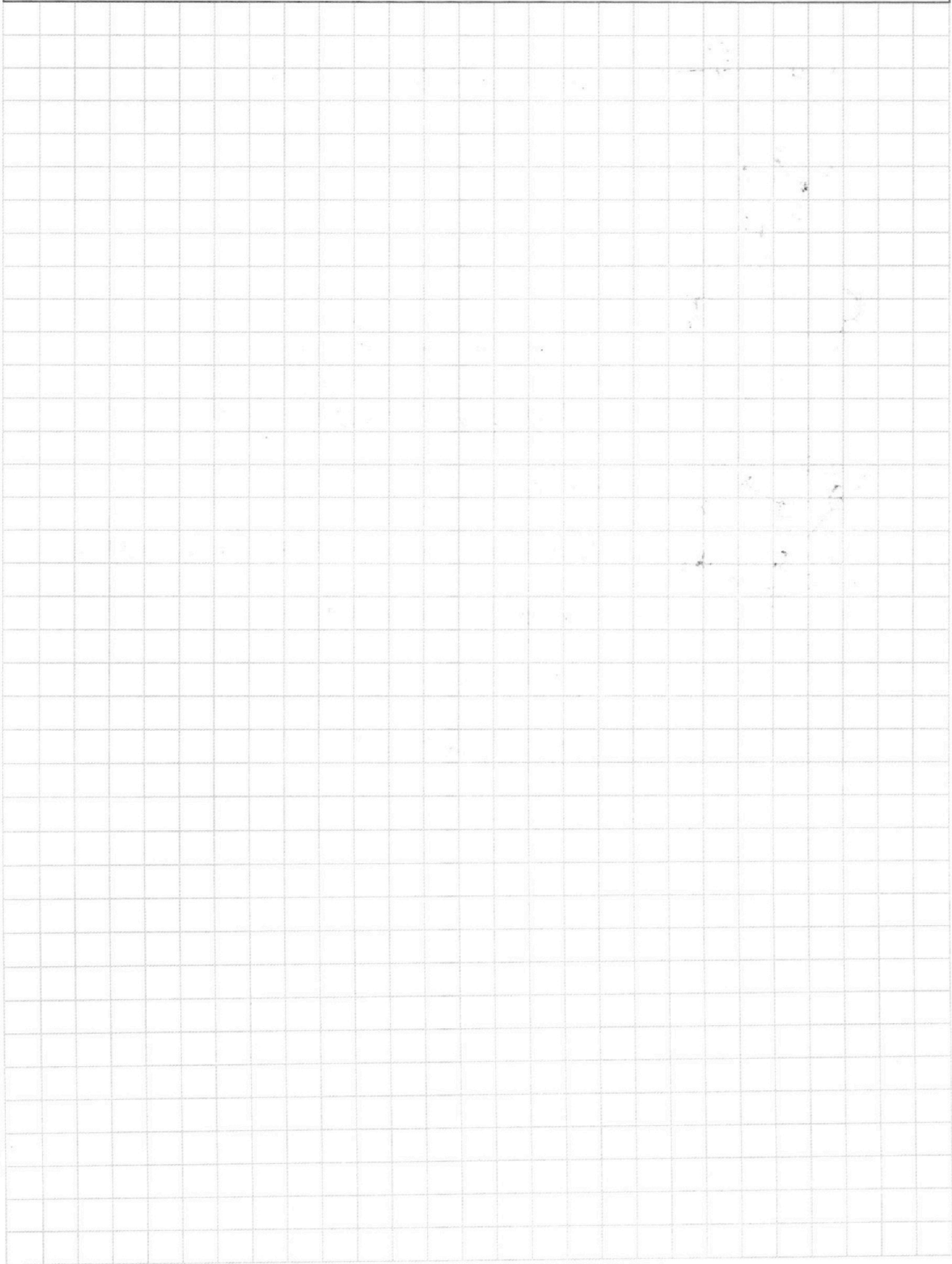
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$\frac{a}{b}$  несократима ;  $a \in \mathbb{N}$  ;  $b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab-2ab+b^2-8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-10ab}$$

$$\frac{(a+b)^2-10ab}{a+b} = a+b - \frac{10ab}{a+b} \quad \frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} =$$

$$a+b : m \quad \forall a$$

$$(a+b)^2 - 10ab : m$$

$$\frac{(a+b)^2-10ab}{a+b} = a+b - \frac{10ab}{a+b} = \frac{1}{a-8b+\frac{a^2}{a}} + \frac{1}{\frac{b^2}{a}-8a+b}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-10ab} = \frac{1}{a+b} + \left(-\frac{a+b}{10ab}\right)$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-10ab} = \frac{a+b}{(a+b-\sqrt{10ab})(a+b+\sqrt{10ab})} = \frac{a+b}{a+b-\sqrt{10ab}} + \frac{a+b}{(a+b+\sqrt{10ab})} =$$

$$= \frac{a}{(a+b)^2-10ab} + \frac{b}{(a+b)^2-10ab}$$

$$\frac{a^2}{b} = \frac{a \cdot a}{b} = \frac{a}{b} \cdot a ; \quad \frac{b^2}{a} = \frac{b \cdot b}{a} = \frac{b}{a} \cdot b$$