



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{11}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $3^{18}7^{16}$ ,  $ac$  делится на  $3^{21}7^{38}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=16$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения  $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .
7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX=2\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD:DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.  $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} ab \equiv 0 \pmod{9 \cdot 7^{11}} \\ bc \equiv 0 \pmod{3^8 \cdot 7^{16}} \\ ac \equiv 0 \pmod{3^{21} \cdot 7^{38}} \\ abc \text{ min. ?} \end{cases}$$

1. Чтобы произведение  $a, b, c$  было минимальным, то сначала рассмотрим это

$$\begin{cases} ab = 3^{11} \cdot 7^{11} \\ bc = 3^8 \cdot 7^{16} \\ ac = 3^{21} \cdot 7^{38} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3^n \cdot 7^m \\ b = 3^{11-n} \cdot 7^{11-m} \\ c = 3^{8-11+n} \cdot 7^{16-11+m} = 3^{n-3} \cdot 7^{5+m} \\ n, m \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} n + 2m = 21 \\ m + 5 + m = 38 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n = 14 \\ 2m = 33 \\ n, m \in \mathbb{N} \\ a = 3^n \cdot 7^m \\ b = 3^{11-n} \cdot 7^{11-m} \\ c = 3^{n-3} \cdot 7^{5+m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 7 \\ m = 11,5 \\ n, m \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ не подходит.}$$

2. Пусть  $ab = k \cdot 3^{11} \cdot 7^{11}$ , где  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{cases} a = 3^n \cdot 7^m \\ b = 3^{11-n} \cdot 7^{11-m} \\ c = 3^{n-3} \cdot 7^{5+m} \end{cases}$$

Т.к.  $m$  получившееся не целое, то лучше взять такое

число  $k \in \mathbb{N}$ , чтобы  $m \in \mathbb{N} \Rightarrow k = 7^m$  - минимальное возможное число  $k$ , чтобы выполнялось  $ab = 3^{11} \cdot 7^{11} \cdot k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3^n \cdot 7^m \cdot k \cdot 7^m \\ b = 3^{11-n} \cdot 7^{11-m} \\ c = 3^{n-3} \cdot 7^{5+m} \\ n, m \in \mathbb{N} \\ ac = 3^n \cdot 7^m \cdot 7^m \cdot 3^{n-3} \cdot 7^{5+m} = 3^{2n-3} \cdot 7^{2m+5} = 3^{21} \cdot 7^{38} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n + 7 = 21 \\ 3m + 5 = 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n = 14 \\ 3m = 33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 7 \\ m = 11 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3^7 \cdot 7^{11} \cdot 7^{11} \\ b = 3^4 \cdot 7^0 \\ c = 3^0 \cdot 7^{16} \end{cases} \Rightarrow a \cdot b \cdot c = 3^7 \cdot 7^{22} \cdot 3^4 \cdot 7^{16} = 3^{11} \cdot 7^{38} = 3^{25} \cdot 7^{38}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} \quad (A)$$

$$\frac{a}{b} - \text{числа/степени}$$

$a, b \in \mathbb{N}$

~~8/2~~

$$\begin{cases} a+b \equiv 0 \pmod{m} \\ a^2-2ab+b^2 \equiv 0 \pmod{m} \\ a \not\equiv b \pmod{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+2ab+b^2-2ab-2ab \equiv 0 \pmod{m} \\ a+b \equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b)^2 - 4ab \equiv 0 \pmod{m} \\ a+b \equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4ab \equiv 0 \pmod{m} \\ a+b \equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4ab \equiv 0 \pmod{m} \\ a \equiv -b \pmod{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot (-b) \cdot (-b) \equiv 0 \pmod{m} \\ a \equiv -b \pmod{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4b^2 \equiv 0 \pmod{m} \\ a \equiv -b \pmod{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b^2 \equiv 0 \pmod{m} \\ a \equiv b \pmod{m} \end{cases}$$

$$b^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$b$	1	0	$m-a$	$m-0$
$b^2$	1	0	$(m-a)^2$	$m^2-0$
$10b^2$	10	0	$(m-1)a$	0
$-b$	-1	0	$1-m$	0
$a$	-1	0	$1-m$	0

$$\frac{a+b}{10b^2} \equiv \frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} \pmod{m}$$

$$\begin{aligned} a+b &\equiv 10b^2 \pmod{m} \\ a &\equiv 10b^2 - b \pmod{m} \\ a &\equiv b(10b-1) \pmod{m} \end{aligned}$$

~~$\Rightarrow a \equiv b(10b-1)$~~

$$b(10b-1) \equiv b$$

$$\Rightarrow \frac{9b+b}{8b^2-2b^2+b^2} = \frac{10b}{10b} = 1$$

$$\begin{aligned} b &\equiv \frac{m}{10} \pmod{m} \\ b &\equiv \frac{m}{10b} \pmod{m} \\ \Downarrow \\ a + \frac{m}{10b} &\equiv 0 \pmod{m} \\ 10ab + m &\equiv 0 \pmod{m} \\ 10ab &\equiv m \pmod{m} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4b^2 \equiv 0 \pmod{m} \\ a \equiv -b \pmod{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b^2 \equiv m \pmod{m} \\ a+b \equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} \equiv \frac{a+b}{10b^2} \pmod{m}$$

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} \equiv \frac{a+b}{10b^2} \pmod{m}$$

~~$k \in \mathbb{N}$~~

$$a^2-2ab+b^2 = 10b^2 \cdot k$$

$$\begin{aligned} m | a^2-2ab-9b^2 &\neq 0 \\ m | (a^2+ab-9ab-9b^2) &= 0 \\ m | (a(a+b)-9b(a+b)) &= 0 \\ m | (a-b)(a-9b) &= 0 \\ \begin{cases} a-b \equiv 0 \\ a-9b \equiv 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a=b \\ a=9b \end{cases} \end{aligned}$$

