



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC = 1$  и  $BC = 25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже ~~велосипедиста~~. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = \sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓1:

Обозначим степень входящего числа 3 в  $a$  за  $d$ , в  $b$  за

$\beta$ , в  $c$  за  $f$ . Тогда по условию 
$$\begin{cases} d + \beta \geq 14 \\ \beta + f \geq 19 \\ d + f \geq 23 \end{cases}$$

Складывая, получаем  $2(d + \beta + f) \geq 56$ ,  $d + \beta + f \geq 28$ .

В произведении  $abc$  число 3 входит в степени  $d + \beta + f$ ,

поэтому степень входящего числа 3 в  $abc$  не меньше 28.

т.к.  $\frac{a}{7^9} c$  делится на  $3^{23} \cdot 7^{42}$ , то степень входящего 7

в  $abc$  не меньше 42. Тогда  $abc \geq 3^{28} \cdot 7^{42}$ , значит наимень-

шее ~~число abc~~ возможное значение числа  $abc$  это  $3^{28} \cdot 7^{42}$ .

Приведем пример: пусть  $a = 3^9 \cdot 7^{13}$ ,  $b = 3^5$ ,  $c = 3^{14} \cdot 7^{29}$

Тогда  $ab = 3^{14} \cdot 7^{13}$ , т.е.  $ab : 3^{14} \cdot 7^{13}$ ;  $bc = 3^{19} \cdot 7^{29}$ ,  $bc :$

$3^{19} \cdot 7^{17}$ ;  $ac = 3^{23} \cdot 7^{42}$ ,  $ac : 3^{23} \cdot 7^{42}$ ;  $abc = 3^{28} \cdot 7^{42}$

Ответ:  $3^{28} \cdot 7^{42}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{a}$ :

Т.к. числитель можно сократить на  $m$ , то  $(a+b) : m$ .

Оба Пусть  $a \equiv x^m$ , тогда  $b \equiv m-x$ ,  $x \in (0, m)$ ,  $m > 1$ .

Т.к.  $(a^2 - 9ab + b^2) : m$ , то  $a^2 - 9ab + b^2 \equiv 0$ , тогда

$$x^2 - 9 \cdot x \cdot (m-x) + (m-x)^2 \equiv 0, \text{ т.е. } x^2 - 9xm + 9x^2 + m^2 - 2xm + x^2 \equiv 0$$

$$11x^2 - 11xm + m^2 \equiv 0, \text{ значит } 11x^2 \equiv m$$

Пусть  $m > 11$ , тогда  $(x, m) > 1$ . Обозначим  $(x, m) = k \cdot \delta$ ,  $k > 1$ .

Тогда  $m = k \cdot c$ ,  $x = k \cdot d$ , значит  $a \equiv kd^k$ ,  $b \equiv kc - kd$

Но тогда  $a$  имеет вид  $kd \cdot e + kc$ , а  $b$  имеет вид  $k(c-d) \cdot f + kc$ , т.е. оба числа кратны  $k$ , что невозможно ( $k > 1$ ).

Значит  $m \in \{11\}$ . Приведем пример на  $m = 11$ :  $a = 6$ ,  $b = 5$ . Тогда:

$$\frac{11}{6^2 - 9 \cdot 6 \cdot 5 + 25} = \frac{11}{-209} = -\frac{11}{11 \cdot 19} = -\frac{1}{19}.$$

Ответ: при  $m = 11$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \quad \sqrt{3}: \quad \sqrt{3}$$

Замена: пусть  $3x^2 - 5x + 6 = U^2$ ,  $3x^2 + x + 1 = V^2$  ( $U \geq 0, V \geq 0$ )

Тогда  $\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = U$ ,  $\sqrt{3x^2 + x + 1} = V$ . Заметим, что  $5 - 6x = 3x^2 - 5x + 6 - (3x^2 + x + 1) \in \mathbb{Z}$ , т.е.  $5 - 6x = U^2 - V^2$ . Тогда:

$$U^2 - V^2 = U^2 - V^2$$

$U - V = (U - V)(U + V)$ . Разберём 2 варианта; 1)  $U \neq V$ ; 2)  $U = V$ .

