МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 5

1. [4 балла] Решите уравнение
$$3\operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{150}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$\ln^2 x - (x-1)\ln(2x) + (\ln 2)\ln x \geqslant 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -4x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом
$$x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}.$$
Найдите минимально возможное значение произведения xyz.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$. Найдите:

   а) объём пирамиды;

   б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

$\boxed{№1}$ Распишем $tg(2x) = tg(x+x)$ и $tg\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$ как сумму в tg:

$tg\,2x = \frac{\sin(x+x)}{\cos(x+x)} = \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$; $tg\left(x+\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sin x\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}\cos x}{\cos x\cos\frac{3\pi}{4} - \sin x\sin\frac{3\pi}{4}} =$

$= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x}$. Подставляем это в исходное уравнение:

$3tg\,2x + 1 = tg\left(x+\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow$ ~~$\frac{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x}$~~ $\frac{6\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)}{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)}$

$\Rightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(\sin x - \cos x) = (6\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x)(\cos x + \sin x)$. Причём знаменатели в tg – не 0 (учтём в конце), а $\cos^2 x - \sin^2 x$ – разность квадратов:

$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)(\sin x - \cos x) = (\cos x + \sin x)(6\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x)$

$\Rightarrow$ 1) $\cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = -\sin x \Rightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Иначе сократим и раскроем скобки:

$(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) = 6\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow$

$6\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x\cos x \Rightarrow 4\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$.

$\Rightarrow 2\cos x(2\sin x + \cos x) = 0$. Какая-то скобка – 0.

2) $2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) $2\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}\cos x \Rightarrow tg\,x = -\frac{1}{2}$ (т.к. $\cos x = 0$ рассмотрен выше)

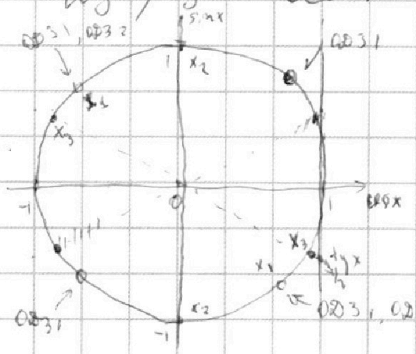
Проверяем ОДЗ на tg

~~1) $x_1 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ ...~~ 1) $tg\,2x$ – существует $\Rightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $2x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k$ и $x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) $tg\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$ – существует $\Rightarrow x + \frac{3\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $x + \frac{3\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ и $x \neq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Изобразим всё на триг. окружности:



Видно, что остались только x_3, где $tg\,x = -\frac{1}{2}$

Ответ: $x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\boxed{№2}$ Рассмотрим 6 вариантов на знам. геом. прогрессии ($a=t$, $b=qt$, $c=q^2t$):

1) · $a=b=c$ (геом. прогр. с $q=1$), тогда $abc=2^{150}\cdot3^{150} \Rightarrow a=b=c=2^{50}\cdot3^{50}$ – т.е. один вар-т.

~~1. ..., тогда ... (т.к. все числа~~

2) · $q=-1 \Rightarrow a=-b=c \Rightarrow abc=a\cdot(-a)\cdot a=-a^3=2^{150}\cdot3^{150} \Rightarrow a=-2^{50}\cdot3^{50}$, $b=2^{50}\cdot3^{50}$, $c=-2^{50}\cdot3^{50}$ – т.е. еще 1 вариант.

3) · $1<q$ ⇒ ($b=q\,t<t=a$ ⇒) $a>b>c$. Обозначим $b=x$, тогда $a=\frac{x}{q}$, $c=xq$ ⇒ ⇒ $abc=\frac{x}{q}\cdot x\cdot(x\cdot q)=x^3=2^{150}\cdot3^{150} \Rightarrow b=x=2^{50}\cdot3^{50}$. Тогда чтобы a получилось целым (т.е. q – целое), нужно выбрать q так, чтобы $2^{50}\cdot3^{50}$ делилось на это q. Понятно, что все такие $q=2^{\alpha}\cdot3^{\beta}$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ и $0\le\alpha,\beta\le50$. Значит всего подходит таких α и β 51^2 вариантов, но при $\alpha=\beta=0$ имеем $q=1$, что мы уже рассматривали. Значит подходит 51^2-1 вариантов на q. Очевидно, что при всех них все числа целые и имеют нужное произведение.

