



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $2^{150} \cdot 3^{300}$ ?
3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $CF$  – биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $ED$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что площадь треугольника  $BCF$  в 16 раз больше площади треугольника  $DGF$ .
5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = x^5 + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = -3x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и сторону квадрата.
6. [5 баллов] Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения  $abc$ .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность  $\omega$ , а на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , взяты точки  $E$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . На лучах  $EA$  и  $DC$  отметили точки  $X$  и  $Y$  соответственно таким образом, что  $AX = CF$  и  $CY = AF$ . Найдите площадь четырёхугольника  $BXFY$ , если  $BF = 17$ ,  $XY = 31$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача (a; b; c) - геом. прогрессия;  $abc = 2^{150} \cdot 3^{100}$ .

Числа a, b, c можно представить в виде:  $a = a$ ;  $b = aq$ ;  $c = aq^2$ .

Тогда:  $abc = a^3 q^3 = 2^{150} \cdot 3^{100} \Rightarrow aq = \sqrt[3]{2^{150} \cdot 3^{100}} =$   
 $2^{50} \cdot 3^{100/3}$ , т.е. второй член прогрессии равен  $2^{50} \cdot 3^{100}$ , первый будет равен  $\frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q}$ , а третий равен  $2^{50} \cdot 3^{100} q$ , т.е. мы имеем тройку чисел:

$(\frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q}; 2^{50} \cdot 3^{100}; 2^{50} \cdot 3^{100} q)$ . Знаменатель прогрессии q это какая-то дробь  $\frac{m}{n}$ , где обязательно  $m = 2^i 3^j$ , а  $n = 2^k 3^l$ , т.к. в противном случае числа a, b, c не будут принадлежать множеству натуральных чисел.

Таким образом:  $q = \frac{m}{n} = \frac{2^i 3^j}{2^k 3^l} = 2^{i-k} \cdot 3^{j-l}$ .

Знаменатель прогрессии q можно представить, как

(1)  $q = \frac{1}{2^k 3^l}$  или (2)  $q = 2^k 3^l$  или (3)  $q = \frac{2^k}{3^l}$  или (4)  $q = \frac{3^l}{2^k}$ , где k, l -

- неотрицательные целые числа. Других простых множителей кроме 2 и 3 он содержать не может, так как либо 10й член не будет целым, либо 3й.

Рассмотрим 1й вариант (1). Если  $k, l > 0$ , то  $k \in [1; 50]$ ,  $l \in [1; 100]$   $\Rightarrow 50 \cdot 100 = 5000$  вариантов образования q. Если  $k=0, l>0$ , то ещё 100 вар. Если  $l=0, k>0$ , то ещё 50 вар.

Рассмотрим вариант (2). Аналогично варианту (1) получим 5150 вариантов образования q.

Рассмотрим вариант (3). Здесь используем только случаи, когда  $k > 0, l > 0$ , т.к. случаи равенства k или l нулю мы уже рассмотрели в первых двух вариантах. Получим  $50 \cdot 100 = 5000$  способов образ. q, где  $k \in [1; 50]$ ,  $l \in [1; 100]$ .

Рассмотрим вариант (4). Аналогично варианту (3) здесь 5000 способов образования q. Итого имеем всего

$5150 \cdot 2 + 5000 \cdot 2 = 10300 + 10000 = 20300$  вар.  $\Rightarrow$  существует 20300 троек таких чисел, т.к. q задает 1 тройку. Ответ: 20300 троек

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.  $x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$   
Можно рассмотреть это уравнение, как квадратное относительно  $x$ . Оно имеет решение в действ. числах, если его дискриминант неотрицателен.