1) при  $U \neq V$ :  $U + V = 1$ , т.е. 
$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1 & (*) \\ \sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = 6 - 6x \quad | :2 \\ \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1 \end{cases} \begin{cases} \sqrt{3x^2 - 5x + 6} = 3 - 3x & (1) \\ \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1 & (2) \end{cases}$$

(1): 
$$\begin{cases} 3x^2 - 5x + 6 = (3 - 3x)^2 \\ 3 - 3x \geq 0 \end{cases} \begin{cases} 3x^2 - 5x + 6 = 9 - 18x + 9x^2 \\ 3x \leq 3 \end{cases} \begin{cases} 6x^2 - 13x + 3 = 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$D = 169 - 3 \cdot 4 \cdot 6 = 97$

$$\begin{cases} x = \frac{13 + \sqrt{97}}{12} \\ x = \frac{13 - \sqrt{97}}{12} \\ x \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{13 + \sqrt{97}}{12} \\ x = \frac{13 - \sqrt{97}}{12} \end{cases}$$

Тогда, возвращаясь к системе: 
$$\begin{cases} x = \frac{13 - \sqrt{97}}{12} \\ \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{3 \cdot \left(\frac{13 - \sqrt{97}}{12}\right)^2 - 5 \cdot \frac{13 - \sqrt{97}}{12} + 6} + \sqrt{3 \cdot \left(\frac{13 - \sqrt{97}}{12}\right)^2 + \frac{13 - \sqrt{97}}{12} + 1} = 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{3}$  (просто решение):

~~$$X = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{169 - 26\sqrt{97} + 97}{144} - \frac{20(13 - \sqrt{97})}{48} + \frac{288}{48}} + \sqrt{3 \cdot \frac{169 - 26\sqrt{97} + 97}{144} + \frac{4(13 - \sqrt{97}) + 40}{48}} = 1$$~~

~~$$X = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$$~~

(2):  $\sqrt{3x^2 + x + 1} = 1 - (3 - 3x)$ ,  $\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x - 2$

$$\begin{cases} 3x^2 + x + 1 = 9x^2 - 12x + 4 \\ 3x^2 - 2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x^2 - 13x + 3 = 0 \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \quad \left\{ X = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12} \right.$$

Тогда возвращаться в систему:

$$\begin{cases} X = \frac{13 + \sqrt{97}}{12} \\ X = \frac{13 - \sqrt{97}}{12} \end{cases}$$

система не имеет решений.

2) при  $U \geq V$ : тогда  $\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 5x + 6} = \sqrt{3x^2 + x + 1} \\ 5 - 6x = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x^2 - 5x + 6 = 3x^2 + x + 1 \\ 3x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ 6x = 5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 6x = 5 \\ 3x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ 6x = 5 \end{cases} \quad \left\{ X = \frac{5}{6} \right.$$

(3): при  $x = \frac{5}{6}$ :  $3 \cdot \frac{25}{36} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6 \geq 0$ , что верно, значит  $x = \frac{5}{6}$  подходит.

Ответ:  $x = \frac{5}{6}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7  
                 

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{5}$ :

$$y = 5x - 3z, y^2 = (5x - 3z)^2 = 25x^2 - 30xz + 9z^2$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \quad | \cdot xyz, \quad 8yz + xz = 15xy$$

$$xz = 15xy - 8yz.$$

$$30xz = 450xy - 240yz$$

$$y^2 =$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



№6 (пробор ✗ еще)!