4) · $0<q<1 \Rightarrow a<b<c$ ~~Аналогичные обозначения $b=x$, $a=\frac{x}{q}$, $c=xq$~~ Тогда ~~при~~ если развернуть последовательность $(a,b,c)\to(c,b,a)$, то мы попадем в предыдущий вариант, значит здесь тоже имеем 51^2-1 вариант на q.

5) · $q<-1$ Обозначим $b=x$, $a=\frac{x}{q}$, $c=xq \Rightarrow abc=x^3=2^{150}\cdot3^{150} \Rightarrow b=x=2^{50}\cdot3^{50}$. Тогда a и c – отрицательные целые ⇒ каждому такому набору (a,b,c) можно сопоставить $(-a,b,-c)$, где уже $q>1$ и тогда мы попадаем в вар-т 3, где подходит 51^2-1 вариантов q.

6) · $-1<q<0$. Аналогично сопоставляем $(a,b,c)\leftrightarrow(-a,b,-c)$ и попадаем в вариант 4, где тоже 51^2-1 вариантов q.

Мы рассмотрели все варианты q, понятно, что других нет (осталось только $q=0$, но при нем числа (хотя бы 1) обнуляются и их произведение $=0$). Все варианты, очевидно, различны.

Ответ: $2+4(51^2-1)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны и делятся точкой пересечения на равные части. Поэтому одна из диаг. на $y=-4x \Rightarrow$ другая на $y=\frac{1}{4}x+m$ – для $\perp$, но т.к. центр в $(0,0)$, то и $y=\frac{1}{4}x+m$ проходит через центр квадрата $\Rightarrow m=0$ и $y=\frac{1}{4}x$. ($\frac{1}{4}$, т.к. у $\perp$ прямых произведение угл. коэф. -1 из скалярного произведения). Пусть на $y_1=-4x$ лежат ~~точки~~ верш. квадрата A и B, а на $y_2=\frac{1}{4}x$ – C и D. Тогда запишем, что эти точки и на прямых, и на графике $y=x^3-ax$:

$$\begin{cases} \text{т.}A: -4x_a = x_a^3 - ax_a \\ \text{т.}B: -4x_B = x_B^3 - ax_B \\ \text{т.}C: \frac{1}{4}x_C = x_C^3 - ax_C \\ \text{т.}D: \frac{1}{4}x_D = x_D^3 - ax_D \end{cases}$$

Поскольку диагонали делятся точкой пересечения пополам, то равны длины: $OA^2=OB^2=OC^2=OD^2$, где $O(0,0)$: $x_a^2+16x_a^2 = x_B^2+16x_B^2 = x_C^2+\frac{1}{16}x_C^2 = x_D^2+\frac{1}{16}x_D^2$. Отсюда имеем $x_a=\pm x_B$, $x_C=\pm x_D$, $x_C=\pm kx_B$. Обозначим $x_B=t$, тогда $x_a=-t$, точки C и D имеют или $x_C=kt$ и $x_D=-kt$, или $x_C=-kt$ и $x_D=kt$, ~~для~~ что равноправно (переименование точек C и D), поэтому возьмём первый вариант. (мы откинули $x_a=x_B$ и $x_C=x_D$, т.к. они точки тогда совпадают). Запишем систему: $(k=4)$

$$\begin{cases} \text{т}A: x_A=-t, & 4t=-t^3+at \\ \text{т}B: x_B=t, & -4t=t^3-at \\ \text{т}C: x_C=kt, & \frac{k}{4}t=k^3t^3-kat \\ \text{т}D: x_D=-kt, & -\frac{k}{4}t=-k^3t^3+kat \end{cases}$$

~~$\Rightarrow \begin{cases} 4t=-t^3+at \\ \frac{k}{4}t=k^3t^3-kat \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t(t^2+4-a)=0 \\ kt(k^2t^2+\frac{1}{4}+2a)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2+4-a=0 \\ 8t^2+\frac{1}{2}+2a=0 \end{cases}$ (т.к. при $t=0$ совпадают точки).~~