$$D = (13y - 27)^2 - 4 \cdot (y - 2)(44y - 94) \geq 0$$

$$169y^2 + 27^2 - 26 \cdot 27y - 4(44y^2 - 88y - 94y + 188) \geq 0$$

$$(169 - 4 \cdot 44)y^2 + y(88 + 94) \cdot 4 - 26 \cdot 27 + 27^2 - 4 \cdot 188 \geq 0$$

$$-7y^2 + 26y - 23 \geq 0$$

$$7y^2 - 26y + 23 \leq 0 \quad (1)$$

Каждому числу функции  $f(y)$  в левой части неравенства:

$$7y^2 - 26y + 23 = 0$$

$$D = 26^2 - 4 \cdot 7 \cdot 23 = 26^2 - 28 \cdot 23 = 676 - 644 = 32 = 4\sqrt{2}$$

$$y_1 = \frac{26 + 4\sqrt{2}}{14} \quad y_2 = \frac{26 - 4\sqrt{2}}{14} \Rightarrow$$

неравенство (1) верно при  $y \in \left[ \frac{26 - 4\sqrt{2}}{14}; \frac{26 + 4\sqrt{2}}{14} \right]$ . Определим границы данного отрезка:

$$\frac{26 + 4\sqrt{2}}{14} = 1 < \sqrt{2} < 2$$

$$\frac{26 - 4\sqrt{2}}{14} = 4 < 4\sqrt{2} < 8$$

$$\frac{26 + 4\sqrt{2}}{14} < 30 < 26 + 4\sqrt{2} < 34$$

$$2\frac{1}{7} = \frac{30}{14} < \frac{26 + 4\sqrt{2}}{14} < \frac{34}{14} = 2\frac{3}{7}. \text{ Т.к. } y \in \mathbb{Z}, \text{ то } y \leq 2 \quad (*)$$

$$-8 < -4\sqrt{2} < -4$$

$$18 < 26 - 4\sqrt{2} < 22$$

$$1\frac{2}{7} = \frac{18}{14} < \frac{26 - 4\sqrt{2}}{14} < \frac{22}{14} = 1\frac{4}{7}. \text{ Т.к. } y \in \mathbb{Z}, \text{ то } y \geq 2 \quad (**)$$

Из (\*) и (\*\*) следует, что  $y = 2$ , тогда исходное уравнение при подстановке примет вид:

$$-x(13 \cdot 2 - 27) + 44 \cdot 2 - 94 = 0$$

$$x + (-6) = 0 \Rightarrow x = 6. \text{ Т.е. подходит единствен-}$$

ная пара  $(6; 2)$ .

Ответ:  $(6; 2)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

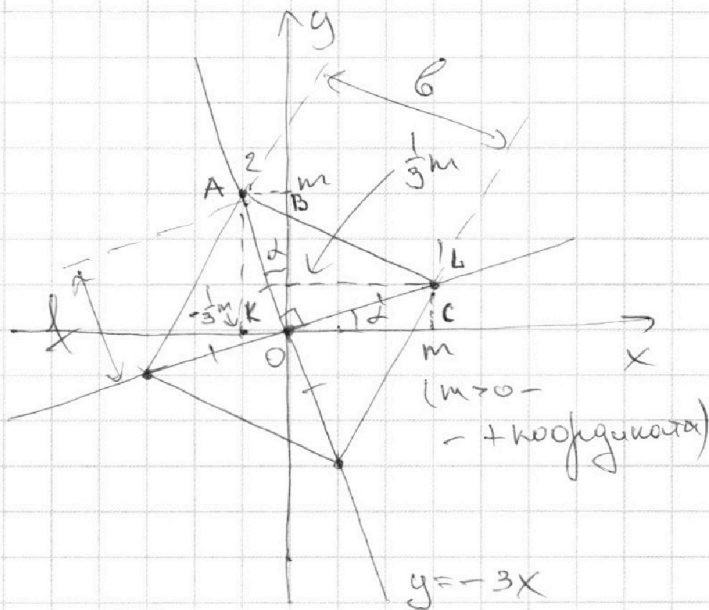
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5  $y = x^5 + ax$ ;  $y = -3x$  — прямая диагональ квадрата, центр совпадает с началом координат.