$$10V_m t_m - 154t_m + 3V_m - 126 = 0 \quad (1)$$

$$u_3(2): V_m t_m = (49 - V_m)t_m + V_B 49 - V_m$$

$$V_m t_m = 49t_m - V_m t_m + V_B, \quad \underline{2V_m t_m = 49t_m - V_m + 49}, \quad (*)$$

(\*)  $\rightarrow$  (1):

$$245t_m - 5V_m + 245 - 154t_m + 3V_m - 126 = 0.$$

$$91t_m - 2V_m + 119 = 0, \quad 2V_m = 91t_m + 119$$

$$3V_m = \frac{273t_m + 357}{2} \quad (**) \quad 10V_m = 455t_m + 595 \quad (4)$$

$$(** \rightarrow **) 10V_m t_m = 154t_m - 3V_m + 126$$

$$10V_m t_m \cdot \frac{1}{2} (455t_m + 595)t_m = 154t_m - \frac{273t_m + 357}{2} + 126 \quad | \cdot 2$$

$$2t_m (455t_m + 595) = 308t_m - 273t_m + 357 + 252$$

$$910t_m^2 + 1190t_m = 308t_m - 273t_m + 357 + 252$$

$$910t_m^2 - 1155t_m + 105 = 0 \quad | :5$$

$$182t_m^2 - 231t_m + 21 = 0. \quad D = 53009 = 15288^2 + 47721$$

Решая уравн., получаем  $t_m$ , а ное подставляем в (4)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6:

Пусть  $V_m$  (км/ч) — скорость мотоциклиста,  $V_m > 0$

$V_B$  (км/ч) — скорость велосипедиста,  $V_B > 0$ .

$t_m$  (ч) — время, за которое мотоциклист проехал путь AB.

Тогда время, за которое велосипедист проехал AB равно  $t_m + 1$ .

Поскольку расстояние AB одинаково для обоих участников,

то  $V_m t_m = V_B (t_m + 1)$ . Также  $V_B t_m = V_m (t_m + 1) - 49$ .

Из последнего уравнения:  $\frac{V_m t_m}{V_m + 7} = \frac{V_B t_m}{V_B + 7} = \frac{3}{5}$

( $V_m t_m$  — расстояние от А до В).

$$\begin{cases} V_m t_m = V_B t_m + V_B \\ V_B t_m = V_m t_m + V_m - 49 \\ \frac{V_m t_m}{V_m + 7} = \frac{V_B t_m}{V_B + 7} = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_m t_m = V_B t_m + V_B \\ V_m t_m = V_B t_m + V_m + 49 \\ \frac{V_m t_m}{V_m + 7} = \frac{V_B t_m}{V_B + 7} = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_B = 49 - V_m \\ V_m t_m = V_B t_m + V_B \\ \frac{V_m t_m}{V_m + 7} = \frac{V_B t_m}{V_B + 7} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$V_B = 49 - V_m$$

$$V_m t_m = V_B t_m + V_B \quad (2)$$

$$V_m t_m (V_B + 7) = 5(V_m + 7) V_m t_m - 3(V_m + 7)(V_B + 7) \quad (3)$$

$$\text{из (3): } 5V_m t_m (42 - V_m) = 5(V_m + 7) V_m t_m - 3(V_m + 7)(42 - V_m)$$

$$210V_m t_m - 5V_m^2 t_m = 5V_m^2 t_m + 35V_m t_m - 126V_m + 3V_m^2 - 882 + 21V_m$$

$$10V_m^2 t_m - 154V_m t_m + 3V_m^2 - 126V_m = 0 \quad | : V_m > 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 - 6x = u - v$$

$$u - v = u - v$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1$$

$$\left(\frac{13 - \sqrt{97}}{12}\right)^2 = \frac{169 - 26\sqrt{97} + 97}{144}$$

$$\sqrt{\frac{169 - 26\sqrt{97} + 97 - 260 + 20\sqrt{97} + 288}{48}} + \sqrt{\frac{169 - 26\sqrt{97} + 97 + 52 - 4\sqrt{97} + 48}{48}}$$

$$\sqrt{\frac{-6\sqrt{97} + 294}{48}} + \sqrt{\frac{-30\sqrt{97} + 366}{48}} = \sqrt{\frac{-\sqrt{97} + 49}{8}} + \sqrt{\frac{-5\sqrt{97} + 61}{8}} = 1$$

$$3x \geq 2 \\ x \geq \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{\frac{-20 + 49}{8}} + \sqrt{\frac{-50 + 61}{8}}$$