~~$\Rightarrow \begin{cases} t^2=a-4 \\ 8t^2=-2a-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 8(a-4)=-2a-\frac{1}{2} \Rightarrow 8a-32=-2a-\frac{1}{2} \Rightarrow 10a=32-\frac{1}{2}=31{,}5 \Rightarrow a=3{,}15$~~

$$\Rightarrow \begin{cases} 4t=-t^3+at \\ \frac{k}{4}t=k^3t^3-kat \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t(t^2+4-a)=0 \\ kt(k^2t^2-a-\frac{1}{4})=0 \end{cases}$$

(т.к. $k\neq0$, и $t\neq0$, т.к. иначе верш. совпадут)

$$\Rightarrow \begin{cases} t^2+4-a=0 \\ k^2t^2-a-\frac{1}{4}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2=a-4 \\ k^2t^2=a+\frac{1}{4} \end{cases}$$

~~$\Rightarrow k^2(a-4)=a+\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{16\cdot5}{17}a-4=\frac{1}{4}+\frac{16\cdot5\cdot4}{17} \Rightarrow a\cdot\frac{63}{17}=\frac{1}{4}+\frac{320}{17}=\frac{320\cdot4+17}{17\cdot4}=\frac{1297}{17\cdot4}$~~

~~$\Rightarrow a=\frac{1297}{4\cdot63}=\frac{1297}{252} \Rightarrow t^2=a-4=\frac{1297}{252}-\frac{1008}{252}=\frac{289}{252}$. Вспомним, что у точки B координаты $(t,-4t) \to OB^2=t^2+$~~

$\Rightarrow k^2(a-4)=a+\frac{1}{4} \Rightarrow 16a-64=a+\frac{1}{4} \Rightarrow 15a=64+\frac{1}{4}=64{,}25=\frac{257}{4}$

$\Rightarrow a=\frac{257}{4\cdot15}=\frac{257}{60}$. Теперь $t^2=a-4=\frac{257}{60}-\frac{240}{60}=\frac{17}{60} \Rightarrow t=\pm\sqrt{\frac{17}{60}}$

Вспомним координаты B: $(t,-4t) \Rightarrow OB^2=t^2+16t^2=17t^2$. Но если у квадрата сторона x, то его половина диагонали $\frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ у нашего квадрата полудиагональ $\sqrt{\frac{17\cdot17}{60}} \Rightarrow$ сторона $\sqrt{\frac{17\cdot17}{60}}\sqrt{2}=\frac{17}{\sqrt{30}}$. Тогда его площадь это сторона в квадрате: $\frac{17\cdot17}{30}$.

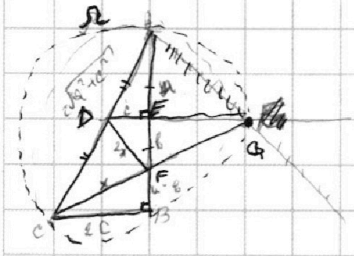
Ответ: $a=\frac{257}{60}$; площадь квадрата $\frac{17^2}{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 CF пересекает Ω в середине ◡AB, там же ~~кроме~~ пересекает Ω сер пер к AB ⇒ ~~...~~. GE – серпер к AB ⇒ DEF ~~тоже~~ ~~сер~~ все одна прямая, ⊥ AB



Поскольку DE – ср лин. △ABC, то $DE \parallel BC \Rightarrow BC \perp AB$ $\Rightarrow \angle B = 90^\circ$. Пусть $CF = x$, тогда по условию $DF = 2x$

Обозначим $AE = a$, $EF = b \Rightarrow FB = a - b$; $BC = 2c \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle CBF: x^2 = 4c^2 + (a-b)^2$; $\triangle DEF: 4x^2 = b^2 + c^2$ ($DE = \frac{1}{2}BC = c$, как средняя линия). Запишем:

$$\begin{cases} x^2 = 4c^2 + (a-b)^2 \\ 4x^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

Кроме этого, по св-ву биссектрисы:
$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{CB} = \frac{2\sqrt{a^2+c^2}}{2c} = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c} = \frac{a+b}{a-b}$$

