



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360} \cdot 7^{90}$?
3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF .
5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.
6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 19$, $XY = 36$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - 9 - (x^2 - 1)|$$

Если $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$, то $x^2 \geq 1$ и $x^3 \leq 9$,

зн. $x^3 - 9 \leq 0$ и $x^2 - 1 \geq 0$, т. е. $x^3 - 9 - (x^2 - 1) \leq 0$, зн.
 $|x^3 - 9| = 9 - x^3$, $|x^2 - 1| = x^2 - 1$, $|x^3 - 9 - (x^2 - 1)| = x^2 - 1 - (x^3 - 9)$.

$$9 - x^3 + x^2 - 1 \leq x^2 - 1 - (x^3 - 9)$$

$$9 - x^3 \leq 9 - x^3$$

$9 \leq 9$ - верно, зн. все ~~эти~~ числа из промежутка $(-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$ удовлетворяют данному неравенству.

Если $x \in (-1; 1)$, то $x^3 < 1$ и $x^2 < 1$, $-x^2 \leq 0$, зн.
 $|x^3 - 9| = 9 - x^3$, $|x^2 - 1| = 1 - x^2$, $x^3 - x^2 - 8 < 0$, зн. $|x^3 - x^2 - 8| =$
 $= 8 + x^2 - x^3$.

$$9 - x^3 + 1 - x^2 \leq 8 + x^2 - x^3$$

$$2x^2 \geq 2$$

$x^2 \geq 1$, но $x^2 < 1$ - противоречие, зн. все числа из промежутка $(-1; 1)$ не удовлетворяют данному неравенству.

Если $x \in (\sqrt[3]{9}; +\infty)$, то $x^3 > 9$ и $x^2 > 1$, зн.

$$|x^3 - 9| = x^3 - 9, |x^2 - 1| = x^2 - 1, |x^3 - x^2 - 8| = x^3 - x^2 - 8$$
 или

$$|x^3 - x^2 - 8| = 8 + x^2 - x^3. \text{ Разберём оба случая:}$$

$$x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 - 8$$

$$x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq 8 + x^2 - x^3$$

$$2x^2 \leq 2$$

$$2x^3 \leq 18$$

$$x^2 \leq 1, \text{ но } x^2 > 1 -$$

$$x^3 \leq 9, \text{ но } x^3 > 9 - \text{противо-}$$

противоречие.

речие.

Таким образом, все числа из промежутка $(\sqrt[3]{9}; +\infty)$ не удовлетворяют данному неравенству, зн. решение данного неравенства - промежуток $(-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 2

Если a , b и c - натуральные числа, то

$\frac{a}{b} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow b^2 = ac$, т. е. условие, что числа a , b и c в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию, равносильно равенству $b^2 = ac$, но тогда $b^3 = abc = 5^{360} \cdot 7^{90} \Rightarrow b = 5^{120} \cdot 7^{30}$, зн. $ac = 5^{240} \cdot 7^{60}$, $ac : a$, зн. $a = 5^k \cdot 7^n$, где $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq 240$ и $0 \leq n \leq 60$, $c = 5^{240-k} \cdot 7^{60-n}$. Таким образом, каждому варианту значения a соответствует ровно одна удовлетворяющая условию задачи тройка чисел $(a; b; c)$, при этом возможны 241 вариант значения k и 61 вариант значения n , т. е. всего $241 \cdot 61 = 14701$ вариант значения a , а значит, 14701 тройка чисел $(a; b; c)$, удовлетворяющая условию задачи (если знаменатель геометрической прогрессии не может равняться 1, то $a = 5^{120} \cdot 7^{30}$ не подходит, и указанных троек на 1 меньше).

Ответ: 14701.

$$\begin{array}{r} \times 241 \\ \quad 61 \\ \hline + 241 \\ \quad 1446 \\ \hline 14701 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0 \quad \text{№ 3}$$

Если $y=3$, то

$$x^2 \cdot (3-3) - x(11 \cdot 3 - 34) + 32 \cdot 3 - 101 = 0$$

$$0x^2 - x \cdot (-1) - 5 = 0$$

$$x - 5 = 0$$

$x=5$, зн. пара чисел $(5; 3)$ является решением данного уравнения.