Диагональ квадрата  $\perp$   $\Rightarrow$  вторая диагональ его должна лежать на прямой  $y = \frac{1}{3}x$ . Это можно показать поворотом системы координат на угол между прямой  $y = -3x$  и осью ординат. В силу симметрии, если прямая, содержащая вторую диагональ квадрата должна совпасть с  $Ox$  после поворота  $\Rightarrow$  угол между 2ой прямой и осью  $Ox$  также равен  $\alpha \Rightarrow$  вторая прямая задается уравнением  $y = \frac{1}{3}x$



Из симметрии рисунка видно, что если точка 1 имеет координаты  $(m; \frac{1}{3}m)$ , то точка 2 имеет координаты  $(-\frac{1}{3}m; m)$ ,  $\triangle AOB = \triangle LOC$  по гипотенузе и острому углу. Тогда справедливы уравнения:

$$\begin{cases} m^5 = (-\frac{1}{3}m)^5 + a(-\frac{1}{3}m) & (1) \\ \frac{1}{3}m = m^5 + am & (2) \end{cases}$$

Из уравнения (2):  $a = \frac{1}{3}m - m^4$ , при  $m \neq 0$ . (3)

Подставим  $a$  из (3) в (1):

$$\frac{1}{3}m = (-\frac{1}{3})^5 m^5 - \frac{1}{3}m(\frac{1}{3} - m^4), \text{ при } m \neq 0:$$

$$-1 = \frac{1}{3^5} m^4 + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} m^4 \Rightarrow \left(\frac{1}{3^5} - \frac{1}{3}\right) m^4 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^5}\right) m^4 = \frac{10}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{80}{243} m^4 = \frac{10}{9} \Rightarrow m^4 = \frac{10}{9} \cdot \frac{243}{80} = \frac{243}{72} = \frac{81}{24} \Rightarrow m = \pm \sqrt[4]{24}, \text{ но}$$

$$m > 0 \Leftrightarrow m = \sqrt[4]{24} \Rightarrow a = \frac{1}{3} - \frac{81}{24} = -\frac{73}{24}. \text{ Теперь найдём}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

**МФТИ**

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

сторону в квадрата. По Теореме Пифагора:

$$b^2 = f^2 + f^2 \Rightarrow b = \sqrt{2}f. \text{ Остается найти расстояние}$$

$f$ . Если катетам по Т. Пифагора для  $\triangle AOK$ :

$$f^2 = m^2 + \left(\frac{1}{3}m\right)^2 \Rightarrow f^2 = m^2 + \frac{1}{9}m^2 = \frac{10}{9}m^2 \Rightarrow f = \frac{\sqrt{10}}{3}m =$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{100}{24}} = \sqrt{\frac{50}{12}} = \sqrt{\frac{25}{6}} \Rightarrow b = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{25}{6}} =$$

$$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{\frac{25}{6}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 4}{6}} = \sqrt{\frac{100}{6}} - \text{сторона квадрата.}$$

$$\text{Ответ: } a = -\frac{13}{24}; \quad b = \sqrt{\frac{100}{6}} - \text{сторона квадрата}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 6  $a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$

$$\begin{cases} a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \quad | \cdot abc \\ b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad | \cdot abc \\ a + \frac{5}{b} = c + \frac{5}{a} \quad | \cdot abc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(abc) + 5ac = (abc) \cdot b + 5ab \\ b(abc) + 5ab = (abc) \cdot c + 5bc \\ c(abc) + 5bc = (abc) \cdot a + 5ac \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (abc)(a-b) = 5a(b-c) \\ (abc)(b-c) = 5b(c-a) \\ (abc)(c-a) = 5c(a-b) \end{cases} \quad \div : (abc)$$

Перемножим:  $(abc)^3 \cdot (a-b)(b-c)(c-a) = 5^3 \cdot abc(b-c)(c-a)(a-b)$

Если  $\geq 1$  из скобок равна 0, то  $a=b=c$ , что

противоречит условию  $\Rightarrow (abc)^3 = 5^3 \cdot abc \Rightarrow$

$$\Rightarrow abc = \sqrt[3]{5^3} = 5\sqrt{5}$$

Ответ:  $abc_{\min} = 5\sqrt{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

