МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 5

1. [4 балла] Решите уравнение

$$3 \operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{150}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2 x - (x-1)\ln(2x) + (\ln 2)\ln x \geqslant 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -4x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом

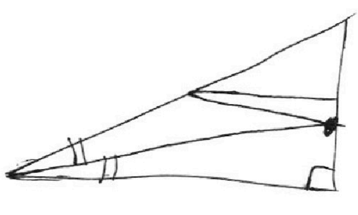
$$x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения xyz.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1.

$k \in \mathbb{Z}$

$3tg2x + 1 = tg\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$;

ОДЗ: $\begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x + \frac{3\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k \end{cases}$

$$3 \cdot \frac{2 \cdot tg x}{1 - tg^2 x} + 1 = \frac{tg x + tg\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{1 - tg x \cdot tg\frac{3\pi}{4}} = \frac{tg x - 1}{tg x + 1}$$

$t = tg x$

$$\frac{6 \cdot t}{1 - t^2} - \frac{t - 1}{t + 1} + 1 = \frac{6t - (t-1)(1-t) + 1 - t^2}{1 - t^2} = 0$$

$$\frac{6t + t^2 - 2t + 1 + 1 - t^2}{1 - t^2} = 0; \quad \frac{4t + 2}{1 - t^2} = 0$$

$$\frac{2t + 1}{1 - t^2} = 0$$

$$\begin{cases} t \neq \pm 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq arctg(\pm 1) + \pi p, & p \in \mathbb{Z} \\ x = arctg\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k \end{cases}$$

С учетом ОДЗ: $x = arctg\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = arctg\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$\begin{cases} b^2 = ac \text{ (геом. прогр., по усл.)} \\ abc = 2^{150} \cdot 3^{150} \end{cases}$

$\Rightarrow b^3 = abc = 2^{150} \cdot 3^{150}$; $b = 2^{50} \cdot 3^{50}$;

тогда $ac = 2^{100} \cdot 3^{100} > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a, c > 0 \\ a, c < 0 \end{array}\right.$

для каждого $a = 2^x \cdot 3^y$ найдется c: $c = 2^z \cdot 3^t$,
$0 \leq x \leq 100$ а $0 \leq z \leq 100$
$0 \leq y \leq 100$ $0 \leq t \leq 100$.

Значит кол-во возм-х пар (a, c) – кол-во возм-х значений a. А т.к. $a = 2^x \cdot 3^y$, $0 \leq x \leq 100$
зн-т $0 \leq y \leq 100$,
то кол-во a – кол-во пар (x, y).
По правилу умножения таковых – 101^2
Также каждой паре $a, c > 0$ можно сопоставить пару $(-a, -c)$. Тогда кол-во пар удваивается.
Итого $2 \cdot 101^2 = 20402$ пар (a, c).

Ответ: 20402

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$\ln^2 x - (x-1)\ln(2x) + \ln 2\cdot\ln x \geq 0$ | ОДЗ: $x>0$

$\ln^2 x - (x-1)(\ln 2 + \ln x) + \ln 2\cdot\ln x \geq 0$

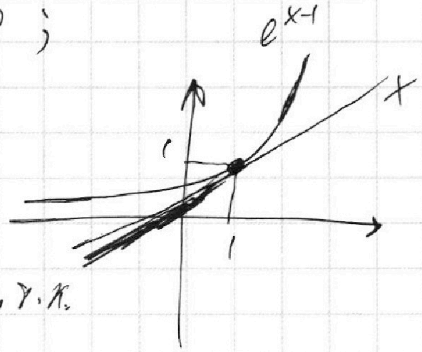
$\ln^2 x - x\ln 2 - x\cdot\ln x + \ln 2 + \ln x + \ln 2\cdot\ln x \geq 0.$

$\ln x(\ln x - x + 1) + \ln 2(\ln x - x + 1) \geq 0$

(·) $(\ln x - x + 1)(\ln x + \ln 2) \geq 0.$

~~II. Итак~~ Покажем, что $\ln x - x + 1 \leq 0$; $(\cdot e^x > 0)$

$\frac{e^{\ln x}\cdot e^1}{e^x} \leq 1$; $\underbrace{x}_{f} \leq \underbrace{e^{x-1}}_{g}$



в т. (1,1) f и g касаются, т.к. производные и зн-ия f и g при $x=1$ равны $\left(x'=1;\ (e^{x-1})'\big|_{x=1} = e^{1-1} = 1\right)$

$1 = e^{1-1} = 1$

Значит это их единств-ая общ. точка, т.к. f и g монотонны и сохр-т свою выпуклость на $\mathbb{R}$.