5+

$$3 - 3x + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1, \sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x - 2$$

$$3x^2 + x + 1 = 9x^2 - 12x + 4, 6x^2 - 13x + 3$$

$$\frac{13 - \sqrt{97}}{12} \neq \frac{8}{12}, 13 - \sqrt{97} > 8$$

$$13 - \sqrt{97} \vee 8, \sqrt{97} \vee 5$$

$$\frac{75}{36} - \frac{25}{6} + 6 \geq \frac{75}{36} - \frac{150}{36} + 216$$

$$\frac{y^2 + 2y}{z - (6x + 5) \cdot z} = \frac{y^2 + 2y}{z - (5x + 4)(6 - x)} = \frac{y^2 + 2y}{z - 2 - 5x - 6x^2 + 4x}$$

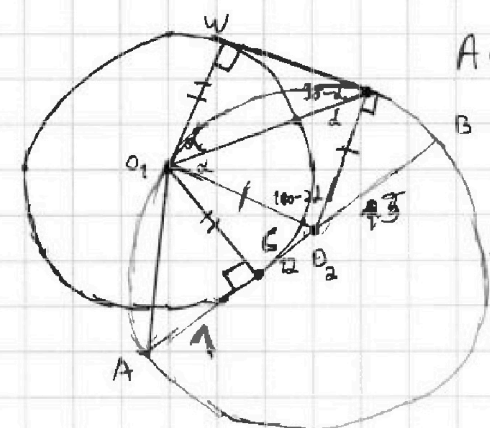
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

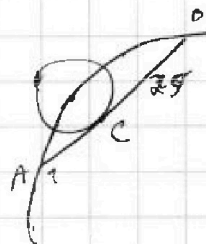


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 1, BC = 25$$

$$AO_2 = BO_2 = 13$$



$$8y \cdot z + xz = 15xy$$

$$z \cdot 8x + 1 \cdot \frac{z}{15} = \frac{y}{1} + \frac{x}{8}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 3^{14} \cdot 7^{13}$      $bc: 3^{19} \cdot 7^{17}$      $ac: 3^{23} \cdot 7^{42}$      $\min(abc) \rightarrow$   
 $3^{23} \cdot 7^{42} : b=3^{23} \cdot 7^{42} \quad c=1 \quad b=1 \quad c=3^{19} \cdot 7^{17} \quad a=3^{14} \cdot 7^{13} \cdot 7^{294}$   
 $3^{33} \cdot 7^{42} : b=1 \quad c=3^{19} \cdot 7^{17} \quad a=3^{14} \cdot 7^{25} \quad \checkmark$   
 $a=3^d \dots U^2 \quad (3x-3)^2 = 9x^2 - 2 \cdot 3x + 9$   
 $b=3^{14-d} \dots \quad abc = 3^{d+14-d+23-d} = 3^{27-d} \dots$   
 $c=3^{23-d} \dots \quad 169 - 2a = 97 \quad 3^{37-d} \quad d=9 \quad 3^{28}$   
 $3^{14-d} \cdot 3^{23-d} \geq 3^{19} \quad 3^{21} \cdot 7^{42} \quad 3^{d+18-d+40-d} = 3^{58-d}$

$\frac{360}{6} = \frac{60}{3} \quad 37-2d \geq 3^{19}, \quad 37-2d \geq 19, \quad 18 \geq 2d, \quad \boxed{9 \geq d}$