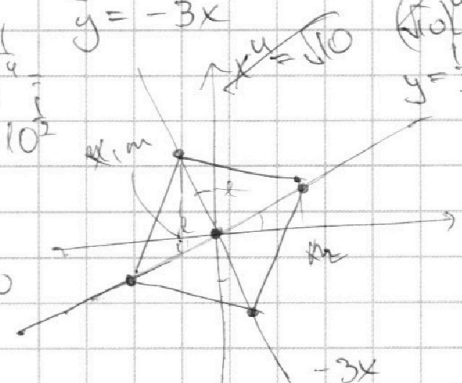
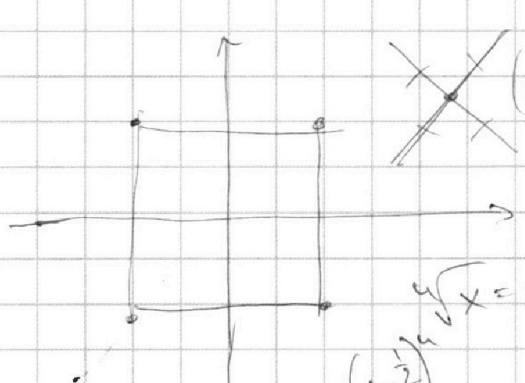
$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

5.

$$y = x^5 + ax \quad y'(x) = 5x^4 + a$$

$$y = -3x$$

$$y = \frac{1}{3}x$$



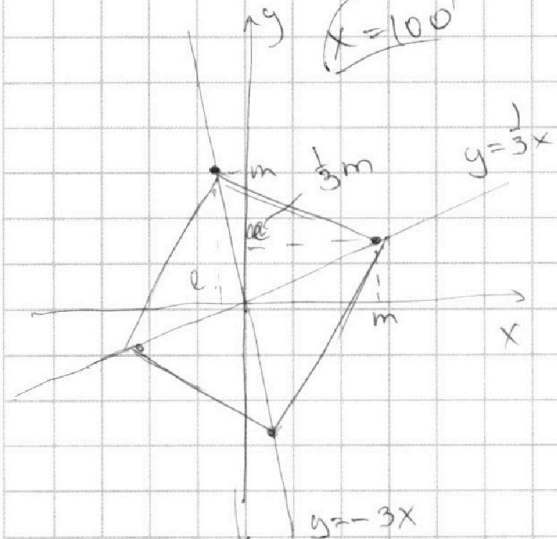
$$\sqrt[4]{100^2} = 100^{2 \cdot \frac{1}{4}} = 100^{0.5} = 100^{1/2} = 10$$

$$x = (10^2)^{1/4} = 100^{1/4}$$

$$m = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} m = -3l \\ l = \frac{1}{3}m \end{cases}$$

$$l = -\frac{1}{3}3l \Rightarrow l = -l$$



$$\begin{aligned} y &= x^5 + ax & l &= m^5 + am \\ l &= m^5 + ax & m &= l^5 + al \\ m &= l^5 + ax \end{aligned}$$

$$g \cdot g = 81$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{2} \Rightarrow x = (\sqrt{2})^4 = 4$$

$$l = m^5 + am = \frac{1}{3}m$$

$$m^4 + a = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3} - m^4$$

$$y = x^5 + (\frac{1}{3} - m^4)x$$

$$2^4 = 16$$

$$m = (\frac{1}{3}m)^5 + (\frac{1}{3} - m^4) \cdot (\frac{1}{3}m)$$

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

$$1 = -(\frac{1}{3})^5 \cdot m^4 + (m^4 - \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{3}$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{3^5} =$$

$$1 = -\frac{1}{3^5} + m$$

$$1 = (\frac{1}{3})^5 m^4 + \frac{1}{3}m - \frac{1}{9}$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