Значит, если $\ln x - x + 1 \leq 0$, то $\ln x + \ln 2 \leq 0$ (ввиду (·));

$e^{\ln x}\cdot e^{\ln 2} \leq 1$; $2x \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$. Из-за ОДЗ и наличия ~~точки~~ корня $x=1$ ур-ия $\ln x - x + 1$, $x \in (0; \frac{1}{2}] \cup \{1\}$

Ответ: $x \in (0; \frac{1}{2}] \cup \{1\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 (продолжение).

Также при $OC = OD$, $ABCD$ - квадрат.

$$OD = \frac{OP}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{a-4}}{\frac{1}{\sqrt{17}}} = \sqrt{17(a-4)}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 4;\ \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = 4;\ \sin^2\alpha = 16 - 16\sin^2\alpha$$

$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$, т.к. α - острый.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$OC = \frac{OQ}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{a+\frac{1}{4}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{1}{4}\sqrt{17\left(a+\frac{1}{4}\right)}$$

$$OD = OC \Leftrightarrow \sqrt{17(a-4)} = \frac{1}{4}\sqrt{17\left(a+\frac{1}{4}\right)}$$

$$17(a-4) = \frac{1}{16}\cdot 17\left(a+\frac{1}{4}\right);\ (a-4)\cdot 16 = a + \frac{1}{4};$$

$$15\cdot a = 64 + \frac{1}{4} = \frac{257}{4};\ a = \frac{257}{60}$$

$$OD = \sqrt{17\cdot\frac{17}{60}} = \frac{17}{\sqrt{60}}$$

$$BD = \frac{34}{\sqrt{60}};\ AB = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{34}{\sqrt{120}}$$

$$S_{ABCD} = AB^2 = \frac{34^2}{120} = \frac{17^2}{30} = \frac{289}{30}$$

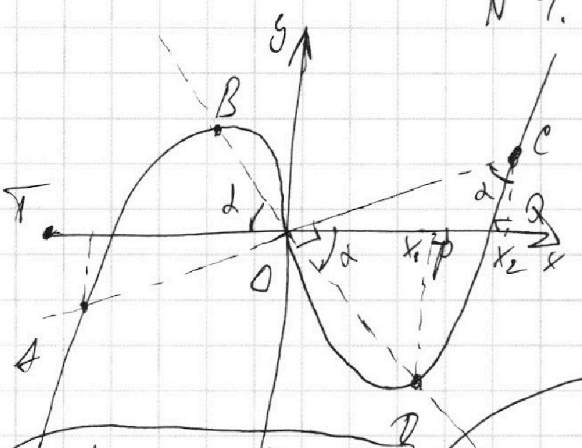
<u>Ответ:</u> $a = \frac{257}{60}$; площадь $- \frac{289}{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.



m: $x^3 - ax = y$

p: $y = -4x$

q: $y = \frac{1}{4}x$

A, B, C, D — вершины искомого квадрата, O — центр. квадр-та

p ⊥ q, т.к. коэф-ты наклона этих прямых дают в произведении −1

$m \cap p = \{B, O, D\}$.

Т.к. $AO \perp BO$ (диаг. квадрата), то $q \cap m = \{A, O, C\}$.

$BO = DO$ и $AO = CO$, т.к. $y = x^3 - ax$ — нечетна:
(симметрия отн-но центра коорд-т)

$y(-x) = -y(x) \Leftrightarrow (-x)^3 - a(-x) = -x^3 + ax = -(x^3 - ax)$

$Пр_{Ox} D = P$; $Пр_{Ox} C = Q$; $T \in Ox$ (см. рис.).

$\angle BOT = \alpha$; $tg\,\alpha = 4$ (коэф. наклона $y = -4x$).