Нужно узнать лишь c/a или a/c, поэтому ур-ий хватит:

$$\begin{cases} 16c^2 + 4(a-b)^2 = b^2 + c^2 \\ (a-b)\sqrt{a^2+c^2} = c(a+b) \end{cases} \Rightarrow b(c + \sqrt{a^2+c^2}) = a(\sqrt{a^2+c^2} - c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = a\frac{\sqrt{a^2+c^2} - c}{c + \sqrt{a^2+c^2}}$$ Подставляем в первое:

$$16c^2 + 4a^2\left(1 - \frac{\sqrt{a^2+c^2} - c}{c + \sqrt{a^2+c^2}}\right)^2 = a^2\left(\frac{\sqrt{a^2+c^2} - c}{c + \sqrt{a^2+c^2}}\right)^2 + c^2$$ Заменим $\sqrt{a^2+c^2} = d$, тогда $a^2 = d^2 - c^2$:

$$16c^2 + 4(d^2 - c^2)\left(1 - \frac{d-c}{c+d}\right) = (d^2 - c^2)\left(\frac{d-c}{c+d}\right)^2 + c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16c^2 + 4\frac{(d-c)(d+c)\,2c}{c+d} = \frac{(d-c)(d+c)(d-c)(d-c)}{(d+c)(d+c)} + c^2$$, отсюда можно найти отношение c к d ⇒ мы узнаем углы в прямоуг. треугольнике (2d-2ил)

$$16dc^2 + 16c^3 + 8c(d-c)(d+c) = (d-c)^3 + c^2(d+c)$$

Ответ: 90° и

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\boxed{№6}$ Рассмотрим ~~[illegible]~~ первое (со вторым) равенство и ~~второе~~ (первое с третьим) и выразим в них z^3:

$$\begin{cases} x^3+\frac{7}{y^3}=y^3+\frac{7}{z^3} \\ x^3+\frac{7}{y^3}=z^3+\frac{7}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{z^3}=\frac{x^3}{7}+\frac{1}{y^3}-\frac{y^3}{7}=\frac{x^3y^3+7-y^6}{7y^3} \\ z^3=x^3+\frac{7}{y^3}-\frac{7}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\frac{7}{x^3}+y^3-\frac{7}{y^3} \\ z=x^3+\frac{7}{y^3}-\frac{7}{x^3} \end{cases}$$

Приравняв, имеем: $\frac{7}{x^3}+y^3-\frac{7}{y^3}=x^3+7/y^3-7/x^3 \Rightarrow (y^3-x^3)+2\cdot 7\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}\right)=0$
$\Rightarrow (y^3-x^3)+14\frac{y^3-x^3}{x^3y^3}=0 \Rightarrow (y^3-x^3)\left(1+\frac{14}{x^3y^3}\right)=0$. Решая два этих варианта, имеем $y=x$ или $y=-\sqrt[3]{14}/x$. Понятно, что можно изначально взять другие равенства (выразить x или y) и получатся аналогичные выражения (т.к. все симметрично). Тогда:

$$\left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-\sqrt[3]{14}/x \end{array}\right. ^{(1)} \text{ и } \left[\begin{array}{l} y=z \\ y=-\sqrt[3]{14}/z \end{array}\right. ^{(2)} \text{ и } \left[\begin{array}{l} z=x \\ z=-\sqrt[3]{14}/x \end{array}\right. ^{(3)}$$

Рассмотрим все варианты, взяв $x=t$:

- в первом $y=x=t \underset{\text{"не все равны"}}{\Rightarrow} \begin{cases} z\neq y \\ z\neq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-\sqrt[3]{14}/z \\ z=-\sqrt[3]{14}/x \end{cases} \Rightarrow z=-\sqrt[3]{14}/t \Rightarrow (x,y,z)=(t,t,-\sqrt[3]{14}/t)$
- В первом $y=-\sqrt[3]{14}/x$, во втором $y=z \Rightarrow z=-\sqrt[3]{14}/x \Rightarrow (x,y,z)=(t,-\sqrt[3]{14}/t,-\sqrt[3]{14}/t)$
- В первом $y=-\sqrt[3]{14}/x$, во втором $y=-\sqrt[3]{14}/z \Rightarrow z=x \Rightarrow (x,y,z)=(t,-\sqrt[3]{14}/t,t)$.

~~Откуда~~ Понятно, что теперь всё подставим:

1) $(x,y,z)=(t,t,-\sqrt[3]{14}/t) \Rightarrow t^3+\frac{7}{t^3}=t^3-\frac{7t^3}{14}=-\frac{14}{t^3}+\frac{7}{t^3}$ ~~$\Rightarrow t^3=-\frac{14}{t^3}\Rightarrow$~~
~~$\Rightarrow t^6=-14$ — такого не бывает.~~ $7/t^3=-t^3/2 \Rightarrow -t^6=14$ — такого не бывает.

