МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11

1. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|x^3+4\right|+\left|x^2-1\right| \leqslant \left|x^3-x^2+5\right|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{300}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y-2)-x(13y-27)+44y-94=0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC. Прямые ED и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF.

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом

$$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$ вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 17$, $XY = 31$.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1. $|x^3+4|+|x^2-1| \le |x^3-x^2+5|$

Пользуясь тем, что $|a|=|-a|$, заменим ~~внутри~~ подмодульное выражение второго слагаемого левой части на противоположное по знаку:

$$|x^3+4|+|-x^2+1| \le |x^3+4-x^2+1|$$

Пусть $x^3+4=a$, а $-x^2+1=b$:

$|a|+|b| \le |a+b|$. Согласно известному неравенству: сумма модулей всегда больше либо равна модулю суммы $\Rightarrow |a|+|b| \ge |a+b|$. Отсюда можно сделать вывод, что $|a|+|b|=|a+b|$, иначе одно из условий не будет выполнено. Если из чисел a и b одно >0, а другое <0, то равенство не достигается. Возможны 2 случая: 1) $a\ge0$; $b\ge0$ и 2) $a\le0$; $b\le0$.

Случай 1: $\begin{cases} a\ge0 \\ b\ge0 \\ |a|+|b|=|a+b| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3+4\ge0 \\ -x^2+1\ge0 \\ |x^3+4|+|-x^2+1|=|x^3-x^2+5| \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x \ge -\sqrt[3]{4} \\ x\in[-1;1] \\ x^3+4-x^2+1=x^3-x^2+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -\sqrt[3]{4} \\ x\in[-1;1] \end{cases}$ (1), ~~но $1<\sqrt[3]{4}<2$~~ $\Rightarrow$ ~~$\Rightarrow -2\le-\sqrt[3]{4}\le-1$~~

~~$\Rightarrow$ у системы (1) нет решений.~~ ~~$\sqrt[3]{4}<$~~

$1<\sqrt[3]{4}<2 \Rightarrow -1>-\sqrt[3]{4}>-2 \Rightarrow$ у системы (1) ~~решений нет~~. $x\in[-1;1]$ — реш.

Случай 2: $\begin{cases} a\le0 \\ b\le0 \\ |a|+|b|=|a+b| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3+4\le0 \\ -x^2+1\le0 \\ |x^3+4|+|-x^2+1|=|x^3-x^2+5| \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x\le -\sqrt[3]{4} \\ x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty) \\ -x^3-4+x^2-1=-x^3+x^2-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le-\sqrt[3]{4} \\ x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty) \end{cases}$

$-\sqrt[3]{4}$; -2, -1, 1, x $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ у системы (2) $x\in[-\sqrt[3]{4};-1]$ — решение.

Объединяя оба решения систем в совокупность, получим: **Ответ: $x\in[-\sqrt[3]{4};1]$**

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2. (a; b; c) – геом. прогрессия; $abc = 2^{150}\cdot 3^{300}$.

Числа a, b, c можно представить в виде: $a=a$; $b=aq$; $c=aq^2$. Тогда: $abc = a^3q^3 = 2^{150}\cdot 3^{100} \Rightarrow aq = \cancel{2^{100}\cdot 3^3}\sqrt[3]{2^{150}\cdot 3^{300}} = 2^{50}3^{100}$, т.е. второй член прогрессии равен $2^{50}\cdot 3^{100}$, первый будет равен $\frac{2^{50}\cdot 3^{100}}{q}$, а третий равен $2^{50}\cdot 3^{100}q$, т.е. мы имеем тройку чисел:

$\left(\frac{2^{50}\cdot 3^{100}}{q}; 2^{50}\cdot 3^{100}; 2^{50}\cdot 3^{100}q\right)$. ~~Знаменатель прогрессии q это какая-то дробь $\frac{m}{n}$, где обязательно $m=2^i3^j$, а $n=2^k3^l$, т.к. в противном случае числа a, b, c не будет принадлежать множеству натуральных чисел.~~

~~Таким образом: $q=\frac{m}{n}=\frac{2^i3^j}{2^k3^l}=2^{(i-k)}\cdot 3^{(j-l)}$.~~

Знаменатель прогрессии q можно представить, как

(1) $q=\frac{1}{2^k3^l}$ или (2) $q=2^k3^l$ или (3) $q=\frac{2^k}{3^l}$ или (4) $q=\frac{3^l}{2^k}$, где l, k – неотрицательные целые числа. Других простых множителей кроме 2 и 3 он содержать не может, так как либо 1ый член не будет целым, либо 3ий.