~~$\Gamma \cdot 4 \cdot a, b \in \mathbb{N}$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 10b^2 \equiv 0 \pmod{m} \\ a \equiv -b \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow \frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} \equiv \frac{a+b}{10b^2} \pmod{m}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \equiv 10b^2 \pmod{m}$$

$$a^2 + ab - 9ab - 9b^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a(a+b) - 8a(b) = 0 \pmod{m}$$

$$(a+b)(a-9b) \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{(a+b)(a-9b)} \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\frac{1}{a-9b} \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\frac{1}{a-9b} \equiv 1 \pmod{m}$$

$$a-9b \equiv 1 \pmod{m}$$

$$a-9b \equiv 1 \pmod{m}$$

Если  $m = 1, m \equiv$

Если  $m = 2, m \equiv$

$$a-9b \equiv 1 \pmod{m}$$

$$a-9b \equiv 1 \pmod{m}$$

$$\text{Если } m = 7, m \equiv \frac{1}{a-9b} \equiv 2 \pmod{m}$$

$$\text{Если } m = 10, m \equiv \frac{1}{a-9b} \equiv 10 \pmod{10}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)(a-9b)} = \frac{1}{a-9b} \quad \begin{matrix} \text{применено} \\ \text{сокращение} \end{matrix}$$

при  $m = a+b$ , где  $b$  можно сократить на  $(a+b)$

$$\underline{\text{Ответ:}} \quad m = a+b$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \sqrt{2x^2+3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

$$\sqrt{2x^2+3x+4 - (1-4x+4x)} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

$$\sqrt{2x^2+x+3+1-4x} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

1) Замена  $t = 2x^2+x+3$ ,  $m = 1-4x$   
 $t \geq 0$

$$\sqrt{t+m} - \sqrt{t} = m$$

$$\sqrt{t+m} - \sqrt{t} = m \quad | \cdot \sqrt{t+m} + \sqrt{t}$$

Если  $m < 0$ , то  $\sqrt{t+m} - \sqrt{t} < 0$   
 Если  $m > 0$ , то  $\sqrt{t+m} - \sqrt{t} > 0$   $\Rightarrow$  можно возводить в квадрат без опаски  
 Если  $m = 0$ , то  $\sqrt{t} - \sqrt{t} = 0$   $\Rightarrow$   $m = 0$

при  $m = 0$ ,  $1-4x = 0$   $x = \frac{1}{4}$ , но  $\sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{3}{4} + 4} - \sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 3} = 1 - 1$   
 $1-4x = 0$   
 $x = \frac{1}{4}$   
 $\sqrt{\frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 4} - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 3} = 0$   
 $\sqrt{\frac{3}{8} - \frac{6}{8} + 4} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + 3}$   
 $\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{3}{8}}$   $\Rightarrow$   $x = \frac{1}{4}$

Если  $m \neq 0$ , то  $(\sqrt{t+m} - \sqrt{t+m} \cdot \sqrt{t} + \sqrt{t}) = m^2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

$$t+m - 2\sqrt{t^2+tm} + t - m^2 = 0$$

$$-m^2 + 2t + m - 2\sqrt{t^2+tm} = 0$$

$$-m^2 + 2t + m = 2\sqrt{t^2+tm}$$

Обратная замена

$$-(1-4x)^2 + 2(2x^2+x+3) + (1-4x) = 2\sqrt{(2x^2+x+3)^2 + (2x^2+x+3)(1-4x)}$$

$$-1 + 8x - 16x^2 + 4x^2 + 2(2x^2+x+3) + 1 - 4x = 2\sqrt{4x^4 + x^4 + 9 + 4x^3 + 12x^2 + 6x + 2x^2 + 1x + 3 - 8x^3 - 4x^2 - 12x}$$

$$= 2\sqrt{4x^4 + x^4 + 9 + 4x^3 + 12x^2 + 6x + 2x^2 + 1x + 3 - 8x^3 - 4x^2 - 12x}$$

$$-10x^2 + 6x - 16 = 2\sqrt{4x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 9x + 12}$$

$$-6x^2 + 3x + 3 = 2\sqrt{4x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 9x + 12}$$

Ответ:  $x = \frac{1}{4}$

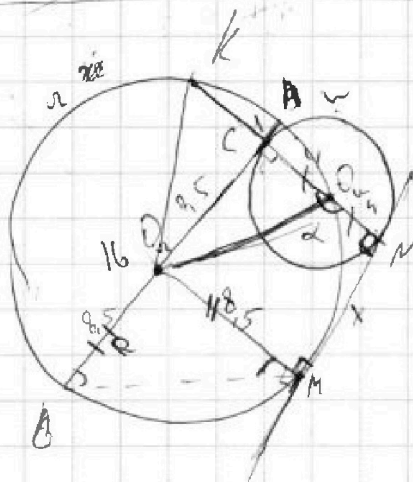
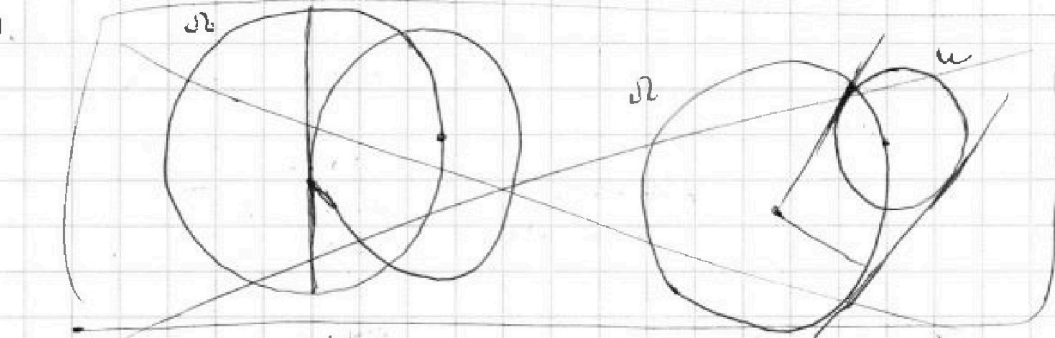
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$KL = 16$   
 $AL = 1$   
 $MM \perp \Omega$