~~2) (x,y,z)=~~

2) $(x,y,z)=(t,-\sqrt[3]{14}/t,-\sqrt[3]{14}/t) \Rightarrow t^3-\frac{7t^3}{14}=-\frac{14}{t^3}-\frac{7t^3}{14}=-\frac{14}{t^3}+\frac{7}{t^3} \Rightarrow t^3=-\frac{14}{t^3}$
$\Rightarrow t^6=-14$ — такого не бывает.

3) $(x,y,z)=(t,-\sqrt[3]{14}/t,t) \Rightarrow t^3-\frac{7t^3}{14}=-\frac{14}{t^3}+\frac{7}{t^3}=t^3+\frac{7}{t^3} \Rightarrow -\frac{14}{t^3}=t^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow t^6=-14$ — такого не бывает.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7

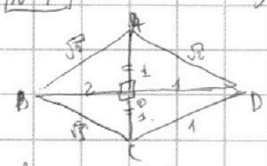


рис 7.1

Рассмотрим основание $ABCD$. $AB = BC \Rightarrow B$ – на сер. перп. к AC, $AD = DC \Rightarrow D$ на серпере к $AC \Rightarrow$ ~~если~~ $AC \perp BD$ и в точки пересечения O: $AO = OC = \frac{AC}{2} = 1$. В основании получились прямоугольные треугольники $\Rightarrow BO^2 = AB^2 - AO^2 = BC^2 - CO^2 = 5 - 1 = 4 = 2^2 \Rightarrow BO = 2$; $OD^2 = AD^2 - AO^2 = DC^2 - CO^2 = 2 - 1 = 1 = 1^2$. Введем координаты так, что $O(0;0;0)$.
$D(1;0;0)$, $B(-2;0;0)$, $C(0;-1;0)$, $A(0;1;0)$, $S(1;0;h)$ (S "над" D, т.к. $SD \perp ABCD$ по условию). Из координат, имеем $SA^2 = 1^2 + 1^2 + h^2 = 2 + h^2$; $SB^2 = 3^2 + 0^2 + h^2 = 9 + h^2 \Rightarrow SA + SB = 2 + \sqrt{5} = \sqrt{2+h^2} + \sqrt{9+h^2}$. Возводим в квадрат: $4 + 5 + 4\sqrt{5} = 2 + h^2 + 9 + h^2 + 2\sqrt{(2+h^2)(9+h^2)} \Rightarrow$ ~~$h^2 + 4$~~ $\sqrt{(2+h^2)(9+h^2)} = 2\sqrt{5} - 1 - h^2$
Возводим еще раз $(2+h^2)(9+h^2) = 20 + 1 + h^4 - 4\sqrt{5} - 4\sqrt{5}h^2 + 2h^2 \Rightarrow h^4 + h^2(2 - 4\sqrt{5}) + (21 - 4\sqrt{5}) = h^4 + 11h^2 + 18 \Rightarrow h^2(2 - 4\sqrt{5} - 11) = (4\sqrt{5} - 3) \Rightarrow h^2 = \frac{4\sqrt{5} - 3}{-4\sqrt{5} - 9}$. Видно, что получился $h^2 < 0 \Rightarrow$ картинка выглядит не так, а B и D по одну сторону от AC. Тогда правильный рисунок – 7.2.

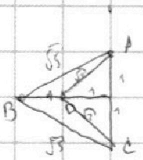


рис 7.2

Пусть $D(0;0;0)$, $A(1;1;0)$, $C(1;-1;0)$, $B(-1;0;0)$; $S(0;0;h)$
$\Rightarrow SA^2 = h^2 + 2$, $SB^2 = h^2 + 1 \Rightarrow 2 + \sqrt{5} = \sqrt{2+h^2} + \sqrt{1+h^2}$ ~~Возводим~~ Очевидно, что такое h всего одно, а $h = \sqrt{3}$ – подходит.
Тогда: S площадь $ABCD$: $2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1) = 1$, в $SABCD$ $h = \sqrt{3}$
$\Rightarrow$ объём $SABCD$: $1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Пусть R – центр шара из пункта б. Тогда ~~очевидно, что~~ пусть $R(R_x, R_y, R_z)$, но понятно, что $|R_x| = r$, где r – радиус шара (из касания SD) и $|R_z| = r$ – из касания $ABCD$, а $R_y = 0$, т.к. картинка сим. отн. BDS. Тогда имеем $R(-r, 0, r)$, но нужно учесть касание SAB и SBC. ~~Рассмотрим сечение по $z = r$, тогда эта фигура подобна основанию и меньше в $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - r}$ раз~~ И

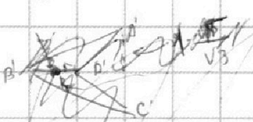


рис 7.3 (7-?)