Если $y \neq 3$, то $y-3 \neq 0$. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно переменной x . Оно имеет решения, если $D \geq 0$, т. е.

$$(11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) \geq 0$$

$$121y^2 - 748y + 1156 - 4(32y^2 - 101y - 96y + 303) \geq 0$$

$$121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 788y - 1212 \geq 0$$

$$-7y^2 + 40y - 56 \geq 0$$

$$7y^2 - 40y + 56 \leq 0$$

$f(x) = 7x^2 - 40x + 56$, график функции - парабола, ветви направлены вверх.

$$f(x) = 0$$

$$7x^2 - 40x + 56 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (-20)^2 - 7 \cdot 56 = 400 - 392 = 8, \text{ 2 корня}$$
$$x_{1,2} = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}, \text{ зн. } f(x) \leq 0 \text{ при } \frac{20-2\sqrt{2}}{7} \leq x \leq \frac{20+2\sqrt{2}}{7},$$

т. е. $7y^2 - 40y + 56 \leq 0$ при $\frac{20-2\sqrt{2}}{7} \leq y \leq \frac{20+2\sqrt{2}}{7}$, но если $y \in \mathbb{Z}$ и $y \neq 3$, то $y \leq 2 = \frac{14}{7} = \frac{20-6}{7} < \frac{20-2\sqrt{2}}{7}$ или $y \geq 4 = \frac{28}{7} = \frac{20+8}{7} > \frac{20+2\sqrt{2}}{7}$, т. е. $\forall x \in \mathbb{Z}$ $7y^2 - 40y + 56 > 0$, зн. данное уравнение не имеет никаких решений в целых числах кроме пары $(5; 3)$.

Ответ: $(5; 3)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

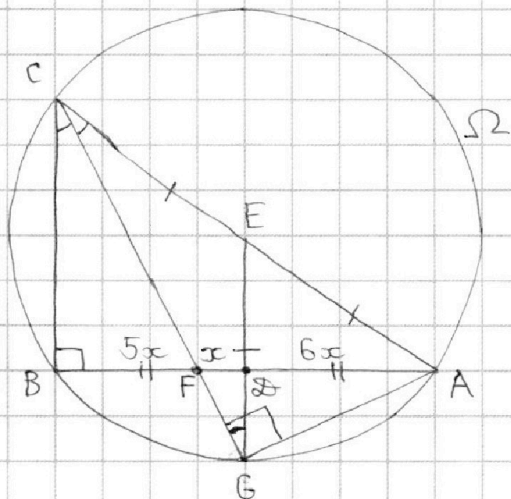
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 4



D - середина AB , E - середина AC , зн. $AD = BD$,
 $AE = CE = \frac{1}{2}AC$, DE - средняя линия $\triangle ABC$, зн.
 $DE \parallel BC$.

$\triangle BCF \sim \triangle DGF$ по I признаку ($\angle BCF = \angle DGF$ как верши-
кашные, $\angle BCF = \angle DGF$ как накрест лежащие при
 $BC \parallel DE$ и секущей CG), зн. $\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle DGF}} = \left(\frac{BF}{DF}\right)^2$.

$S_{\triangle BCF} = 25S_{\triangle DGF}$, зн. $BF = 5DF$. Пусть $DF = x$, тогда
 $BF = 5x$, $AF = AD + DF = BD + DF = BF + DF + DF = 5x + x + x = 7x$,
зн. $\frac{BF}{DF} = \frac{BF}{AF} = \frac{5}{7}$.

CF - биссектриса $\triangle ABC$, зн. $\angle ECF = \angle BCF = \angle DGF$, зн.
 $\triangle CEG$ равнобедренный, $GE = CE = \frac{1}{2}AC$, зн. $\triangle ACG$ право-
угольный, $\angle AGC = 90^\circ$.

$\angle ABC = \angle AGC = 90^\circ$ как вписанные углы, опирающиеся
на $\sphericalangle AC$, зн. $\triangle ABC$ прямоугольный, AC - гипотену-
за.