$a = 3^9 \cdot 7^{13} \quad b = 3^5 \quad c = 3^{14} \cdot 7^{29}$

$a = 3^d \quad b = 3^\beta \quad c = 3^f$   
 $(a, b) = 1$   
 $d + \beta + f = ?$   
 $\begin{cases} d + \beta \geq 14 \\ \beta + f \geq 19 \\ d + f \geq 23 \end{cases}$   
 $2(d + \beta + f) \geq 56, \quad d + \beta + f \geq 28$   
 $(a \star b) : m$   
 $a \equiv x, \quad b \equiv$

$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}$   
 $\parallel$   
 $\frac{a+b}{(a \star b)^2 - 11ab}$   
 $\max(m), (a+b) : m, (a^2 - 9ab + b^2) : m$   
 $(a+b) \mid m \quad m \in \mathbb{N}$   
 $a \equiv x \quad (x \in \{0, n\})$   
 $b \equiv m - x$

$\frac{3+5}{9-9 \cdot 3 \cdot 5 + 25} = \frac{8}{-101}$   
 $\parallel$   
 $\frac{135}{-101}$

$x^2 - 9 \cdot x \cdot (m-x) + (m-x)^2$   
 $\parallel$   
 $x^2 - 9xm + 9x^2 + m^2 - 2xm + x^2$   
 $\parallel$   
 $11x^2 - 11xm + m^2 \equiv 0$

$11x^2 : m$   
 $\max(n) = 11$   
 $\boxed{11x^2 \equiv 0}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$1+999$   $m = 81k$ ,  $x = 10b$ ,  $v + x + x^2$   
 $11x^2 : m, (a, b) = 1$   
 $81(x^2 - 5) - 9 + x^5 - x^6$   
 $a \equiv 9, b \equiv 72$   $\eta = 9 + x^5 - x^6$   
 $\eta = x^9 - 5$

①  $(m, 11) = 1, x^2 : m$   $x = 2 \cdot 3^2 \cdot 5, m = 2^2 \cdot 3^3$   
 $a \equiv 6, b \equiv$   $x = xu, m = kx$

$a \equiv kx, b \equiv kx - x$   
 $a = (kx \cdot 5 + x), b = (kx \cdot 4 + kx - x)$ ,  $(a, b) = x, a : x, b : x$   
 $5 + x^9 - x^6 - 9 + x^5 - x^6$

$x = 1, k = m, a \equiv 1, b \equiv m - 1$ ,  $a \equiv 1, m \equiv 20, b \equiv 39$   
 $1 \equiv 1, 39 \equiv 19$

$m \geq 1, a = m \cdot t + 1, b = m \cdot l + m - 1, a + b = m \cdot t + m \cdot l + m, (a, b) : m$

②  $(m, 11) > 1, 11x^2 : m, m = 11 \cdot 2^2 \cdot 3^3, x = 2^4 \cdot 3$   
 $m \geq 11, b \equiv x, a \equiv 6, b \equiv 1102$   
 $27-4, 11, 108, 11, 708, 108, 1108$

$x | m : x, (m, 11) = y, u = \frac{m}{y}, x^2 : u, u > 1, u \in \mathbb{N}$

$u | x, u = kx, 4x = 5$

$a \equiv x, b \equiv 3x^2 - 5x + 6 = 3x^2 + x + 1, a = 6c + 1102, b = 1102d + 1102$

если  $m > 11$ , то  $(m, x) > 1, (m, x) = k, x = k \cdot c, m = k \cdot d$

$a \equiv kc, b \equiv k \cdot d - k \cdot c$

$a = kc \cdot \dots + k \cdot d, b = k(d - c) \cdot \dots + kd, (a, b) \geq k$

$m = 11, 9c \cdot 6, 5: \frac{11}{36 - 9 \cdot 6 \cdot 5 + 25} = \frac{11}{119}$

$v - x - 2x^2 - 9 + x^5 - x^6 = x^9 - 5$   $\eta = 9 + x^5 - x^6$   
 $\eta = x^9 - 5$