$\omega(O_1, R_1)$   
 $\Omega(O_2, R_2)$

$$1) R_{\Omega} = \frac{KL + AB}{2} = \frac{16 + 1}{2} = 8,5$$

$$2) CO_1 = R_{\Omega} - AL = 7,5$$

2)  $AB$  касательна к  $\Omega$  и  $\omega$  (по условию)  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow O_1L \perp AB$  (по свойству касательной)

3)  $MM \perp$  касательная к  $\omega$  и  $\Omega$

4) Аналогично п. 2.  $MM \perp O_1M$ ,  $MM \perp O_2M$

5) Внешние  $\omega$  и  $\Omega$  продолжением отрезка  $O_1O_2$  по пересечению в  $\Omega$  в  $K$

6)  $D_{\Omega}$ .  $O_2K$  и  $O_1M$  - радиусы  $\omega$  и  $\Omega$   $\Rightarrow O_2K = O_1M$  (по отн. отп.)

7)  $O_2K = O_1M$  (из п. 6)  $\Rightarrow \triangle O_2K O_1 - \text{р/б}$

8)  $\triangle O_2K O_1 - \text{р/б}$  (из п. 7)  $\Rightarrow O_2L$  - высота, медиана и биссектриса  $\triangle O_2K O_1$  (по свойству р/б)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow 9) KL = LO_1$  (т.к.  $O_2L$  - медиана)

10)  $KL \cdot CA = KL \cdot LO_1$  (по свойству касательных к окружности)  
 $16 \cdot 1 = LO_1^2 \Rightarrow LO_1 = 4 \Rightarrow R_{\Omega} = 4$

11)  $MM$  - касательная к  $\omega$  и  $\Omega$ .  $MM \perp O_1M$  и  $MM \perp O_2M$  (по свойству касательной)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

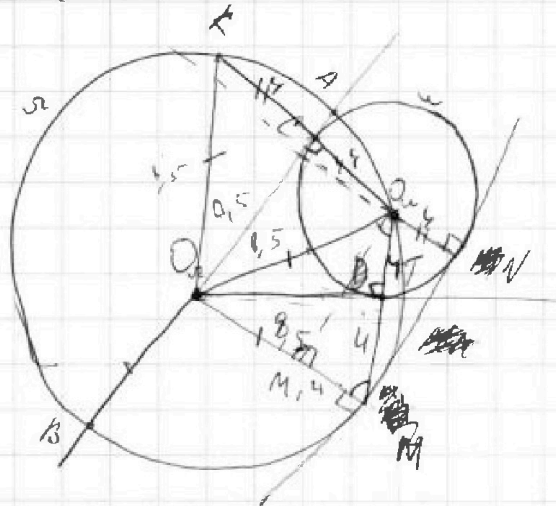
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AM^2 =$



$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

1) Проведем из  $O$  касательную к сф. в точке  $F$

2)  $O_n T$  - радиус  $\perp$   $\Rightarrow O_n T = 0$

3)  $O_n T \perp O_n T$  по свойству касательной

4)  $O_n M_1 = 4$  аналогично п. 5-6

5)  $NM_1 = \sqrt{O_n M_1^2 + O_n N^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$

1)  $O_n M_1 = NM$  - перпендикуляр  $NM$  к  $R_n$  в точке  $M_1$

1)  $O_n M_1 \perp NM$  (из п. 1)

2)  $O_n M_1 \parallel NM$  (из п. 1)  
 $O_n N \parallel O_n M$  (по свойству двух радиусов кривизны в пр. и лев. полушарии)  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow O_n M M_1$  - параллелограмм  $\Rightarrow O_n M_1 = NM$  (по свойству параллелограмма)  
 $O_n N = M_1 M$  и кр. радиусы

3)  $O_n M_1 = O_n M - M_1 M = 8,5 - 4 = 4,5$

4)  $NM \parallel O_n M_1$  (из п. 1)  
 $NM \perp O_n M$  (по свойству касательной)  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow O_n M_1 \perp O_n M$  (по свойству двух радиусов кривизны в пр. и лев. полушарии)

5) по теореме Пифагора  
 $O_n M_1 = \sqrt{O_n O_n^2 - O_n M_1^2} = \sqrt{R_n^2 - O_n M_1^2} =$   
 $= \sqrt{8,5^2 - 4,5^2} = \sqrt{(8,5-4,5)(8,5+4,5)} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13}$  (из п. 2)  
Ответ:  $NM = 2\sqrt{13}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x, y, z$  - действительные числа,  $x, y, z \neq 0$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 z^2}{x^2 + 6y^2} \quad (A)$$

$$3x + 2y = z$$

$$\frac{3x}{x+y} = \frac{z}{z} \Rightarrow z = \frac{z}{\frac{3x}{x+y}} = \frac{z(x+y)}{3x}$$

$$3x + 2y = \frac{z(x+y)}{3x}$$

$$3x(3x + 2y) + 2y(3x + 2y) - z(x+y) = 0$$

$$3x + 2y \neq 0$$

$$3xy + 3x^2 + 6y^2 + 2yx - z(x+y) = 0$$

$$x^2 + 3y^2 + 3xy = 0$$

$$x^2 + xy + 2xy + 2y^2 = 0$$

$$x(x+y) + 2y(x+y) = 0$$

$$\begin{cases} x \neq -y \\ x \neq -2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -y & (A) \\ x = -2y & (B) \end{cases}$$

$$(A) \quad z = \frac{2 \cdot (-y)y}{3y - y} = \frac{-2y^2}{2y} = -y$$

$$(B) \quad z = \frac{2(1-2y) \cdot y}{3y - 2y} = \frac{-4y^2}{y} = -4y$$

1) (A)  $\rightarrow$  (A)

$$\frac{3(-y)^2 - 4y^2 - (-y)^2}{x(-y)^2 + 6y^2} = \frac{3y^2 - 4y^2 - y^2}{y^2 + 6y^2} = \frac{-2y^2}{7y^2} = -\frac{2}{7}$$

2) (B)  $\rightarrow$  (B)

$$\frac{3(-2y)^2 - 4y^2 - (-4y)^2}{4y^2 + 6y^2} = \frac{3 \cdot 4y^2 - 4y^2 - 16y^2}{10y^2} = \frac{-4y^2}{10y^2} = -\frac{2}{5}$$

3)  $\frac{1}{2}$  н.д. и т.д.

