



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $5^{360} \cdot 7^{90}$ ?
3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $CF$  – биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $ED$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что площадь треугольника  $BCF$  в 25 раз больше площади треугольника  $DGF$ .
5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = -x^5 + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = 2x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и сторону квадрата.
6. [5 баллов] Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения  $abc$ .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность  $\omega$ , а на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , взяты точки  $E$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . На лучах  $EA$  и  $DC$  отметили точки  $X$  и  $Y$  соответственно таким образом, что  $AH = CF$  и  $CY = AF$ . Найдите площадь четырёхугольника  $BXFY$ , если  $BF = 19$ ,  $XY = 36$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$|x^3-9| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2-9|$  Обе части  $\geq 0$ , а значит  
мы можем возвести их в квадрат

$$x^3-x^2-9 = x^3-9 - (x^2-1)$$

$$(x^3-9)^2 + (x^2-1)^2 + 2(x^2-1)(x^3-9) \leq (x^2-1)^2 + (x^3-9)^2 - 2(x^2-1)(x^3-9)$$

$$4(x^2-1)(x^3-9) \leq 0$$

$$(x^2-1)(x^3-9) \leq 0$$

$$(x^2-1)(x^3-9) \leq 0$$

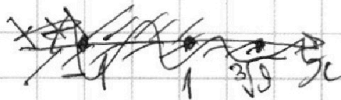
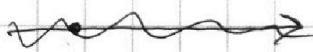
$$x^2-1=0$$

$$x^3-9=0$$

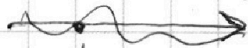
$$x^2=1$$

$$x=\sqrt[3]{9}$$

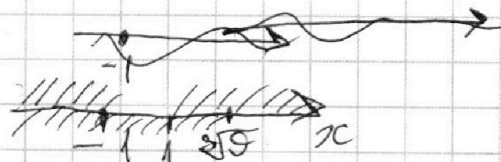
$$x=\pm 1$$



$$x \in [-1; 1]$$

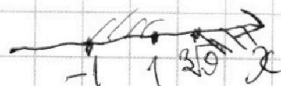


$$\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^3-9 \leq 0 \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$$



пересечение нет

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a, b, c \in \mathbb{N}$  ~~натуральные~~  
 $a \cdot b \cdot c = a^3 \cdot 9 \Rightarrow$  можно извлечь куб

$5^{360} \cdot 7^{90} = 5^{120} \cdot 7^{30} - a \cdot 9$ . Отсюда  
выходит тройка  $5^{120}, 5^{120} \cdot 7^{30}, 5^{120} \cdot 7^{60}$

$5^{120} \cdot 7^{30}$  - это гарантированно число  $b = a \cdot 9$

~~$5^{120} \cdot 7^{30} \cdot 9 = 5^{360} \cdot 7^{90}$~~

$7^{30}, 5^{120} \cdot 7^{30}, 5^{240} \cdot 7^{90}$  - данная тройка

точно удовлетворяет ус-вию

$7^{1360}, 5^{120} \cdot 7^{30}, 7^{75} \cdot 5^{180}$

$7^2 \cdot 5^{120}, 7^{30} \cdot 5^{120}, 7^{58} \cdot 5^{120}$

$7 \cdot 5^{120}, 7^{30} \cdot 5^{120}, 7^{31} \cdot 5^{120}$

$7^{30} \cdot 5^{120}, 7^{30} \cdot 5^{120}, 7^{30} \cdot 5^{120}$

$\Rightarrow$  Если проанализировать данные тройки

чисел, то можно сделать вывод, что если существуют

такие  $a$  и  $b$ , то такие  $a$  и  $b$

Но без какое-то число  $a$ , равное  $7^k \cdot 5^k$

$7^k \cdot 5^k$ , мы заменили  $7^{30-n} \cdot 5^{120-k}$  на  $7^{30-n} \cdot 5^{120-k}$

все  $7^{200}$  но это при условии что наш степеней не 0 и получаем  $7^{30} \cdot 5^{120}$ , а после это