OP: $x^3 - ax = -4x$; $x = \pm\sqrt{a-4}$

положит-ая абсцисса пересеч-ия m и p $\quad OP = \sqrt{a-4} > 0$.

OQ: $x^3 - ax = \frac{1}{4}x$; $x = \pm\sqrt{a + \frac{1}{4}}$

полож. абсцисса пересечения. $\quad OQ = \sqrt{a + \frac{1}{4}}$

$\angle POD = \alpha$ (верт. с $\angle BOT$); $\angle OCQ = 90° - \angle COQ =$
$= \angle POD$ (т.к. угол $\angle COD = 90°$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.

выраз (1) $\frac{b}{l}$ подставим в (2);

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin^2(\alpha+\frac{\gamma}{2})}{\sin^2\alpha} - 3}{\frac{\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})}{\sin\alpha}};$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\left(\sin^2(\alpha+\frac{\gamma}{2}) - 12\cdot\sin^2\alpha\right)\cdot\frac{1}{4\cdot\sin^2\alpha}}{\frac{\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})}{\sin\alpha}}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin^2(\alpha+\frac{\gamma}{2}) - 12\cdot\sin^2\alpha}{4\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})}$$

$$4\sin\alpha\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2}) = \sin^2(\alpha+\frac{\gamma}{2}) - 12\cdot\sin^2\alpha.$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{l} - \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{b}{l}\right)^{-1}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin^2(\alpha+\frac{\gamma}{2})}{\sin^2\alpha} - 3\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})};$$

$$4\cdot\underline{\sin\alpha\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}\cdot\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2}) = \sin^2(\alpha+\frac{\gamma}{2}) - 12\cdot\sin^2\alpha$$

$$2\cdot\left(\sin(\alpha-\frac{\gamma}{2}) + \sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})\right)\cdot\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2}) =$$

$$= 2\cdot\sin^2(\alpha+\frac{\gamma}{2}) + 2\cdot\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})\cdot\sin(\alpha-\frac{\gamma}{2}) =$$

$$= \sin^2(\alpha+\frac{\gamma}{2}) - 12\cdot\sin^2\alpha$$

$$\sin^2(\alpha+\frac{\gamma}{2}) + \underbrace{\cos2\alpha}_{1-2\sin^2\alpha} - \cos\gamma = -12\cdot\sin^2\alpha$$

$$\sin^2(\alpha+\frac{\gamma}{2}) + 1 - \cos\gamma = -10\cdot\sin^2\alpha$$

$\alpha+\gamma = 90^\circ$

$\alpha = 90^\circ - \gamma$

$\alpha+\frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin^2\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) + 1 - \cos\gamma = -10\cos^2\gamma$$

$$\cos^2\frac{\gamma}{2} + 1 - 2\cos^2\frac{\gamma}{2} + 1 = -10\left(2\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1\right)^2$$

$$t = \cos^2\frac{\gamma}{2}$$

$$\underbrace{t + 1 - 2t + 1}_{-t+2} = -10(2t-1)^2 = -10(4t^2 - 4t + 1) =$$

$$= -40t^2 + 40t - 10$$

$$40t^2 - 41t + 12 = 0;$$

$$D = 41^2 - 4\cdot 40\cdot 12 = 1681 - 1920 < 0.$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin^2\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin^2\alpha} - 3\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \gamma/2)};$$

$$4\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)\cdot\cos\frac{\gamma}{2} = \sin^3\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) - 3\cdot 4\cdot\sin^3\alpha$$

$$4\cdot\cos^2\gamma\cdot\cancel{\sin\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)}\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2} = \cos^3\frac{\gamma}{2} - 12\cdot\cos^3\gamma$$