Рассмотрим ~~1ый~~ вариант (1). Если $k, l > 0$, то $k\in[1;50]$, $l\in[1;100] \Rightarrow 50\cdot 100 = 5000$ вариантов образования q. Если $k=0$, $l>0$, то ещё 100 вар. Если $l=0$, $k>0$, то ещё 50 вар.

Рассмотрим вариант (2). Аналогично варианту (1) тут вместе 5150 вариантов образования q.

Рассмотрим вариант (3). Здесь учитываем только случай, когда $k>0$, $l>0$, т.к. случаи равенства k или l нулю мы уже учли в первых двух вариантах. Получим $50\cdot 100 = 5000$ способов образов. q, где $k\in[1;50]$, $l\in[1;100]$.

Рассмотрим вариант (4). Аналогично варианту (3) здесь 5000 способов образования q. Итого имеем всего

$5150\cdot 2 + 5000\cdot 2 = 10300 + 10000 = 20300$ вар. $\Rightarrow$ существует 20300 троек таких чисел, т.к. q задает 1 тройку. Ответ: 20300 троек

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3. $x^2(y-2)-x(13y-27)+44y-94=0$

Можно разглядеть это уравнение, как квадратное относительно x. Оно имеет решение в дейст. числах, если его дискриминант неотрицателен.

$D=(13y-27)^2-4\cdot(y-2)(44y-94)\geq 0$

$169y^2+27^2-26\cdot 27y-4(44y^2-88y-94y+188)\geq 0$

$(169-4\cdot 44)y^2+y((88+94)\cdot 4-26\cdot 27)+27^2-4\cdot 188\geq 0$

$-7y^2+26y-23\geq 0$

$7y^2-26y+23\leq 0$ (1)

Найдем нули функции $f(y)$ в левой части неравенства:

$7y^2-26y+23=0$

$D=26^2-4\cdot 7\cdot 23=26^2-28\cdot 23=676-644=32=4\sqrt{2}$

$y_1=\dfrac{26+4\sqrt{2}}{14}$ $y_2=\dfrac{26-4\sqrt{2}}{14}$ $\Rightarrow$

неравенство (1) верно при $y\in\left[\dfrac{26-4\sqrt{2}}{14};\dfrac{26+4\sqrt{2}}{14}\right]$. Оценим границы данного отрезка:

$\cancel{\dfrac{26+4\sqrt{2}}{14}}$ $1<\sqrt{2}<2$

$4<4\sqrt{2}<8$

$30<26+4\sqrt{2}<34$

$2\frac{1}{7}=\dfrac{30}{14}<\dfrac{26+4\sqrt{2}}{14}<\dfrac{34}{14}=2\frac{3}{7}$. Т.к. $y\in\mathbb{Z}$, то $y\leq 2$ (*)

$y\in[2;2]$

$-8<-4\sqrt{2}<-4$

$18<26-4\sqrt{2}<22$

$1\frac{2}{7}=\dfrac{18}{14}<\dfrac{26-4\sqrt{2}}{14}<\dfrac{22}{14}=1\frac{4}{7}$. Т.к. $y\in\mathbb{Z}$, то $y\geq 2$ (**)

Из (*) и (**) следует, что $y=2$, тогда исходное уравнение при подстановке примет вид:

$-x(13\cdot 2-27)+44\cdot 2-94=0$

$x+(-6)=0\Rightarrow x=6$. Т.е. подходит единственная пара $(6;2)$.