(A) max  $\in [1, 2]$

Ответ:  $\frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



$$48 = y$$

$$t_1 x + t_2 x = t_1 y$$

$$t_1 (x-y) + t_2 x = 0$$

$$t_1 x = \frac{t_2 x}{x-y}$$

$$t_1 = \frac{t_2}{y-x}$$

$$t_1 = \frac{2(48-y)}{y-48+y}$$

$$t_1 = \frac{96-2y}{2y-48}$$

$$t_1 = \frac{2(48-y)}{2(y-24)}$$

~~$$\frac{2(48-y)}{2(y-24)} \cdot \frac{2(24-y)}{2(y+6)} = \frac{5}{4}$$~~

~~$$\frac{(48-y) \cdot 24}{(y-24)(y+6)} = \frac{5}{4}$$~~

~~$$\frac{(48-y) \cdot 24}{(y-24)(y+6)(54-y)} = \frac{5}{4}$$~~

~~$$\frac{-24(48-y)}{(y+6)(54-y)} = \frac{5}{4} = 0$$~~

~~$$\frac{-8y(48-y) - 5(y+6)(54-y)}{(y+6)(54-y)} = 0$$~~

~~$$-384y + 8y^2 - 5(y^2 + 6y + 54y + 324) = 0$$~~

~~$$-384y + 8y^2 + 5y^2 - 48 \cdot 5y - 324 \cdot 5 = 0$$~~

~~$$13y^2 - 624y - 1620 = 0$$~~

$$D = 389376 + 52 \cdot 1620 = 389376 + 84240 = 473616$$

$$y = \frac{624 \pm \sqrt{473616}}{26} = \frac{624 \pm 2176}{26}$$

$$y = \frac{912 \pm 8\sqrt{13156}}{13} = \frac{912 \pm 6\sqrt{3289}}{13}$$

$$\rightarrow y = \frac{317 + 8\sqrt{3289}}{13}$$

$$t_1 = \frac{317 - 8\sqrt{3289}}{13} < 0$$

$$A_3 = \left( \frac{48-y}{y-24} \cdot \frac{317 + 6\sqrt{3289}}{13} \right)$$

Ответ:  $\frac{48-y}{y-24} \cdot \frac{317 + 6\sqrt{3289}}{13}$

240  
 + 240  
 + 384  
 824  
 624  
 + 624  
 2496  
 4248  
 3244  
 379326  
 1620  
 x 52  
 324  
 876  
 24240

~~132876  
 24240  
 30816  
 1388376  
 84240  
 473616~~

473616 / 12  
 39468 / 2  
 19734

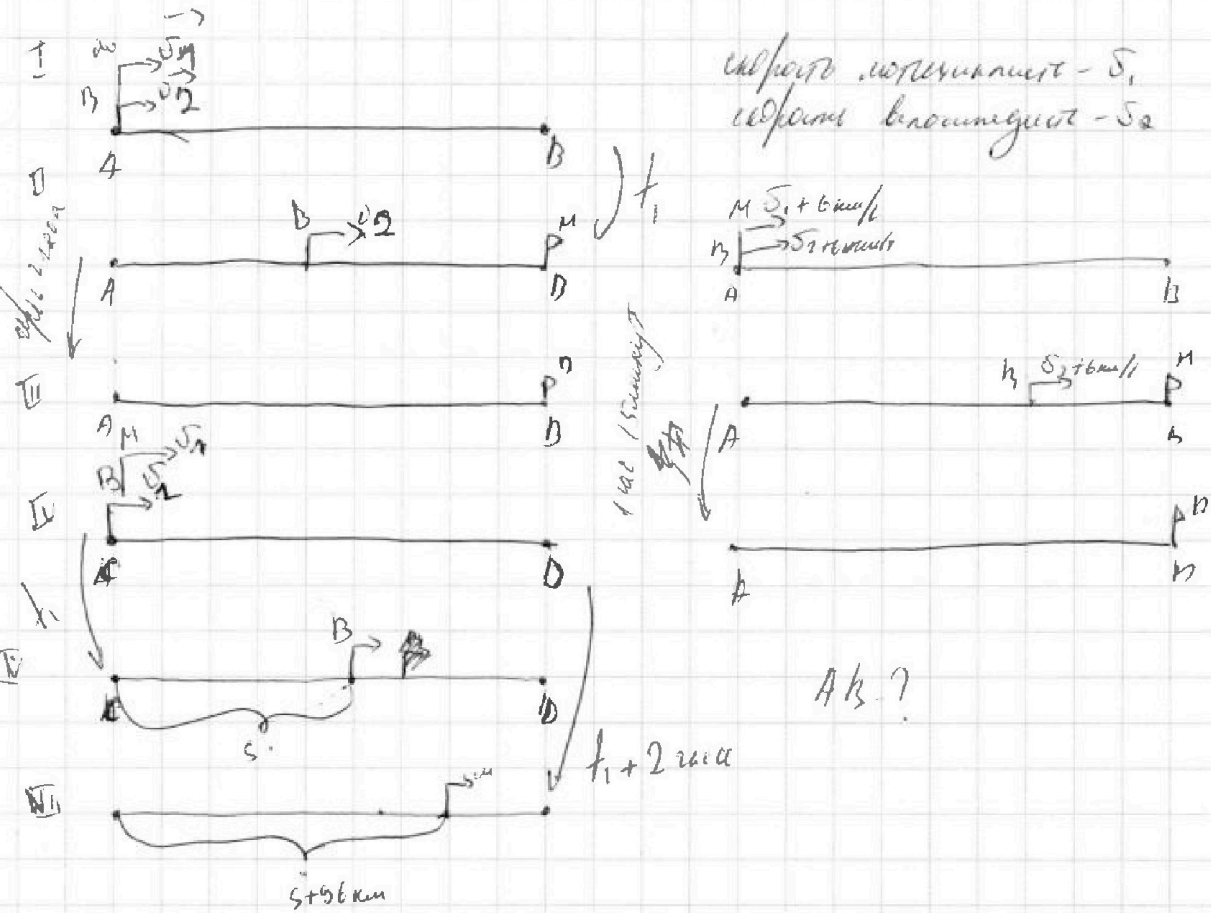
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $x$  - скорость велосипедиста,  $y$  - скорость пешехода  
 $t_1$  - время, за которое пешеход переедет  $A \rightarrow B$