$$ab + 5 = b^2 + \frac{5}{c}b$$

$$ab + 5 = b^2 + \frac{5}{c}b \Rightarrow b^2 - ab - \frac{5}{c}b + 5 = 0$$

$$b^2 + (\frac{5}{c} - a)b - 5 = 0$$

$$c^2 + (\frac{5}{a} - b)c - 5 = 0$$

$$a^2 + (\frac{5}{b} - c)a - 5 = 0$$

$$abc^2 + (\frac{5}{c} - a)abc - 5abc = 0$$

$$\frac{3^4 - 1}{3^5} = \frac{80}{81 \cdot 3} = \frac{80}{243}$$

$$\frac{80}{243}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{81}{24} =$$

$$\frac{8-81}{24} = -\frac{73}{24}$$

$$(10^2)^{1/4} = 10^{1/2} = \sqrt{10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-2) \cdot x(13y+27) + 44y - 94 = 0$$

$$x^2y - 2x^2 - 13xy + 27x + 44y - 94 = 0$$

$$xy(x-13)$$

$$(13y+27)^2 - 4(y-2)(44y-94) \geq 0 = 176$$

$$(13y+27)^2 - 4(y-2)(44y-94) \geq 0$$

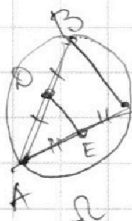
$$169y^2 + 27^2 - 2 \cdot 13 \cdot 27 - 4 \cdot (44y^2 - 88y - 94y + 94 \cdot 2) \geq 0$$

$$169y^2 + 27^2 - 26 \cdot 27 - 4 \cdot (44y^2 - 182y + 188) \geq 0$$

$$169y^2 + 27^2 - 26 \cdot 27 - 4 \cdot 44y^2 + 4 \cdot 182y - 4 \cdot 188 \geq 0$$

$$y^2(169 - 4 \cdot 44) + y(4 \cdot 182 - 26 \cdot 27) + 27^2 - 4 \cdot 188 \geq 0$$

$$-7y^2 + 26y - 729 \geq 0 \quad y \in \mathbb{C} \dots$$



$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 128 - 26 \cdot 27 \\ 728 - 702 = 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 23 \\ \hline 184 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 11 \\ \hline 616 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 < \sqrt{2} < 2 \\ 4 < 4\sqrt{2} < 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ - 176 \\ \hline -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 27 \\ \hline 189 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times 11 \\ \hline 594 \end{array}$$

$$-(752 - 729) = 23$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 4 \\ \hline 176 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 27 \\ \hline 182 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ \times 4 \\ \hline 208 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 702 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 182 \cdot 4 \\ \times 182 \\ \hline 728 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 188 \\ \times 4 \\ \hline 752 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 752 \end{array}$$

$$26^2 - (4 \cdot 7 \cdot 23)$$

$$26^2 - 28 \cdot 23$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ - 8 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$abc \geq$$

$$a \neq b \neq c$$

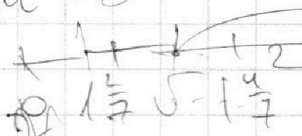
$$abc \rightarrow \min$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

$$ab + 5 = bc + 5$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$



$$88 - 94 = -6$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1. \quad \underbrace{|x^3+4|}_a + \underbrace{|x^2-1|}_b \leq \underbrace{|x^3-x^2+5|}_{a+b} \quad \left\{ \begin{array}{l} |3|+|5|=|8| \\ 8=8 \\ |1-3|+|5|=|2+5| \\ 8 > 2 \\ |1-3|+|1-4|=|-1-4|=5 \\ 3+4=7 \end{array} \right.$$

$$|a|+|b| \leq |a+b| \Rightarrow \text{но } |a|+|b| > |a+b|$$

$$\Rightarrow |a|+|b| = |a+b|$$

$$\begin{cases} a = -x, x, y \geq 0 \\ b = y \end{cases}$$

$$|x^3+4| + |x^2-1| = |x^3-x^2+5|$$

$$x+y = |y-x| \Rightarrow \sqrt[3]{4} \leq 2$$

$$x+y = y-x \Rightarrow x=0$$

Если разность знамен, то не работает

$$1) \quad \begin{array}{l} x^3+4 \geq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{array} \quad 2) \quad \begin{array}{l} x^3+4 < 0 \\ x^2-1 < 0 \end{array} \quad 1) \quad \begin{array}{l} x^3+4 \geq 0 \\ -x^2+1 \geq 0 \end{array} \quad 2) \quad \begin{array}{l} x^3+4 < 0 \\ -x^2+1 < 0 \end{array}$$