$$t = \cos\frac{\gamma}{2}$$

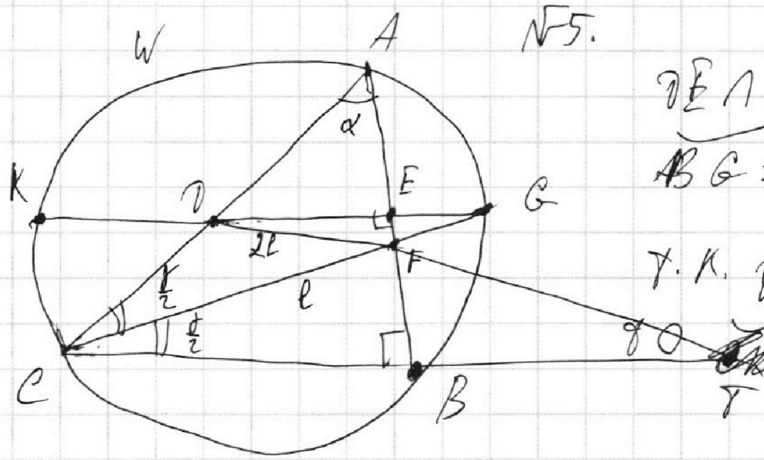
$$4\cdot t^2(2t^2-1)^2 = \cancel{(2t^2-1)^3 - 12}\cdot t^3 - 12(2t^2-1)^3.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5.

$AC = 2b$

$DE \cap W = K$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$

$\overset{\frown}{BG} = \overset{\frown}{GA} = \gamma$ (биссек.).

т.к. $DE \parallel BC$ (ср. линия), $\overset{\frown}{KC} = \overset{\frown}{BG} = \gamma$.

$T = DF \cap BC$; по т. о биссектрисе: $\frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BC}$

по т. Менелая для $\triangle ABC$ и секущей DF:

$\underbrace{\frac{CD}{AD}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{AF}{BF}}_{\frac{AC}{BC}} \cdot \frac{BT}{CT} = 1$; $\frac{AC}{BC} = \frac{CT}{BT} = 1 + \frac{BC}{BT}$

(сер.пер к хорде).

O – центр ~~опис.~~ W. $OE \cap W = G \Rightarrow O \in DE$, $DE \perp AB \Rightarrow$
$\Rightarrow BC \perp AB$, т.к. $DE \parallel BC$. $\angle ABC = 90°$.

т.к. $\triangle ABC$ – прямоугол, то O – сер. $AC \Rightarrow D = O$.

$CF = l$; $DF = 2l$; $\frac{l}{\sin\alpha} = \frac{2b}{\sin(\alpha + \frac{\gamma}{2})}$ (т. синусов $\triangle ACF$).

(1) $\frac{\sin(\alpha + \frac{\gamma}{2})}{\sin\alpha} = \frac{2b}{l}$; $\frac{\sin(\frac{\alpha}{2} + 45°)}{\sin\alpha} = \frac{2b}{l}$.

т. косинусов $\triangle CDF$: $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{b^2 + l^2 - 4l^2}{2bl} = \frac{\left(\frac{b}{l}\right)^2 - 3}{2 \cdot \frac{b}{l}}$ (2)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 6.

По нер-ву о средних: $xyz \geq \dfrac{3}{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}}$; $\geq S$

ср. геом. ср. гарм.

$xyz \geq \dfrac{21}{\frac{7}{x^3}+\frac{7}{y^3}+\frac{7}{z^3}}$

$$\begin{cases} \frac{7}{y^3} = z^3 - x^3 + \frac{7}{x^3} \\ \frac{7}{z^3} = z^3 - y^3 + \frac{7}{x^3} \\ \frac{7}{x^3} = \frac{7}{x^3} \end{cases}$$

$x^3 + \frac{8}{y^3} - \frac{1}{y^3} =$

$= \left(x + \frac{2}{y}\right)\left(x^2 + \frac{2x}{y^2} + \frac{4}{y^2}\right)$

$x^3 - \frac{7}{x^3} = z^3 - \frac{7}{y^3}$

$S = \frac{21}{x^3} + 2z^3 - x^3 - y^3 = \frac{7}{x^3} - x^3 + \frac{14}{x^3} + 2z^3 - y^3 =$