Скорость	$t_1, 2$	$S, \text{ км}$
$x$	$t_1 + 2$	$(t_1 + 2)x$
$y$	$t_1$	$t_1 y$
$x$	$t_1$	$t_1 x$
$y$	$t_1 + 2$	$(t_1 + 2)y$
$x + 6$	$\frac{t_1 y}{x + 6}$	$t_1 y$
$x + 6$	$\frac{t_1 + 2}{x + 6}$	$t_1 y$

↓ на 96 км меньше

1)  $(t_1 + 2)x = t_1 y$  -  $A \rightarrow B$   $\Rightarrow (t_1 + 2)x = t_1 y$   
 $t_1 y - A \rightarrow B$

2)  $(t_1 + 2)y - t_1 x$  - разница в расстоянии при  
 вращении. если время  $t_1$ , а скорость  $x$ , время  $(t_1 + 2)$   
 $(t_1 + 2)y - t_1 x = 96 \text{ км}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3)  $\left(\frac{t_1 y}{y+6} - \frac{t_1 y}{x+6}\right)$  - разница во времени, потраченной на АБ,  
если они оба увеличили скорость на  $\frac{1}{6}$

$$\frac{t_1 y}{y+6} - \frac{t_1 y}{x+6} = 1 \frac{15}{60}$$

4)  $t_1$  и  $t_2 = 3$  составим систему уравнений

$$\begin{cases} (t_1 + 2)x = t_1 y \\ (t_1 + 2)y - t_1 x = 56 \\ \frac{t_1 y}{y+6} - \frac{t_1 y}{x+6} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 x - t_1 y = -2x \\ t_1 y - t_1 x + 2y = 56 \\ \frac{t_1 y}{y+6} - \frac{t_1 y}{x+6} = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 y - t_1 x = 2x \\ t_1 y - t_1 x = 56 - 2y \\ \frac{t_1 y}{y+6} - \frac{t_1 y}{x+6} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 56 - 2y \\ \frac{t_1 y}{y+6} - \frac{t_1 y}{x+6} = \frac{5}{4} \\ (t_1 + 2)x = t_1 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 28 - y \\ \frac{t_1 y}{y+6} - \frac{t_1 y}{28-y+6} = \frac{5}{4} \quad \text{#1} \\ (t_1 + 2)x = t_1 y \end{cases}$$

б.1) решим #1

$$\begin{aligned} \frac{t_1 y}{y+6} - \frac{t_1 y}{34-y} &= \frac{5}{4} \\ t_1 y \left( \frac{34-y-y-6}{(y+6)(34-y)} \right) &= \frac{5}{4} \\ t_1 y \left( \frac{48-2y}{(y+6)(34-y)} \right) &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

б.2) рассмотрим б.1)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x = 48 - y \\ (t_1 + 2)x = t_1 y \\ t_1 y \left( \frac{48 - y}{y + 6} / \frac{54 - y}{y - 6} \right) = \frac{5}{4} \cdot y \left( \frac{48 - y}{y - 6} / \frac{54 - y}{y + 6} \right) \end{cases}$$

~~если~~

если  $y = 0$ , то  $0 = \frac{5}{4}$  - неверно  $\rightarrow y = 0$  - не корень

если  $48 - 2y = 0$ , то  $y = 24$

$x = 24$  - не удовлетворяет, т.к.

вспомогательная и основная скорости различны (скорости).

$$\begin{cases} x = 48 - y \\ t_1 = \frac{5(y+6)/(54-y)}{4y/(48-2y)} \\ y \neq -6 \\ y \neq 54 \\ (t_1 + 2)x = t_1 y \end{cases}$$

$$\left( \frac{5(y+6)/(54-y)}{4y/(48-2y)} + 2 \right) (48 - y) = \frac{5(y+6)/(54-y)}{4y/(48-2y)} \cdot y$$

$$\frac{5(y+6)/(54-y)/(48-y)}{4y/(48-2y)} + 2(48-y) = \frac{5(y+6)/(54-y)}{4y/(48-2y)} \Rightarrow$$

$$\frac{5(y+6)/(54-y)}{4(48-2y)} \left( \frac{48-y}{y} - 1 \right) + 2(48-y) = 0$$

$$\frac{5(y+6)/(54-y)(48-2y)}{4(48-2y)y} + 2(48-y) = 0$$

$$\frac{5(y+6)(54-y) + 2 \cdot 4y(48-y)}{4y} = 0 \quad | \cdot 4y$$

$$5(54y - y^2 + 324 - 6y) + 8y(48 - y) = 0$$

$$5(-y^2 + 48y + 324) + 384y - 8y^2 = 0$$

$$-5y^2 + 240y + 1620 + 384y - 8y^2 = 0$$

$$-13y^2 + 624y + 1620 = 0$$

$$13y^2 - 624y - 1620 = 0$$

$$D = 423616$$

$$\begin{array}{r} x \cdot 54 \\ 324 \\ \hline x \cdot 48 \\ 1620 \\ \hline x \cdot 6 \\ 36 \\ \hline 2466 \end{array} \quad \begin{array}{r} 240 \\ 384 \\ \hline 624 \end{array}$$