не мало значит  $7^{30+30-n} \cdot 5^{120+120-k} = 7^{60-n} \cdot 5^{240-k}$

Далее и получаем  $7^{60-n+1+30} \cdot 5^{240-k+k+120}$

$= 7^{91-2n} \cdot 5^{360}$  ~~и все степени числа  $7$  не могут быть  $\leq 0$  иначе будет противоречие с  $91 - 2n \leq 0$  и  $n \geq 45.5$~~

более  $60$   $a^k$  не может быть больше  $240$  иначе степеней  $5$  будет  $\geq 360$  и  $360$  совпад  $\Rightarrow$  все так же может быть  $61 \cdot 240$ , но надо учитывать, что степеней  $61$  и  $240$  (или) Ответ: 1701

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$\text{Или } x^2(y-3) - 11x(x-3) - 2 + 32(y-3) - 5 = 0$$

$$(y-3)(x^2 - 11x + 32) - x - 5 = 0$$

$$x^2 - 11x + 32 = 0 \quad \begin{cases} y=3 \\ x=-5 \end{cases}$$

$$D = 121 - 128 < 0$$

$$D = (11y - 34)^2 - 4(y-3)(32y - 101) = 121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 404y + 384y - 1212 = -56 - 7y^2 + 40y$$

$$-7y^2 - 56 + 40y = 0 \quad 7y^2 + 56 - 40y = 0$$

$$D = 1600 - 1568 = 32 \quad y = \frac{40 \pm \sqrt{32}}{14} = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$

$$x = \frac{11y - 34 \pm \sqrt{(11y - 34)^2 - 4(y-3)(32y - 101)}}{2y - 6} \quad \text{из формулы}$$

$y > \frac{20 + 2\sqrt{2}}{7}$  и второе число получается  
 $y < \frac{20 - 2\sqrt{2}}{7}$  второе число, так что  $y$   
нас остается только пара  $3$  и  $-5$

Ответ:  $(-5; 3)$



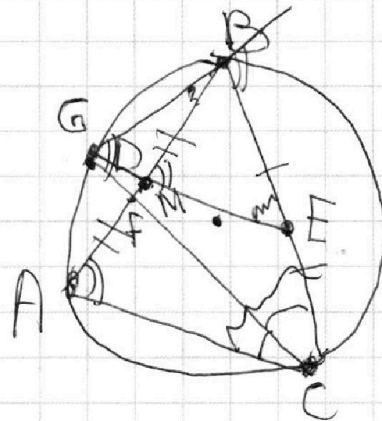
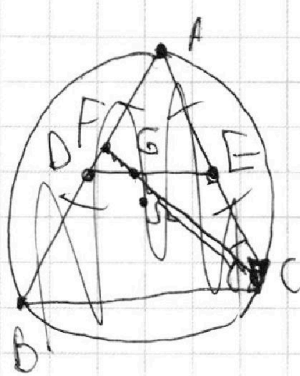
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{BCF} = 2.5 S_{GDF}$$

$$\angle DFE = \angle A$$

$$\angle GFM = \frac{\angle B - \angle C}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

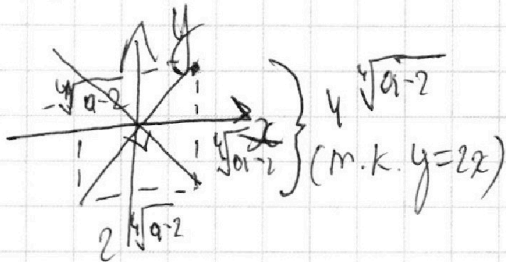


$$y = -x^5 + ax$$

$$2x = -x^5 + ax \quad x = \pm \sqrt[4]{a-2}$$

$$y = 2x$$

$$2x = -x^4 + a \quad \text{Найдем диагональ из прямоугольного \(\Delta\)}$$



$$\text{диагональ} = \sqrt{4\sqrt[4]{a-2} + 16\sqrt[4]{a-2}} =$$

$$= 2\sqrt{5\sqrt[4]{a-2}} = 2\sqrt{5a-50}$$

$$\text{сторона} = \frac{\text{диагональ}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{2\sqrt{5a-50}} =$$

$$= \sqrt[4]{100a-200}$$

Можно сказать что вторая диагональ лежит на стороне

на стороне заданной  $y = -\frac{1}{2}x$  т.к. при этом образуется прямая угол между диагоналями, что нам и нужно, ибо у нас квадрат