По свойству биссектрисы $\frac{BC}{AC} = \frac{BF}{AF} = \frac{5}{7}$, зн.
 $\angle BAC = \arcsin \frac{BC}{AC} = \arcsin \frac{5}{7}$, $\angle ACB = \arccos \frac{BC}{AC} = \arccos \frac{5}{7}$.

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = \arcsin \frac{5}{7}$, $\angle ACB = \arccos \frac{5}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

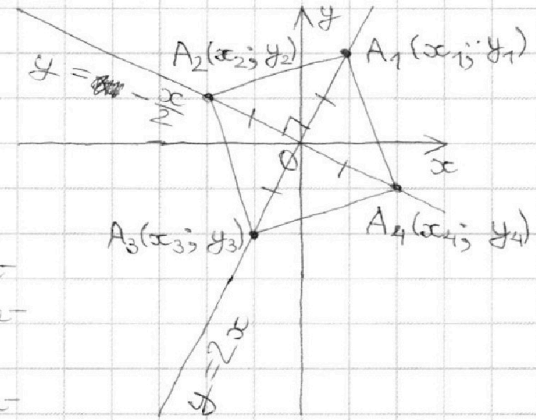
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 5

Обозначим вершины квадрата, лежащие в \overline{I} , \overline{II} , \overline{III} и \overline{IV} координатных четвертях, как $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, $A_3(x_3; y_3)$ и $A_4(x_4; y_4)$ соответственно. Все они равноудалены от начала координат, диагонали квадрата перпендикулярны, зн. при повороте на 90° против часовой стрелки относительно т. $O(0; 0)$ A_1 переходит в A_2 , A_2 - в A_3 , A_3 - в A_4 , A_4 - в A_1 , зн.



$$y_1 = x_4, \quad x_1 = -y_4.$$

Поскольку A_1 и A_3 лежат на прямой $y = 2x$, т.к. она проходит через \overline{I} и \overline{III} четверти, зн.

$$y_1 = 2x_1, \quad \text{но } y_1 = -x_1^5 + ax_1, \quad \text{зн.}$$

$$-x_1^5 + ax_1 = 2x_1$$

$$x_1^5 - ax_1 + 2x_1 = 0$$

$$x_1(x_1^4 - a + 2) = 0, \quad \text{но } x_1 \neq 0, \quad \text{зн. } x_1^4 - a + 2 = 0, \quad x_1^4 = a - 2.$$

$$y_1 = 2x_1$$

$$x_4 = -2y_4$$

$$y_4 = -\frac{1}{2}x_4, \quad \text{но } y_4 = -x_4^5 + ax_4, \quad \text{зн.}$$

$$-x_4^5 + ax_4 = -\frac{1}{2}x_4$$

$$x_4^5 - ax_4 - \frac{1}{2}x_4 = 0$$

$$x_4(x_4^4 - a - \frac{1}{2}) = 0, \quad \text{но } x_4 \neq 0, \quad \text{зн. } x_4^4 - a - \frac{1}{2} = 0, \quad x_4^4 = a + \frac{1}{2}.$$

$$x_4^4 = y_1^4 = (2x_1)^4 = 16x_1^4, \quad \text{зн. } a + \frac{1}{2} = 16(a - 2)$$

$$a + \frac{1}{2} = 16a - 32$$

$$15a = 32\frac{1}{2}$$

$$15a = \frac{65}{2}$$

$$a = \frac{13}{6}, \quad \text{зн. } x_1^4 = a - 2 = \frac{13}{6} - 2 = \frac{1}{6}, \quad x_1^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad y_1^2 = (2x_1)^2 =$$

$$= 4x_1^2 = \frac{4}{\sqrt{6}}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$OA_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}}} = \sqrt{\frac{5}{\sqrt{6}}}, \quad A_1A_4 = OA_1 \cdot \sqrt{2} =$$
$$= \sqrt{\frac{10}{\sqrt{6}}} = \sqrt{\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{50}{3}}$$

Ответ: $a = \frac{13}{6}$, сторона квадрата равна $\sqrt{\frac{50}{3}}$.