Рассмотрим пирамиды $BASR$, $BCSR$, $BADCR$ и $SADR$ и $SCDR$. Понятно, что вместе они имеют объем, равный объёму всей пирамиды, а высоты из R на BAS, BCS и $BADC$ по r, высоты на SAD и SCD получим по $r/\sqrt{2}$ (из-за того, что она лежит в сечении по $z = r$ и там $\triangle RD'H$ – р/б прямоуг. с гип. r). Считаем площади

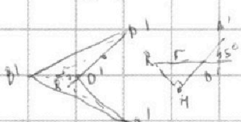


рис 7.3

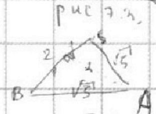


рис 7.4

граней: $BADC$ – 1, $SDA = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$; $SDC = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.
SAB и SCB по рис 7.4 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$. Запишем уравнение:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \underbrace{r \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}}_{BAS} + \underbrace{r \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}}_{BCS} + \underbrace{r \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}}_{BADC} + \underbrace{\frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{3}}_{SAD} + \underbrace{\frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{3}}_{SCD} = \frac{2}{3}r + \frac{2}{3}r + \frac{1}{3}r + \frac{1}{2\sqrt{3}}r + \frac{1}{2\sqrt{3}}r$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = r\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow r = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{5}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1/\sqrt{3}}{\frac{5+\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$$

Ответ: а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ б) $\frac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$

МФТИ

(a, b, c) $\quad abc = 2^{150} \cdot 3^{150} = \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = x^3 \to x = 2^{50} \cdot 3^{50}$

$2^{50} 3^{50}$ $\quad a = b = c = 2^{50} \cdot 3^{50}$ // $a > b > c$ $a < b < c$ $q \in$ дел. $2^{50} 3^{50} \Rightarrow q = 2^{\alpha} 3^{\beta}$ → 50 вар. → 50 вар.

Ans: $1 + 2(51^2 - 1) = 2 \cdot 51^2 - 2 + 1 = 2 \cdot 51^2 - 1$ $\quad (1 \times 1) \to \alpha = \beta = 0 \to q = 1$ $\quad ((51 \times 51 - 1) \times 2) \to \alpha > 0 // \beta > 0 \to$

(2) 3 4 5 6 7 $\quad tg\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sin x \cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} \cos x}{\cos x \cos\frac{3\pi}{4} - \sin x \sin\frac{3\pi}{4}} =$

$= \frac{-\sin x \cdot \frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt2}{2}\cos x}{-\cos x \frac{\sqrt2}{2} - \frac{\sqrt2}{2}\sin x}$; $tg\, 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$ $\quad \left(\frac{\sqrt2}{2}; \frac{\sqrt2}{2}\right)$

$\frac{6\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} + 1 = \frac{-\sin x \frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt2}{2}\cos x}{-\frac{\sqrt2}{2}\sin x - \frac{\sqrt2}{2}\cos x}$ $\quad -\frac{\sqrt2}{2}(\sin x + \cos x)(6\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) = (\cos^2 x - \sin^2 x)\left(-\sin x \frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt2}{2}\cos x\right)$

$(\sin x + \cos x)(6\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)(\sin x - \cos x)$

1) $\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k;\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ $\quad (a-b)(b-a) = ab - a^2 - b^2 + ab$

2) $\cos^2 x + 6\sin x\cos x - \sin^2 x = -\cos^2 x - \sin^2 x + 2\cos x \sin x$ $\quad tg = \frac{\sin}{\cos}$

$4\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow 2\cos x(2\sin x + \cos x) = 0$

2) $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $\quad$ 3) $2\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow$ $2\sin x = -\cos x$ $\quad tg\, x = -\frac12$??