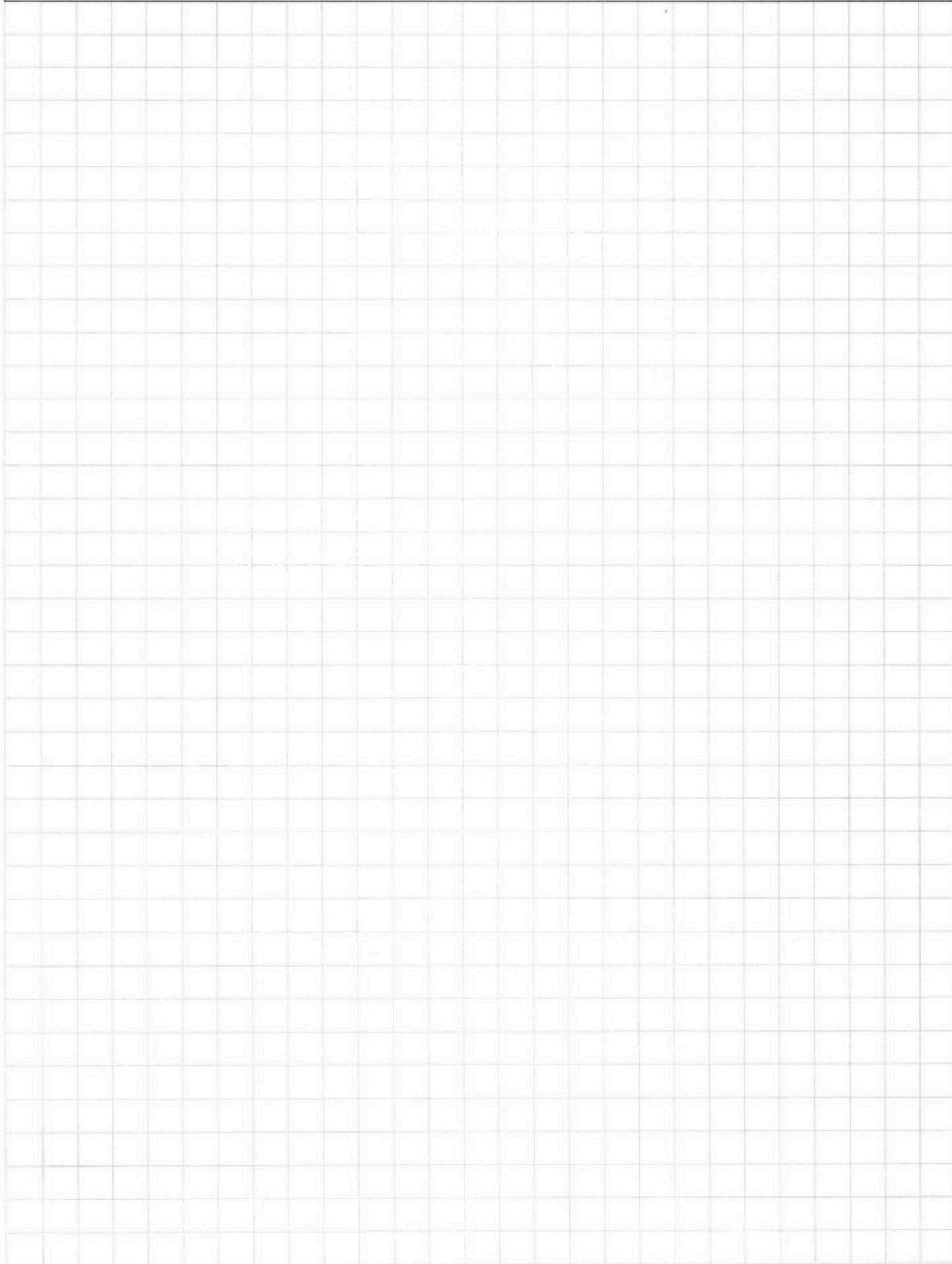
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$V_M, V_B.$