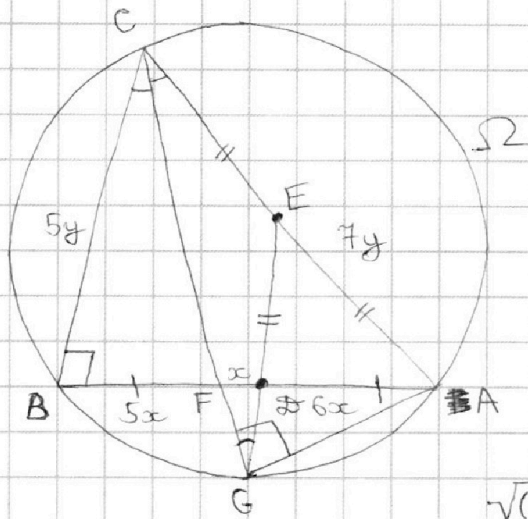
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



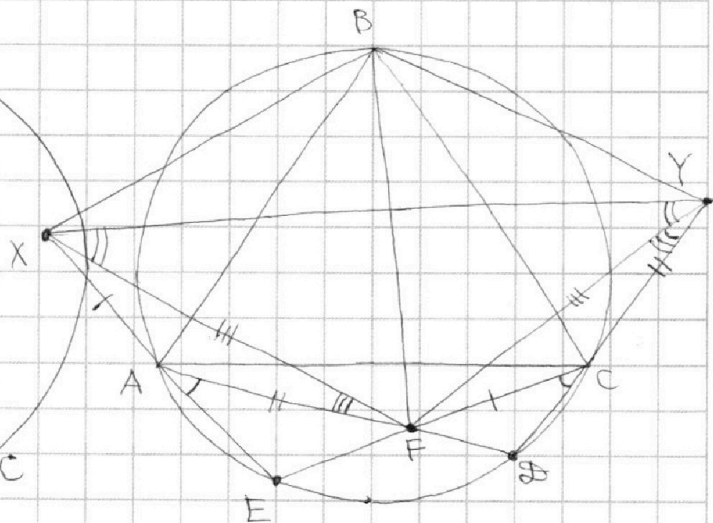
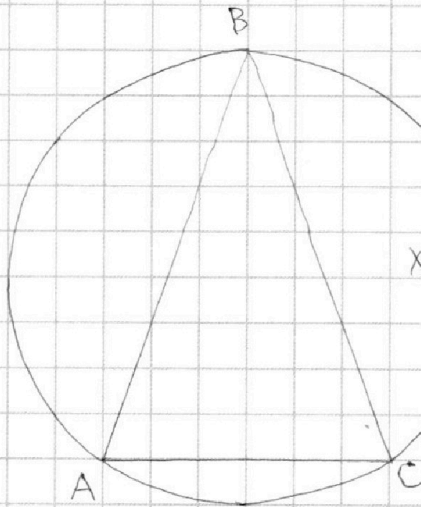
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$240 \cdot 60 = 14400 \times$$

$$\sqrt{(7y)^2 - (5y)^2} = \sqrt{24y^2} = 2\sqrt{6}y$$

$$k = 240 - x, \quad a = -120 + x, \quad c = 5^x \dots$$



$$k = 240 + x, \quad a = -120 - x, \quad c = 5^{-x} \dots$$

$$BF = 19, \quad XY = 36$$

$$a \leq b \leq c$$

$$a = 5^k \cdot 7^n, \quad q = 5^a \cdot 7^b = 5^{120-k} \cdot 7^{120-n}$$

$$abc = a^3 q^3 \Rightarrow aq = 5^{120} \cdot 7^{30} = 5^{k+a} \cdot 7^{n+b}$$

$$k > 240 \Rightarrow a < -120$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$

$$x^3 - 9 = 0 \Rightarrow x^3 = 9 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9} = 3^{\frac{2}{3}}$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^3 - x^2 - 8 = 0$$