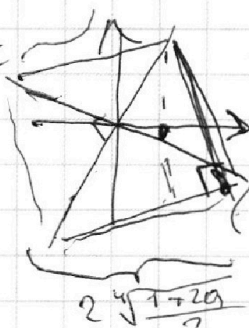
$$-\frac{1}{2}x = -x^5 + ax$$

$$-1 = -2x^4 + 2a$$

$$1 = 2x^4 - 2a$$

$$\frac{1+2a}{2} = x^4$$

$$x = \pm \sqrt[4]{\frac{1+2a}{2}}$$



Найдем сторону из прямоугольного \(\Delta\)

$$\text{диагональ} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{2\sqrt[4]{\frac{1+2a}{2}}}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{1+2a}{2}} =$$

$$= \sqrt[4]{25+50a}$$

$$\sqrt[4]{\frac{25+50a}{2}} = 2\sqrt[4]{\frac{25a-50}{121^2}}$$

$$\text{длина ст} = \sqrt[4]{100 \cdot \frac{13}{6} \cdot 200} =$$

$$= \sqrt[4]{100 \cdot \frac{1}{6}} = \sqrt[4]{\frac{100}{6}} =$$

$$\frac{25+50a}{2} = 16(25a-50a) / 121$$

$$\frac{1+2a}{2} = 16a - 32a / 121$$

$$a = \frac{65}{30} = 2\frac{1}{6} = \sqrt[4]{16(6)} \approx 2$$

$$1+2a = 32a - 64 \quad 30a = 65$$

$$\text{Ответ: } 2\frac{1}{6}, \sqrt[4]{16(6)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a + \frac{7}{b} &= b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} \\ a &= b - \frac{7}{b} + \frac{7}{c} = c - \frac{7ab - 7ac - 7bc - 7ac + 7ab}{abc} \\ b &= c - \frac{7}{c} + \frac{7}{b} + \frac{7}{a} = c - \frac{7ab - 7ac - 7bc}{abc} \end{aligned}$$
$$= \frac{7ab - 7ac - 7bc}{abc} = \frac{abc^2 - 7ab + 7ac + 7bc}{abc} = a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$

$|x^3 - x^2 - 8| = |x^3 - 9 - x^2 + 1|$

$(x-y) |x^2 + yx + y^2|$

$|x^3 - 9| + |(x-1)(x+1)| \leq |(x-2)(x^2 + 2x + 4) - x^4|$

$x^3 - 9 < 0$      $(x-1)(x+1) < 0$

$x^3 < 9$      $x < x - 1 < 0$

$x < \sqrt[3]{9}$      $x > x < 1$

$2 < \sqrt[3]{9} < 2,1$      $x + 1 < 0$

$x < -1$

$y = -x^5 + ax$

$y = 2x$

$2x = -x^5 + ax$

$2 = -x^4 + a$

$|a| + |b| \leq |a - b|$

$2 + x^4 = a$

$1 - 1 < x \leq 1$     2)  $1 < x \leq 2$

$9 - x^3 + 1 - x^2 \leq 8 + x^2 - x^3$      $9 - x^3 + x^2 - 1 \leq 8 + x^2 - x^3$

$1 \leq 2x^2$

$x^2 \geq \frac{1}{2}$

$x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x \in [-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}; 1]$

$(x^3 - 9)^2 + (x^2 - 1) + 2(x^2 - 1)(x^3 - 9) \leq (x^3 - 9)^2 + (x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1)(x^3 - 9)$