$S = V_M t_M = V_B(t_M + 1)$

$t_M. \quad t_B = t_M + 1$

$V_M t_M = V_B(t_M + 1)$

$V_B t_M + 49 = V_M(t_M + 1)$

$V_M \left( \frac{V_M t_M}{V_M + 7} + \frac{3}{5} \right) = \frac{V_M t_M}{V_B + 7} \quad | \cdot 5(V_M + 7)(V_B + 7)$

$V_M t_M = V_B(t_M + 1)$   
 $V_B t_M + 49 = V_M(t_M + 1) \rightarrow V_M t_M + V_M$

$5(V_B + 7)(V_M t_M + 3(V_M + 7)(V_B + 7)) = 5 V_M t_M (V_M + 7)$   
 $5(V_B + 7) V_M t_M$

$V_B t_M + V_B = V_M t_M + 49 - V_M$

$V_B + V_M = 49$

$5(42 - V_M) V_M t_M + 3(V_M + 7)(42 - V_M)$   
 $11$   
 $5 V_M t_M (V_M + 7)$

$V_B t_M + V_B - V_M t_M - V_M + 49 = 0$

$V_B + V_M =$

$V_M t_M = (49 - V_M) t_M - V_M + 49$

$V_M t_M = 49 t_M - V_M t_M - V_M + 49$

$2 V_M t_M = 49 t_M - V_M + 49$

$V_M t_M = (49 - V_M) t_M + V_B$

$V_M t_M = 49 t_M - V_M t_M + V_B$

$2 V_M t_M = 49 t_M + V_B$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 42 \\ \hline 84 \\ 84 \\ \hline 882 \end{array}$$

$91.3 = 273$

$$\begin{array}{r} 1155 \ 5 \\ - 10 \ 15 \\ \hline 15 \ 75 \end{array}$$

$119.3 = 357$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 119 \\ \hline 596 \end{array}$$

$$\frac{49}{t}$$

$$\begin{array}{r} 910 \ 5 \\ - 5 \ 41 \\ \hline 40 \ 20 \end{array}$$

$56$   
 $-210 + 35 + 21$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 154 \\ \times 119 \\ \hline 154 \\ 154 \\ \hline 1782 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$8yz + xz = 15xy, \quad xz = 15xy - 8yz, \quad 15xz = 225xy - 120yz$$

$$\frac{3z(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{15xz + 3yz - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{225xy - 120yz - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$y = 5x - 3z, \quad y^2 = 25x^2 - 30xz + 9z^2$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25x^2 - 25x^2 + 30xz - 9z^2 - z^2}{25x^2 - 30xz + 9z^2 + 3z^2} = \frac{30xz - 10z^2}{25x^2 - 30xz + 12z^2}$$

$$\frac{10z(3x - z)}{(5x - 3z)^2 + 3z^2}$$

$$\frac{10z(3x - z)}{(5x - 3z)^2 + 3z^2}$$

$$\begin{array}{r} 211 \\ \times 253 \\ \hline 1253 \\ 759 \\ \hline 1265 \\ 506 \\ \hline 63009 \\ -15288 \\ \hline 47721 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ \times 182 \\ \hline 84 \\ 728 \\ \hline 1456 \\ 15288 \end{array}$$

$$800 \rightarrow 640000$$

*or*

$$120 \rightarrow 14400$$

$$\begin{array}{r} 23 \rightarrow \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 21 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 181 \\ \times 219 \\ \hline 1971 \\ 219 \\ \hline 438 \\ 47981 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 211 \\ \times 211 \\ \hline 211 \\ 211 \\ \hline 422 \\ 44521 \end{array}$$