(3) $\ln^2 x - (x-1)\ln(2x) + (\ln 2)\ln x^2 \Rightarrow \ln^2 x - (x-1)\ln 2 \ln x + \ln 2 \ln x \geq 0$

$\ln x^2 = 2\ln x$ $\quad \ln^2 x - x\ln 2 \ln x + 2\ln 2 \ln x \geq 0$ $\quad$ [?]

$\ln 2x = \ln 2 + \ln x$ $\quad \ln x(\ln x - x\ln 2 + 2\ln 2) \geq 0$

$2x$ $\quad e^{\ln 2}, e^{\ln x} = 2x$ $\quad$ 4. $y = x^3 - ax$ $\quad (x, y) \to$ на гр.

$y = -4x \to$ одна $\to (x_1, -4x_1)$ $\quad x(x^2 - a) = 5$ $\quad$ deg 3.

$y = \frac14 x \to$ др. $\to (x_2, -4x_2)$ $\quad x_1\sqrt{17}$ $\quad x_1 = 4t,\ x_2 = -t$ $\quad y_1 = t^3 - at$ $\quad y_2 = -t^3 + at$

$(x_3, \frac14 x_3)$ $\quad x_2\sqrt{17}$ $\quad x_3 = 4t,\ x_4 = -4t$ $\quad y_3 = 64t^3 - 4at,\ y_4 = -64t^3 + 4at$

$(x_4, \frac14 x_4)$ $\quad x_3\sqrt{1 + \frac{1}{16}} = \frac14 x_3\sqrt{17}$ $\quad \frac14 x_4\sqrt{17}$

deg 2: $y_1 = -4t^3,\ y_2 = 4t^3,\ y_3 = t,\ y_4 = -t$

$\begin{cases} -4t^3 = t^3 - at \\ 4t^3 = -t^3 + at \\ t = 64t^3 - 4at \\ -t = -64t^3 + 4at \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 5t^3 = at \\ 63t^2 = 4at \end{cases}$ $\quad t \neq 0.$ $\begin{cases} 5t^2 = a \\ 63t^2 = 4a \end{cases}$ $\quad$ what! $\quad a = 0, t = 0$?

$x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}$ $\quad \frac{x^3y^3 + 7 - y^6}{7y^3} = \frac{1}{z^3}$

$7(x, y)$: $\begin{cases} x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} \to x^3 + \frac{7}{y^3} - y^3 = \frac{7}{z^3} \to \frac{x^3}{7} + \frac{1}{y^3} - \frac{y^3}{7} = \frac{1}{z^3} \\ x^3 + \frac{7}{y^3} = z^3 + \frac{7}{x^3} \to z^3 = x^3 + \frac{7}{y^3} - \frac{7}{x^3} \end{cases}$ $\quad z^3 = \frac{7y^3}{x^3y^3 + 7 - y^6}$

$z^3 = x^3 + \frac{7}{y^3} - \frac{7}{x^3} = \frac{7}{x^3} + y^3 - \frac{7}{y^3}$ $\quad = \frac{7}{x^3} + y^3 - \frac{7}{y^3}$

$x^3 - y^3 + 14\left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{x^3}\right) = 0$ $\quad 7 \cdot 14y$ $\quad \frac{2 \cdot 7}{y^3} - y^3 = \frac{2 \cdot 7}{x^3} - x^3$

$(x-y)(x^2 + xy + y^2) + 14\frac{x^3 - y^3}{y^3x^3}$

$x^3 - y^3 + 14\frac{x^3 - y^3}{y^3x^3} = 0 \Rightarrow (x^3 - y^3)\left(1 + \frac{14}{y^3x^3}\right) = 0 \Rightarrow -1 = \frac{14}{y^3x^3} \Rightarrow y^3x^3 = -14$ $\quad \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = \sqrt[3]{-14}/x \end{array}\right.$

$(y^3 - z^3)\left(1 + \frac{14}{y^3z^3}\right) = 0$ $\quad x = x,\ y = x,\ z = \sqrt[3]{-14}/x$ $\quad \left[\begin{array}{l} y = z \\ y = \sqrt[3]{-14}/z \end{array}\right.$

$(x^3 - z^3)\left(1 + \frac{14}{x^3z^3}\right) = 0.$ $\quad x = x,\ y = \sqrt[3]{-14}/x,\ z = x \Rightarrow x = \frac{3}{x}, x \neq 0$ $\quad \left[\begin{array}{l} z = x \\ z = \sqrt[3]{-14}/x \end{array}\right.$