$= \frac{7}{y^3} - \cancel{z^3} + \frac{14}{x^3} + \cancel{2}z^3 - y^3 =$

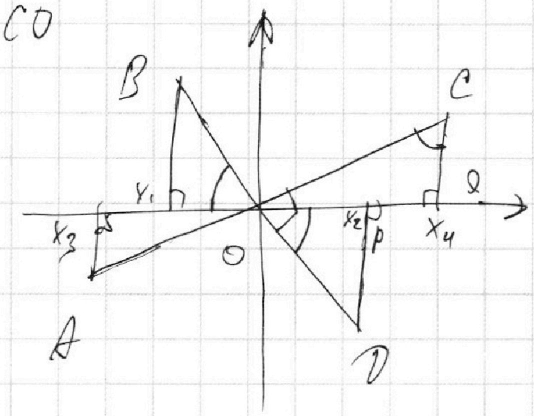
$=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$DO = CO$



1) $x^3 - ax = -4x$

$x^2 - a + 4 = 0$

$x_{12} = \pm\sqrt{a-4}$

2) $x^3 - ax = \frac{1}{4}x$

$x^2 = a + \frac{1}{4}$

$x_{34} = \pm\sqrt{a+\frac{1}{4}}$

$tg\,\alpha = 4$

$\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = 16$

$\sin^2\alpha = 16 - 16\cdot\sin^2\alpha$

$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$DO = \frac{OP}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{a-4}}{\frac{1}{\sqrt{17}}} = \sqrt{17(a-4)}$

$\cancel{CO = \frac{CQ}{\sin\alpha}}\ \cancel{\frac{CQ}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{a+\frac{1}{4}}}{\frac{1}{\sqrt{17}}} = \sqrt{17\left(a+\frac{1}{4}\right)}}$

$CO = \frac{QO}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{a+\frac{1}{4}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{1}{4}\sqrt{17\left(a+\frac{1}{4}\right)}$

$DO = CO$

$\cancel{17}(a-4) = \frac{1}{16}\cdot\cancel{17}\left(a+\frac{1}{4}\right)$; $16a - 64 = a + \frac{1}{4}$

$15a = 64 + \frac{1}{4} = \frac{257}{4}$

$a = \frac{257}{60}$

$DO = \sqrt{17\left(\frac{257}{60} - 4\right)} =$

$= \sqrt{17\cdot\frac{17}{60}} = \frac{17}{\sqrt{60}}$; $BD = \frac{34}{\sqrt{60}}$; $AB = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{34}{\sqrt{120}}$

$\frac{34^2}{4} = \left(\frac{34}{2}\right)^2 = 17^2$

$AB^2 = \frac{34^2}{120}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\underbrace{x^3+\frac{7}{y^3}=y^3+\frac{7}{z^3}}=z^3+\frac{7}{x^3}$$

$(\cdot xy7)^3=m$

ср. кв $\geq$ ср. арифм $\geq$
$\geq$ ср. геом $\geq$ ср. гарм.

$$\underbrace{x^3\cdot m+7x^3z^3=y^3\cdot m+7x^3y^3}=z^3\cdot m+7y^3z^3$$

$$m+7z^3=y^6z^3+7y^3$$

$$y^3z^3(x^3-y^3)=7(y^3-z^3)$$

$$xyz\geq\frac{3\cdot 7}{\frac{7}{x^3}+\frac{7}{y^3}+\frac{7}{z^3}}\to\max;$$

$$\frac{7}{x^3}+\frac{7}{y^3}+\frac{7}{z^3}<$$

$$=\frac{7}{y^3}=z^3-x^3+\frac{7}{x^3}$$

$$\frac{7}{z^3}=z^3-y^3+\frac{7}{x^3}$$

$$y^3+\frac{7}{z^3}=z^3+\frac{7}{x^3};\quad z^6+z^3\left(\frac{7}{x^3}-y^3\right)-7=0$$

$$D=\frac{49}{x^6}-14\frac{y^3}{x^3}+y^6+28\geq 0$$

$$D'=196\cdot y^6-4\cdot 49(y^6+28)=$$
$$=-4\cdot 49\cdot 28$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\begin{cases} b^2 = ac \\ abc = 2^{150} \cdot 3^{150} \end{cases}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ $\left[\begin{array}{l} a, c > 0 \\ a, c < 0 \end{array}\right.$

$b^3 = abc = 2^{150} \cdot 3^{150}$

$b = 2^{50} \cdot 3^{50}$

$a \cdot c = 2^{100} \cdot 3^{100}$, $! \; a = 2^x \cdot 3^y$, $\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 100 \\ 0 \leq y \leq 100 \end{array}\right\}$ 101 шт.