$4(x^2 - 1)(x^3 - 9) \leq 0$

$x^3 - 9 < 0$      $x^2 + 1 < 0$

$x^3 < 9$      $x^2 < -1$

$x < 2$

$x^2 + 2x + 4 < 0$

$D = 4 - 16 = -12$

$(x-2)(x^2 + 2x + 4) < x^2$

$x^2 + 2x + 4 > x^2$

$x^3 < x^2 + 8$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$D = (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) =$$

$$= 121y^2 - 778y + 1156 - 128y^2 + 404y + 384y - 1212 =$$

$$= -7y^2 + 40y - 56$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 324 \\ \hline 648 \\ 1020 \\ \hline 1020 \\ 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 34 \\ \hline 68 \\ 102 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 32 \\ \hline 64 \\ 128 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 32 \\ \hline 64 \\ 128 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 56 \\ \hline 112 \\ 392 \\ \hline 392 \\ 1568 \end{array}$$

$$-7y^2 + 40y - 56 = 0$$

$$7y^2 - 40y + 56 = 0$$

$$D = 1600 - 4 \cdot 392 = 1600 - 1568 = 32$$

$$-1568 = 32$$

$$y = \frac{40 \pm \sqrt{32}}{14}$$

$$= \frac{40 \pm 4\sqrt{2}}{14} = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$

$$x = y - 11y + 34 = 34 - 10y = 34 - 10 \cdot \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 5 = 0$$

$$+ 32y - 32(y-3) - 5 = 0$$

$$(y-3)(x^2 - 11x + 32) - x - 5 = 0$$

$$x^2 - 11x + 32 = 0$$

$$(y-3)(x^2 - 11x + 32) - x - 5 = 0$$

$$D = 121 - 128 = -7 < 0$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$34 \cdot \frac{32}{11} = 2 \frac{10}{11}$$

$$\begin{array}{r} -3x^2 + 34x - 101 \\ 340 \mid 11 \\ -33 \quad 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 340 \\ -340 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \mid 11 \\ -22 \quad 10 \\ \hline 100 \end{array}$$

$$-3x^2 + 34x - 101 = 0$$

$$D = 1156 - 1212 = -56$$



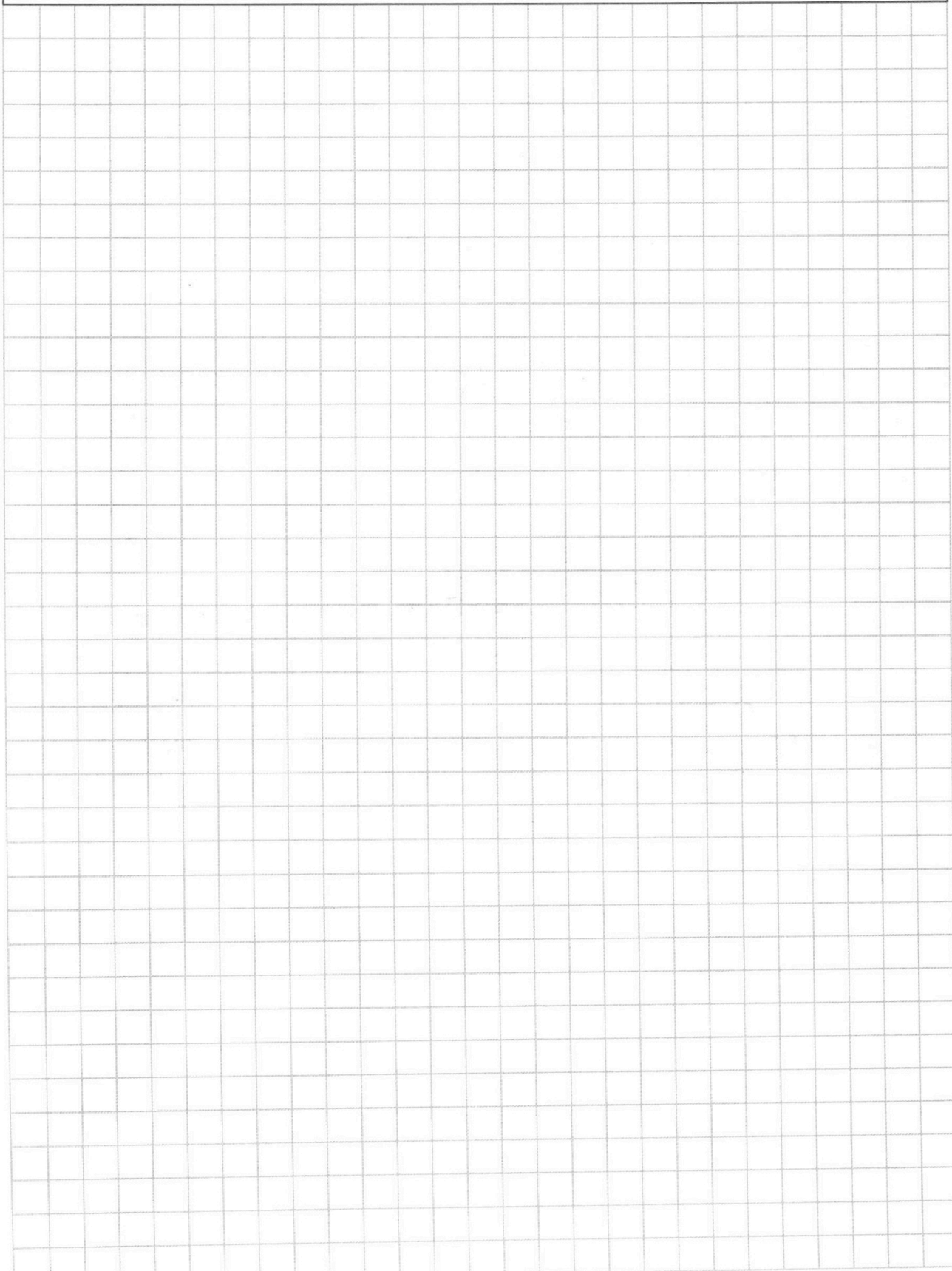
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = -x^5 + ax$$