$$\cancel{x^3+4} + x^2-1 = |x^3+4|$$

$$\cancel{x^3+4} + x^2-1 = x^3-x^2+5$$

Вариант:

$$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2+5|$$

$$|a|+|b| = |a+b|$$

$$x+y = |y-x|$$

$$x^2 \leq 1 \Rightarrow x \in [-1; 1]$$

$$|x^3+4| + |-x^2+1| \leq |x^3+4-x^2+1|$$

$$\begin{cases} x+y = x-y \\ x+y = y-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 \geq -4 \\ x \geq \sqrt[3]{4} \end{cases}$$

$$|a|+|b| \leq |a+b| \Rightarrow \text{но } |a|+|b| > |a+b|$$

Случай 1:  $a \geq 0, b \geq 0 : \begin{cases} x^3+4 \geq 0 \\ -x^2+1 \geq 0 \end{cases}$

Случай 2:  $a \leq 0, b \leq 0$

$$-x^3-4+x^2-1 = -x^3-4+x^2-1$$

$$x^3+4-x^2+1 = x^3+4-x^2+1$$

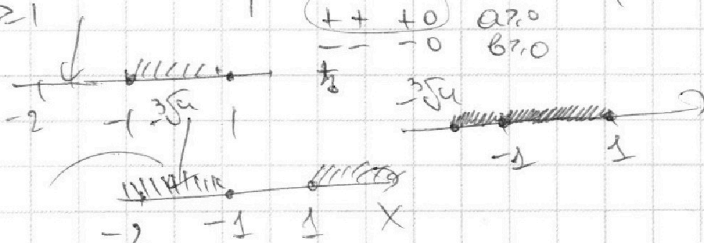
$$\forall x, \text{ при } x^3 \leq -4$$

при любых таких x работает

$$x \leq -\sqrt[3]{4}$$

$$x^2 \geq 1$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(a, b, c) \in \mathbb{N} \quad abc = 2^{50} \cdot 3^{300}$$

$$a = a \quad (a; aq; aq^2)$$

$$b = aq$$

$$c = aq^2$$

$$a^3 q^3 = 2^{150} \cdot 3^{900}$$

$$aq = 2^{50} \cdot 3^{100}$$

Свободы  
для a:

$$a = 2^k \cdot 3^m$$

$$0 \leq k \leq 50$$

$$0 \leq m \leq 100$$

~~$$a; 2^{50} \cdot 3^{100}; 2^{100} \cdot 3^{200}$$~~

~~$$1; 2^{50} \cdot 3^{100}; 2^{100} \cdot 3^{200}$$~~

~~$$2^{150} \cdot 3^{300}$$~~

Если a простое  $\rightarrow$

$\rightarrow$  простое q  $\Rightarrow$

$$6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

$$51 \cdot 101 \in$$

Бот  
стабильно  
амерк

кислор

$$0 \leq p_i \leq 50 \quad a = \frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q^{50}}$$

$$0 \leq p_i \leq 50$$

$$(x; 2^{50} \cdot 3^{100}; y)$$

$$\frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q}; 2^{50} \cdot 3^{100}; 2^{50} \cdot 3^{100} \cdot q$$

$$q = \frac{m}{n}$$

$$S = \frac{6(q^2 - 1)}{q^2 + 1} \quad \begin{matrix} z \in [0; 50] \\ k \in [0; 50] \\ t \in [0; 100] \\ m \in [0; 100] \end{matrix}$$

$$q = \frac{2^k \cdot 3^m}{2^z \cdot 3^t}$$

$$\frac{2^{2z} \cdot 3^{2t}}{2^{2k} \cdot 3^{2m}} \in \mathbb{N}$$

~~$$2^z \cdot 3^t \rightarrow 2^z \cdot 3^t \cdot 50 \cdot 101$$~~
~~$$4q \cdot 50 \cdot 50 \cdot 101$$~~