$101^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 + 1 =$

$= 10000 + 200 + 1 =$

$= 10201 \to 20402$

101^2 шт.

с учетом отр. вар. в

$2 \cdot 101^2$

$\ln^2 x - (x-1) \cdot \ln(2x) + \ln 2 \cdot \ln x \geq 0$

$\ln^2 x - \underbrace{x \cdot \ln 2x}_{1} + \ln 2x + \ln 2 \cdot \ln x \geq 0$

$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$

$\ln^2 x - x \cdot \ln 2 - x \cdot \ln x + \ln 2 + \ln x + \ln 2 \cdot \ln x$

$\ln^2 x - x$

$\ln x (\ln x + \ln 2) \geq x \cdot \ln 2x - \ln 2x = x \cdot \ln 2 + x \cdot \ln x - \ln 2 - \ln x$

$\ln^2 x - (x-1)(\ln x + \ln 2) + \ln 2 \cdot \ln x \geq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$3\,tg2x + 1 = tg\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$; ОДЗ: $2x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k;\ x\neq \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$

$x+\frac{3\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2}+\pi k;\ x\neq -\frac{\pi}{4}+\pi k$

$\cancel{tg2x = \frac{tgx+tgx}{1-tg^2x} = \frac{2\sin x\cdot\cos x}{1-2\sin^2 x} = \frac{2tgx}{1-2tg^2x}}$

$tg(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$

$tg2x = \frac{2tgx}{1-tg^2x}$; $tg\left(x+\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{tg(x)+tg\frac{3\pi}{4}}{1-tgx\cdot tg\frac{3\pi}{4}} =$

$= \frac{tgx - 1}{1+tgx}$

$tgx = t$

$\frac{6\cdot tgx}{1-tg^2x} - \frac{tgx-1}{tgx+1} + 1 = 0$

$\cancel{6t - (t-1)^2}$ $\qquad \frac{6t-(t-1)^2+1-t^2}{\underbrace{1-t^2}_{\neq 0}} = 0$

$6t - t^2 + 2t - \cancel{1} + \cancel{1} - t^2 = -2t^2+8t = -2(t^2-4t) = 0$

$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\pm 2\end{array}\right.$; $\quad x = \pi k$

$x = arctg(2)+\pi k$

$x = arctg(-2)+\pi k.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

$$=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\frac{\gamma}{2}=\sin\left(\alpha-\frac{\gamma}{2}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\left(\sin\left(\alpha-\frac{\gamma}{2}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\right)\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)=\sin^2\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)-3\cdot\sin^2\alpha$$

$$-2\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)=+6\cdot\sin^2\alpha.$$

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

$$=-2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos 2\alpha-\cos\gamma=6\cdot\sin^2\alpha$$

$$2\cdot\cos^2\alpha-1-\cos\gamma=6-6\cdot\cos^2\alpha$$

$$8\cdot\cos^2\alpha=\cos\gamma+7.$$

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=-2\cdot\sin\ \sin$$

$$1600+80+1$$

$$48\cdot4=96\cdot2=192$$

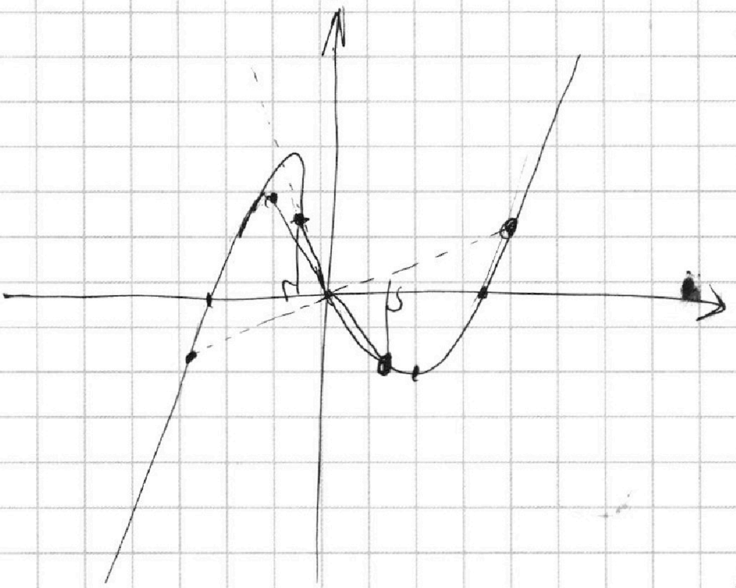
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x^3 - ax = x(x^2-a)$