$$x < -1: x^3 < 9, x^3 - x^2 - 8 < 0$$

$$-1 \leq x \leq 1: x^3 < 9, x^3 - x^2 < 8$$

$$x^2(y - 3) + x(34 - 11y) + 32y - 101 = 0$$

$$(11y - 34)^2 - 4(y - 3)(32y - 101) \geq 0$$

$$121y^2 - 748y + 1156 - 4(32y^2 - 197y + 303) \geq 0$$

$$121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 788y - 1212 \geq 0$$

$$-7y^2 + 40y - 56 \geq 0$$

(=)

$$7y^2 - 40y + 56 \leq 0$$

$$\frac{D}{4} = 400 - 7 \cdot 56 = 400 - 392 = 8$$

$$y_{1,2} = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{20 + 2\sqrt{2}}{7} \leq \frac{28}{7} = 4, \quad \frac{20 - 2\sqrt{2}}{7} > \frac{14}{7} = 2 \Rightarrow \underline{y = 3}$$

$$-x \cdot (-1) + 96 - 101 = 0$$

$$\underline{x = 5}$$

$$(5; 3)$$

$$\begin{array}{r} \times 34 \\ 34 \\ \hline + 136 \\ \hline + 102 \\ \hline 1156 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 > 9 \quad \text{и} \quad x^2 < 1 \rightarrow -1 < x < 1$$

$$x^3 - x^2 - 8 = (x^3 - 9) - (x^2 - 1)$$

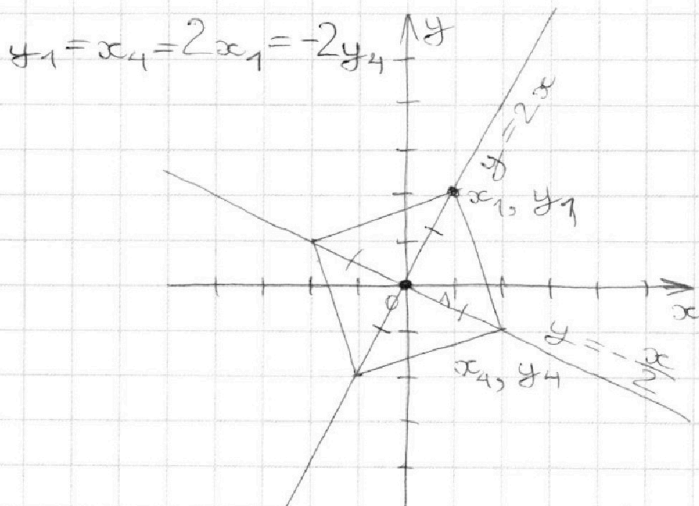
+
- +

$$x^3 \geq 9 \quad \text{и} \quad x^2 \leq 1 \quad - \text{реш. нет}$$

$$x^3 \leq 9 \quad \text{и} \quad x \geq 1 \quad - \quad x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}) \quad \oplus$$

$$\begin{aligned} -1 < x < 1: \quad 9 - x^3 + 1 - x^2 &\leq 8 - x^3 + x^2 & 9 - x^3 + 1 - x^2 &\leq x^3 - x^2 - 8 \\ 2x^2 &\geq 2 & 2x^3 &\geq 2 \\ x^2 &\geq 1 & x &\geq 1 \quad \ominus \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 > 9: \quad x^3 - 9 + x^2 - 1 &\leq x^3 - x^2 - 8 & x^3 - 9 + x^2 - 1 &\leq 8 - x^3 + x^2 \\ 2x^2 &\leq 2 & 2x^3 &\leq 18 \\ -1 &\leq x & x^3 &\leq 9 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x(x^4 - a + 2) &= 0 & x^4 &= a - 2 \\ -x^5 + ax &= 2x \\ x^5 - ax &= -2x \\ -x^5 + ax &= -\frac{x}{2} \\ x(x^4 - a - \frac{1}{2}) &= 0 \\ x^4 &= a + \frac{1}{2} \\ a &= \frac{13}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4^4 &= 16x_1^4 \\ y^4 &= a + \frac{1}{2} \\ 16(a - 2) &= a + \frac{1}{2} & 15a &= 32\frac{1}{2} = \frac{65}{2} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