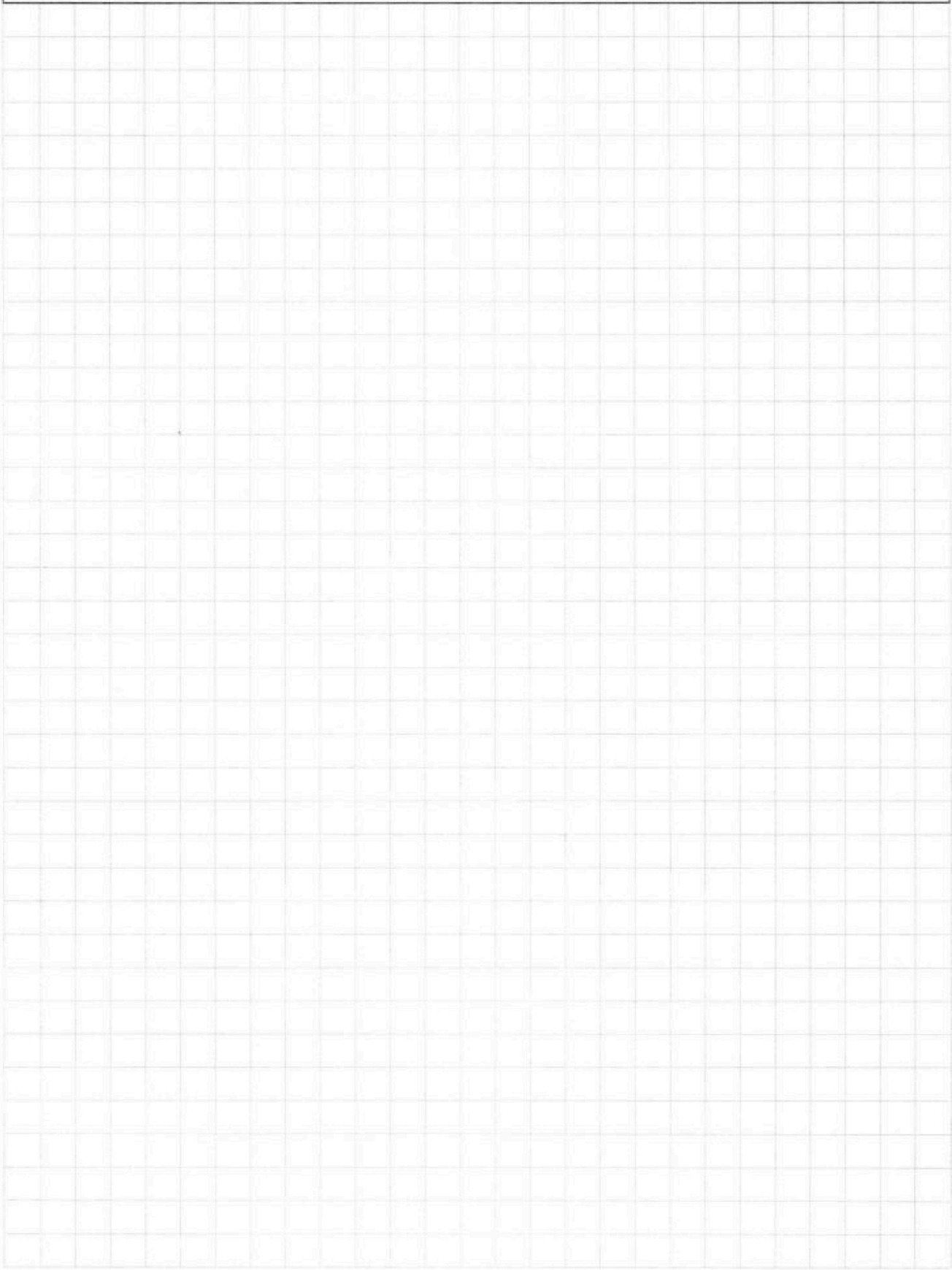
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{3x^2 - 4y^2 - 2^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3x^2 - 18y^2 + 18y^2 - 4y^2 - 2^2}{x^2 - 6y^2} =$$

$$= \frac{3(x^2 - 6y^2) + 14y^2 - 2^2}{x^2 - 6y^2} = 3 + \frac{14y^2 - 2^2}{x^2 - 6y^2}$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 4y^2 - 2^2 \\ 3x^2 - 18y^2 \\ \hline 14y^2 - 2^2 \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} x^2 - 6y^2 \\ 9 \end{array}$$

$$3 = \frac{2-2y}{x}$$

$$3 = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{y}\right)x$$

$$\frac{2-2y}{x} = \frac{2x}{x} - \frac{x}{y}$$

$$\frac{2-2y}{x} - \frac{2x}{x} = -\frac{x}{y} = 0$$

$$\frac{2-2y}{x} + \frac{14y^2 - 2^2}{x - 6y^2}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 4y^2 - 2^2 = 0 \\ 3x^2 - 4y^2 - 2^2 = 0 \end{cases}$$