$x^3 - ax = -4x$

$x^3 - ax + 4x = 0$

$x(x^2 - a + 4) = 0$

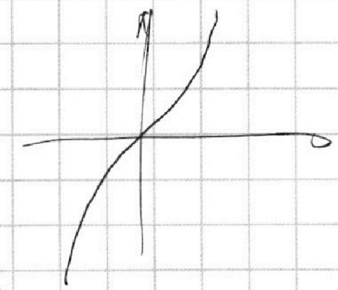
$x^2 = -4 + a > 0$

$\cancel{x = \pm\sqrt{4-a}}$

$x = \pm\sqrt{a-4}$

$a > 4$

$x^3 - ax = \frac{1}{4}x$



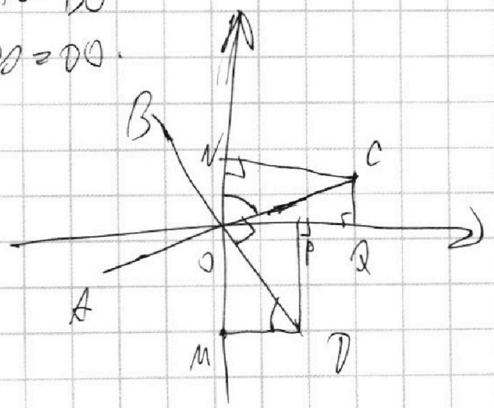
$x(x^2 - a - \frac{1}{4}) = 0$

$x = \pm\sqrt{a + \frac{1}{4}}$

$\sqrt{a+\frac{1}{4}} + \sqrt{a-4} = \sqrt{a-4} + \sqrt{a+\frac{1}{4}}$

AO = BO

CO = DO.



$tg\,\Delta = 4$; $tg\,\alpha = 4$

$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 4$; $x^2 = 16(1-x^2)$

$17x^2 = 16$; $x = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin\alpha$

$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = 4$

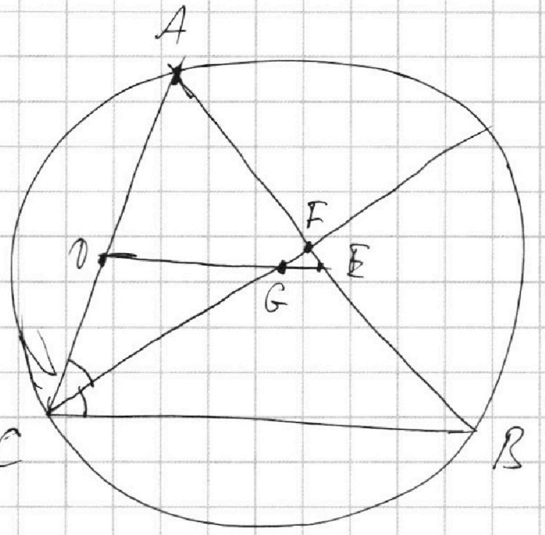
$1 - x^2 = 16x^2$; $x = \frac{1}{\sqrt{17}} = \cos\alpha$

$CO = \frac{ON}{\cos\alpha} =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