$$y = 2x$$

$$\begin{cases} -x^5 + ax = 2x \\ -x^5 + ax = -2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^5 + ax = 2 \\ -x^5 + ax = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 + x^4 \\ a = -2 - x^4 \end{cases}$$

$$x = \pm \sqrt[4]{a-2}$$

$$-x^5 + (-x^5 + ax) = 2x$$

$$-2x^5 + (a-2)x = 0$$

$$x(x^4 + a - 2) = 0$$

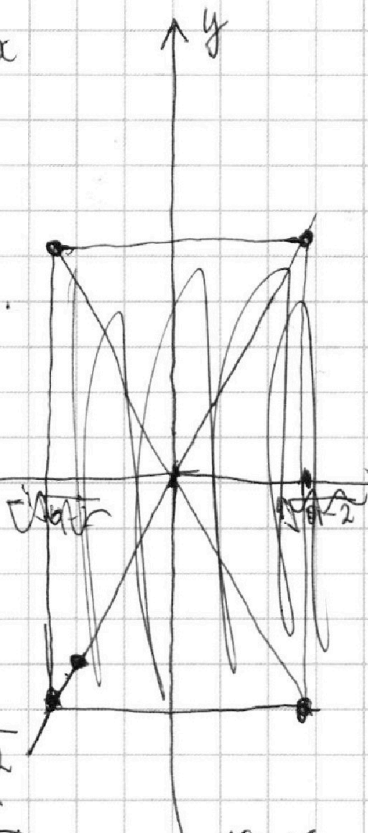
$x = 0$ , но это невозможно или  $x = \pm \sqrt[4]{a-2} \Rightarrow$  длина стороны

$-2x^4 + a - 2 = 0 \Rightarrow$  длина стороны квадрата  $\sqrt[4]{2(a-2)}$

и то  $2\sqrt[4]{a-2}$  длина диагонали  $2\sqrt{2}\sqrt[4]{a-2}$

$$d = \frac{2\sqrt{2(a-2)}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{a-2}$$

$$= \sqrt{4(a-2)} = \sqrt{4a-4}$$



т.к. все вершины квадрата лежат на графике  $-x^5 + ax$  и при этом одна из диагоналей лежит на  $y = 2x$ , а значит она пересекает  $-x^5 + ax$ .

Поэтому можно сказать, что длина диагонали будет лежать на  $y = 2x$

$$\begin{cases} 2x \\ -2x(a-2) \end{cases}$$