$$+ 51 + 51 =$$

$$= 2500 + 102 = 2602 \text{ наим}$$

$$q = 2^\alpha \cdot 3^\beta \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2^\alpha \cdot 3^\beta}$$

$$2^z \cdot 3^t$$

$$2^z \cdot 3^t$$

$$2^z \cdot 3^t$$

~~$$50 \cdot 50 = 2500$$~~

$$50 \cdot 100 + 50 \cdot 100$$

$$= 2^\alpha \cdot 3^\beta$$

$$\frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q} \quad \alpha, \beta > 0$$

$$\frac{1}{2^\alpha} \cdot 50 + 50 \cdot \frac{1}{3^\beta} + 100 + 100$$

$$\alpha, \beta < 0$$

$$50 \cdot 50 =$$

$$\begin{cases} 2^{50} \cdot 3^{100} \cdot 2^{-\alpha} \cdot 3^{-\beta} = \frac{1}{2^\alpha \cdot 3^\beta} \\ 2^{50} \cdot 3^{100} \cdot 2^\alpha \cdot 3^\beta = \frac{1}{2^\alpha \cdot 3^\beta} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 0 \leq \alpha \leq 50 \\ 0 \leq \beta \leq 100 \end{matrix}$$

$$2 \cdot 50 \cdot 100 + 100 + 200 = 100^2 + 300 =$$

$$= 2$$

$$\alpha, \beta > 0$$

$$2^z \cdot 3^t$$

$$\alpha, \beta > 0 \Rightarrow$$

$$= 10000 + 300 = 10300$$

$$= \frac{10300}{2^\alpha \cdot 3^\beta}$$

$$\frac{2^\alpha}{2^\alpha \cdot 3^\beta}$$

$$\frac{2^\alpha}{2^\alpha \cdot 3^\beta}$$

$$50 \cdot 100 + 100 + 50$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 6.

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \quad | \cdot b \quad a = b + \frac{5}{c} - \frac{5}{b}$$

$$ab + 5 = b^2 + \frac{5b}{c}$$

$$b + \frac{5}{c} = c + \frac{5bc}{b^2c + 5b - 5c} \quad b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{b + \frac{5}{c} - \frac{5}{b}}$$

$$\frac{bc + 5}{c} = \frac{b^2c^2 + 5bc - 5c^2 + 5bc}{b^2c + 5b - 5c} = \frac{b^2c^2 + 10bc - 5c^2}{b^2c + 5b - 5c}$$

$$b^2c^3 + 10bc^2 - 5c^3 = b^3c^2 + 5b^2c - 5c^2b + 5b^2c + 25b - 25c$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad abc = z$$

$$\frac{z}{bc} + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \quad z = z + 5c = b^2c + 5b \quad abc \rightarrow \min$$

$$\frac{z}{ab} + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad z + 5a = b^2a + 5c \quad a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

$$z = b^2c + b \cdot 5 - 5c \quad z = \frac{25}{4c^2} - \frac{25}{2c} - 5c \quad \min \quad abc + \frac{5}{c}$$

$$x_{\min} = -\frac{5}{2c}$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$abc + 5c = b^2c + 5b$$

$$b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$1) a \cdot (abc) + 5ac = (abc) \cdot b + 5ab$$

$$abc + 5a = b^2ac + 5c$$

$$b \cdot (abc)$$

$$b \cdot (abc) + 5ab = (abc) \cdot c + 5bc$$

$$2) b \cdot (abc) + 5ab = (abc) \cdot c + 5bc$$

$$(abc)(a-b) = 5a(b-c) \quad a=b$$

$$3) c \cdot (abc) + 5bc = (abc) \cdot a + 5ac$$

$$(abc)(b-c) = 5b(c-a)$$

$$(abc)^3 = 5^3 abc$$

$$(abc)(c-a) = 5c(a-b)$$

$$abc = 5^3$$

$$(abc)$$

$$(abc) = \begin{cases} a = 5a(a-c) \\ a = 0 & a=c \\ b=c \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.  
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