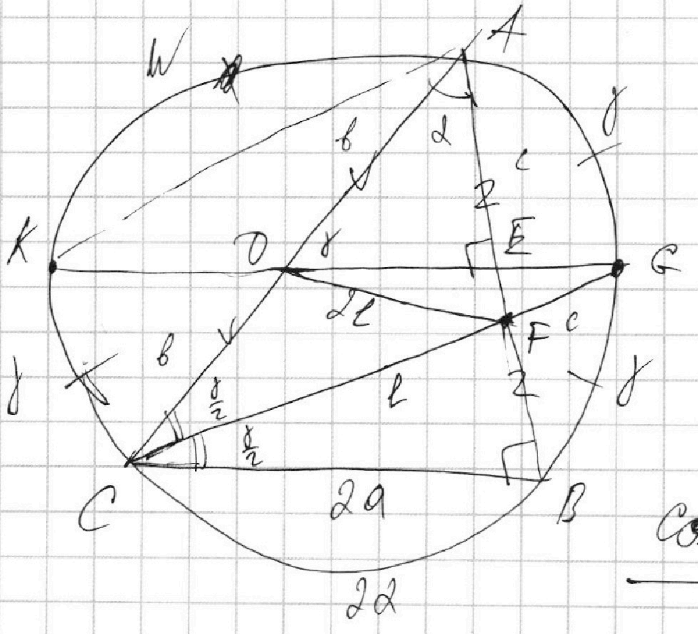
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\alpha+\beta+\gamma = \pi$ AK || CG

$\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$



$\overset{\frown}{AK} = 2\pi - 3\gamma - 2\alpha$

$2\beta = \gamma + 2\pi - 3\gamma - 2\alpha =$
$= 2\pi - 2\gamma - 2\alpha$

$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{b^2 + l^2 - 4l^2}{2bl} =$
$= \frac{b^2 - 3l^2}{2bl} = \frac{\frac{b^2}{l^2} - 3}{2\cdot\frac{b}{l}}$

$\frac{l}{\sin\alpha} = \frac{2b}{\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})} \Rightarrow \frac{\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})}{\sin\alpha} = 2\frac{b}{l}$

$\cos\frac{\gamma}{2} \cdot 2\cdot\frac{\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2(\alpha+\frac{\gamma}{2})}{\sin^2\alpha} - 3$

$2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2}) = \sin^2(\alpha+\frac{\gamma}{2}) - 3\cdot\sin^2\alpha$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\ln^2 x - (x-1)(\ln x + \ln 2) + \ln 2 \cdot \ln x \geq 0$; $t = \ln x$.

$\cancel{t^2 - (x-1)(t+\ln 2)}$

$\frac{\ln^2 x}{\ln 2} - (x-1)\cdot \ln(2\cdot(x+1)) + \ln x \geq 0$

$x^{\ln x} + x^{\ln 2}$

≥ 0

$\ln^2 x - x \cdot \ln 2x + \ln 2x + \ln 2 \cdot \ln x \geq 0$

$\ln^2 x - x\cdot \ln 2 - x \cdot \ln x + \ln 2 + \ln x + \ln 2 \cdot \ln x \geq 0$

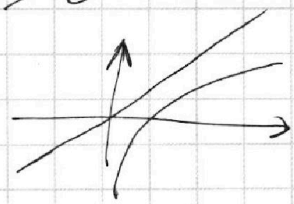
$\ln x(\ln x - x + 1) + \ln 2(\ln x - x + 1) \geq 0$

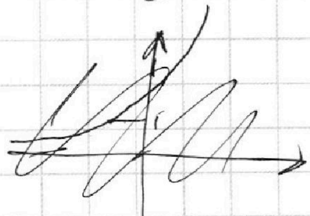
$(\ln x - x + 1)(\ln x + \ln 2) \geq 0$

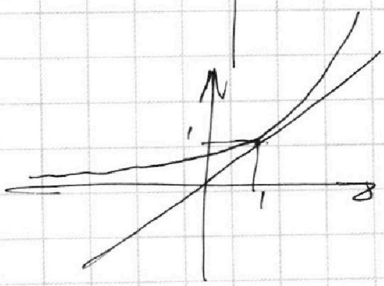
I. $\begin{cases} \ln x - x + 1 \geq 0 \\ \ln x + \ln 2 \geq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow e^{\ln x} \cdot e^{\ln 2} \geq 1$; $x \cdot 2 \geq 1$, $x \geq \frac{1}{2}$

$\frac{x \cdot e}{e^x} \geq 1$; $x \cdot e \geq e^x$; $x \geq e^{x-1}$

$1 \geq e^{1-1} = 1$







$\cancel{x \in (-\infty; +\frac{1}{2}]}$

$\cancel{x \in (0; +\frac{1}{2}]}$ $x = \frac{1}{2}$.