$x\sqrt[3]{-14} = x \cdot x \cdot \frac{\sqrt[3]{-14}}{x}$ $\quad x = x,\ y = \sqrt[3]{-14}x,\ z = \sqrt[3]{-14}x$

$x\sqrt[3]{-14} = x \cdot x \cdot \frac{\sqrt[3]{-14}}{x}$

$x^3\, 14^{2/3} = x \cdot \sqrt[3]{-14}x\, \sqrt[3]{-14}x$

2 4 8

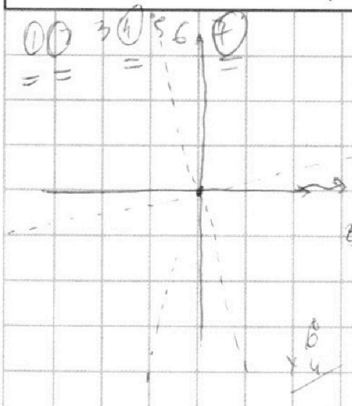
-2 4 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1 2 3 4 5 6 7



$-t^2+4=-4t^2-1/4$

$5t^2=-4{,}25$

$\frac{320}{17}+\frac{1}{4}$

$\frac{80}{17}-1$

$x_B^2+4x_B^2=x_C^2+\frac{1}{16}x_C^2$

$x_B^2\cdot 5=x_C^2\cdot\frac{17}{16}$

$x_C=x_B\cdot\pm\sqrt{\frac{17\cdot 5}{16}}$

1297 : 17

$\frac{1}{t},t,-3\sqrt{14}/4$

156

37

$x_B^2+16x_B^2=x_C^2+\frac{1}{16}x_C^2$

$\boxed{x_C=4x_B}$

$t^3+\frac{7}{t^3}=-t^3+\frac{7}{-\frac{14}{t^3}}=t^3-\frac{t^3}{2}$

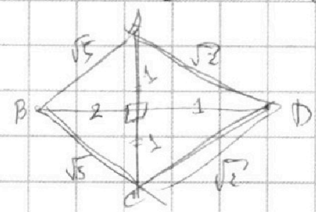
$=t^3-\frac{14}{t^3}+\frac{7}{t^3}=-\frac{7}{t^3}$

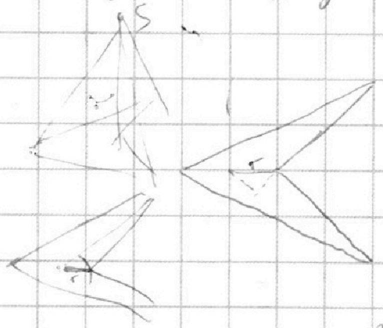
$x^3+\frac{7}{y^3}=z^3+\frac{7}{x^3}\Rightarrow\frac{1}{y^3}-\frac{z^3}{7}+\frac{1}{x^3}-\frac{x^3}{7}=\frac{z^3x^3+7-x^6}{7x^3}$ $\quad y^3=$

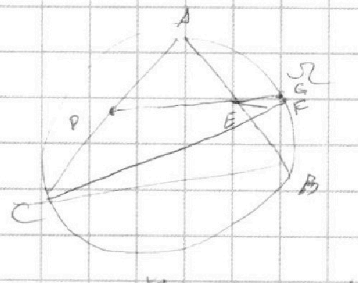
$y^3+\frac{7}{z^3}=z^3+\frac{7}{x^3}$ $\quad y^3=z^3+\frac{7}{x^3}-\frac{7}{z^3}$

$x^3y^3+7-y^6$ $\quad x^3+\frac{7}{y^3}-\frac{7}{x^3}=\frac{7y^3}{x^3y^3+7-y^6}$

3/5/6







$3+\sqrt2\ \vee\ 2+\sqrt5$

$1+\sqrt2\ \vee\ \sqrt5$

$3+2\sqrt2\ \vee\ 5$

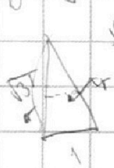
$2\sqrt2\ \vee\ 2$

$C=2a$

$(c+d)-(d-c)=2c$

$A-0$

$0-\sqrt3$



$\frac{\sqrt3}{1}=\frac{\sqrt3-x}{x}$

$\frac{\sqrt3-x}{\sqrt3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