$$3x + 2y = 2$$

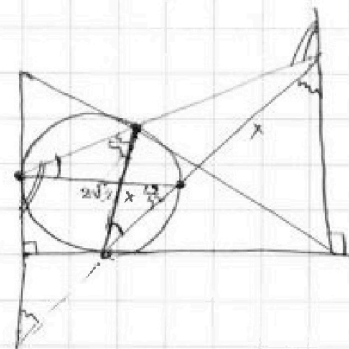
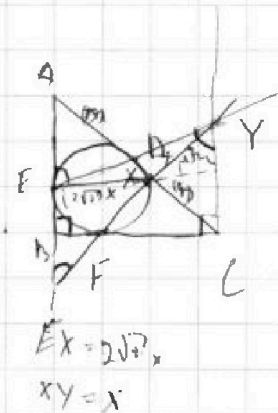
$$2 = \frac{2}{\frac{3}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{2xy}{3y+x}$$

$$3x + 2y = \frac{2xy}{3y+x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x(3y+x) + 2y(3y+x) - 2xy = 0 \\ 3y = -x \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} 9xy + 3x^2 + 6y^2 + 2yx + 2xy &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3xy &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + x^2 + 2xy &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(x+y) + 2y(y+x) &= 0 \\ (y+x)(x+2y) &= 0 \\ y &= -x \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.  $x, y, z \neq 0$ ,  $x, y, z$  - действительные

$$\begin{cases} 3x + 2y = z \\ x + y = \frac{z}{2} \end{cases}$$

$$\frac{3x^2 + 4y^2 = z^2}{x^2 = 6y^2} \quad - \text{как?}$$

~~$3x + 2y = z$~~

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3x + 2y} \Rightarrow \frac{3y(3x + 2y) + x(3x + 2y) - 2xy}{xy(3x + 2y)} = 0$$

$$\begin{cases} 9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2xy - 2xy = 0 \\ 3x + 2y \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y^2 + 9xy = 0 \\ x + \frac{2}{3}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3xy = 0 \\ x + \frac{2}{3}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 2y = 0, |x| \\ x + \frac{2}{3}y \end{cases}$$

1) Рассмотрим  $x_1$

$$x^2 + 3x + 2y = 0$$

$$D = 9 - 8y^2 \geq 0, \text{ т.к. } x, y \text{ - действительные числа}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8y^2}}{2}$$

~~Есть  $8y^2 = 0$ , но  $x = -\frac{3}{2}$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

~~$2x^2+4x$~~

$$\sqrt{2x^2-3x+4 + 1-4x - \frac{1+4x}{2}} - \sqrt{2x^2+x+3 + 1-4x - \frac{1+4x}{2}} = 1-4x$$

$$\sqrt{2x^2+x+3+1-4x} - \sqrt{2x^2-3x+4+1-4x} = 1-4x$$

$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2-3x+4} = 1-4x$$

$$2x^2-3x+4 = f$$

$$2x^2-3x+4$$

$$1-4x$$

$$\sqrt{f} - \sqrt{f+1-4x} = 1-4x$$

~~$f=4$~~

$$\sqrt{2x^2+x+3+1-4x} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

$$\sqrt{f+1-4x} - \sqrt{f} = 1-4x$$

$$\sqrt{f+1-4x} \cdot \sqrt{f} = m \cdot |f|$$

$$m^2 \cdot (f+1-4x)^2 + f = 0$$

$$m^2 \cdot f^2 - 2fm + f = 0$$

$$f^2 - f = 0$$

$$f(f-1) = 0$$

$$f = 0$$

$$f = 1$$

$$\begin{cases} f = 0 \\ f = 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{2x^2-3x+4+1-4x} - \sqrt{2x^2-3}$$

$$\sqrt{2x^2+x+3+1-4x} - \sqrt{2x^2-3x+4+1-4x} = 1-4x$$

$$f = 1-4x$$

$$\sqrt{2x^2+x+3+f} - \sqrt{2x^2-3x+4+f} = f$$

$$\sqrt{2x^2+x+3+f} = \sqrt{2x^2-3x+4+f}$$

$$2x^2+x+3+f = 2x^2-3x+4+f$$

$$f = 4x$$

$$f = 1-4x$$

$$\begin{array}{r} 8x \\ \times 15 \\ \hline 160 \\ + 39 \\ \hline 490 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1-4x < 0 & 1-4x = 1 \\ x < \frac{1}{4} & x = 0 \end{array}$$

~~$x$~~

$$2x^2-3x+4 = \frac{1}{4} \cdot 4$$

$$8x^2-12x+16-1=0$$

$$8x^2-12x+15=0$$

$$D = 144 - 180$$

$$2x^2+x+3 = \frac{1}{4} \cdot 4$$

$$8x^2+4x+12=4$$

$$8x^2+4x+8=0$$

$$D = 16 -$$

$$\sqrt{2 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 4} - \sqrt{2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 3} = 1 - 4 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 4} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 3} = 0$$

$$\sqrt{4 - \frac{2}{4}} - \sqrt{3 + \frac{2}{4}} = 0$$

$$\sqrt{\frac{15}{2}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$= (1-4x)^2 + 2(2x^2-3x+4)$$

$$= \frac{(2x^2-3x+4)^2 + (2x^2-3x+4)(1-4x)}{(2x^2-3x+4)^2 + (2x^2-3x+4)(1-4x)}$$

$$= \sqrt{4x^4 + x^3 + 4x^2 - 12x^3 + 8x^2 - 12x^2 + 4x + 12} = \sqrt{4x^4 - 11x^3 + 4x^2 + 4x + 12}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



473616

$$\begin{aligned}
 600^2 &= 360000 \\
 200^2 &= 40000 \\
 600 & \times 200 = 120000 \\
 \hline
 600 & \times 473616 \\
 660 & \\
 660 & \\
 660 & \\
 \hline
 6 & \\
 + 1356 & \\
 396 & \\
 \hline
 435600 &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 44 \\
 & 670 \\
 & 670 \\
 \hline
 & 469 \\
 402 & \\
 \hline
 447900 &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 64 \\
 & 680 \\
 & 680 \\
 \hline
 & 544 \\
 408 & \\
 \hline
 482400 & \\
 55 & \\
 \times 650 & \\
 + 594 & \\
 414 & \\
 \hline
 473400 &
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 423400 \quad 4 \\
 - 4 \\
 \hline
 0 \\
 - 5 \\
 \hline
 33 \\
 - 32 \\
 \hline
 14 \\
 - 12 \\
 \hline
 20 \\
 - 20 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3 \\
 16 \\
 76 \\
 96 \\
 16 \\
 \hline
 256
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & 4730 \\
 & 2916 \\
 & 6296 \\
 & 64 \\
 \hline
 & 4730 + 216 = 4946
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 118350 \quad 9 \\
 9 \\
 \hline
 28 \\
 - 27 \\
 \hline
 13 \\
 - 9 \\
 \hline
 45 \\
 - 45 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 216 \quad 4 \\
 20 \quad 34 \\
 \hline
 76 \\
 16 \\
 \hline
 7
 \end{array}$$

$690^2 = 476100$

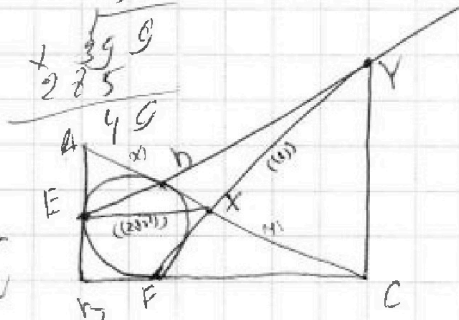
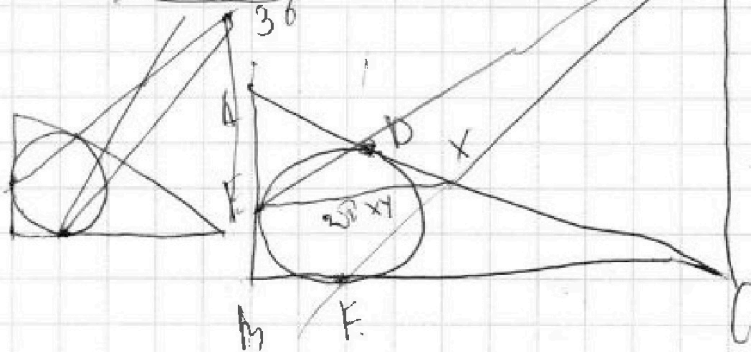
$$\begin{aligned}
 13156 \\
 13156 \\
 40^2 = 1600 \\
 80^2 = 3600 \\
 100^2 = 10000 \\
 13156 \quad 4 \\
 \hline
 12 \\
 - 12 \\
 \hline
 45 \\
 - 32 \\
 \hline
 36 \\
 36 \\
 \hline
 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3279 \\
 40^2 = 1600 \\
 80^2 = 3600 \\
 70^2 = 4900
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 395 \\
 & 696 \\
 & 696 \\
 \hline
 & 1476 \\
 4196 & \\
 \hline
 474416 &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 31 \\
 & 694 \\
 & 1654 \\
 & 2476 \\
 \hline
 & 6248 \\
 2746 & \\
 \hline
 & 36
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 63 \\
 & 63 \\
 \hline
 & 126 \\
 37 & \\
 \hline
 43 \\
 - 43 \\
 \hline
 52 \\
 - 52 \\
 \hline
 0
 \end{aligned}$$



32

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y_{1,2} = \frac{624 \pm \sqrt{473400 + 216}}{26} = \frac{624 \pm \sqrt{547183501}}{26} =$$

$$\frac{312 \pm 3\sqrt{6 \pm 13150}}{13} = \frac{312 \pm 3 \cdot 2\sqrt{3780}}{13} =$$

$$\begin{array}{r} 656 \\ \times 656 \\ \hline 4146 \\ 64053 \\ \hline 4146 \\ 64053 \\ \hline 43264 \\ 4146 \\ \hline 44416 \end{array}$$

$$\begin{cases} (t+2)x = ty \\ (t+2)y = tx = 56 \\ \frac{ty}{y+6} - \frac{tx}{x+6} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 48 - y \\ (t+2)x = ty \\ \frac{ty}{y+6} - \frac{tx}{x+6} = \frac{5}{4} \\ y+6 - x+6 = 4 \\ x = t+2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 8y^2 - 374 - 5y^2 + 574y + 6y^2 \\ 9y^2 - 384 + 5y^2 - 48y \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 656 \\ \times 656 \\ \hline 396 \\ 388 \end{array} \quad \begin{array}{r} 656 \\ \times 656 \\ \hline x = 48 - y \\ t = \frac{y - 48}{24 - y} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{ty}{t+2} &= 48 - y \\ ty &= (48 - y)(t + 2) \\ ty &= 48t + 56 - ty - 2y \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times 104 \\ \hline 144220 \\ \times 54 \\ \hline 2916 \\ \hline 1620 \end{array}$$

$$\frac{(y-48)y}{(24-y)(y+6)} - \frac{(y-48)y}{(24-y)(y+6)} = \frac{5}{4} \quad 29t - ty + 48 - y = 0$$

$$\frac{(y-48)y}{(24-y)(y+6)} - \frac{1}{54-y} = \frac{5}{4}$$

$$\begin{aligned} t(24-y) &= y - 48 \\ t &= \frac{y-48}{24-y} \end{aligned}$$

$$\frac{(y-48)y}{(24-y)} \Big/ \frac{34-y-4-6}{(y+6)(54-y)} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{y-48}{24-y}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 324 \\ \hline 607 \end{array}$$

$$\frac{(y-48)y(48-2y)}{(24-y)(y+6)(54-y)} = \frac{5}{4} = 0$$

$$\frac{(y-48)y(48-2y)}{(24-y)(y+6)(54-y)} = 0$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 210 \\ \hline 624 \end{array}$$

$$\frac{(y-48)y(2/24-y)}{(48-2y)(y+6)(54-y)} = \frac{5}{4} = 0 \quad \frac{2y(y-48) - 5(y+6)(54-y)}{(y+6)(54-y)} = 0$$