Ответ: $(6;2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

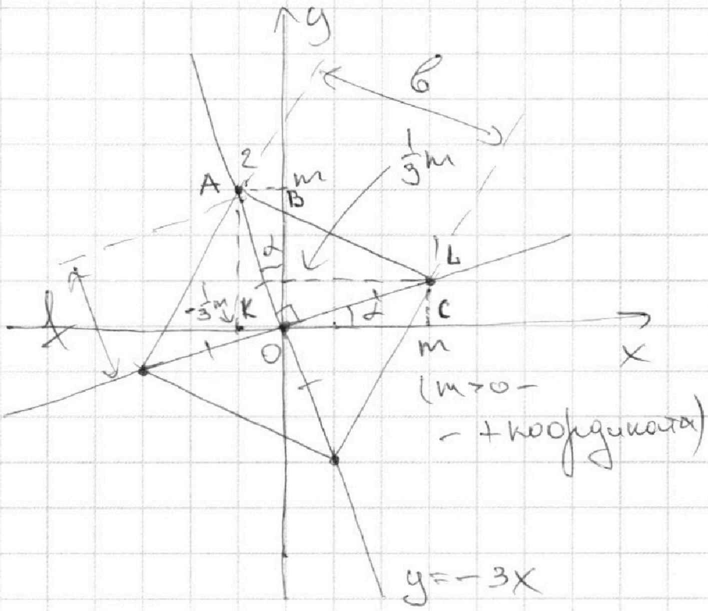
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5 $y=x^5+ax$; $y=-3x$ — прямая диагонали центр совпадает с началом координат.

Диагонали квадрата $\perp$ $\Rightarrow$ вторая диагональ его должна лежать на прямой $y=\frac{1}{3}x$. Это можно понять поворотом системы координат на угол между прямой $y=-3x$ и осью ординат. В силу $\perp$сти прямая, содержащая вторую диагональ квадрата должна совпасть с Ox после поворота $\Rightarrow$ угол между 2ой прямой и осью Ox также равен α $\Rightarrow$ вторая прямая задаётся уравнением $y=\frac{1}{3}x$



Из симметрии рисунка видно, что если точка 1 имеет координаты $(m; \frac{1}{3}m)$, то точка 2 имеет координаты $(-\frac{1}{3}m; m)$, $\triangle AOB = \triangle LOC$ по гипотенузе и острому углу. Тогда справедливы уравнения:

$$\begin{cases} m = \left(-\frac{1}{3}m\right)^5 + a\left(-\frac{1}{3}m\right) & (1) \\ \left(\frac{1}{3}m\right) = m^5 + am & (2) \end{cases}$$

Из уравнения (2): $\cancel{a = m^4 - \frac{1}{3}m}$ $a = \frac{1}{3} - m^4$, при $m \neq 0$. (3)

Подставим a из (3) в (1):

$$\cancel{\tfrac{1}{3}}\, m = \left(-\frac{1}{3}\right)^5 m^5 - \frac{1}{3}m\left(\frac{1}{3} - m^4\right), \text{ при } m \neq 0:$$

$$-1 = \frac{1}{3^5}m^4 + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}m^4 \Rightarrow \cancel{\left(\frac{1}{3^5} - \frac{1}{3}\right)m^4} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^5}\right)m^4 = \frac{10}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{80}{243}m^4 = \frac{10}{9} \Rightarrow m^4 = \frac{10}{9}\cdot\frac{243}{80} = \frac{243}{72} = \frac{81}{24} \Rightarrow m = \pm\frac{3}{\sqrt[4]{24}}, \text{ но}$$

$m>0 \Rightarrow m = \frac{3}{\sqrt[4]{24}} \Rightarrow \underbrace{a = \frac{1}{3} - \frac{81}{24} = -\frac{73}{24}}$. Теперь найдём

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

сторону b квадрата. По Теореме Пифагора:

$b^2 = f^2 + f^2 \Rightarrow b = \sqrt{2} f$. Остается найти расстояние

f. Его найдём по Th. Пифагора для ΔAOK:

$$f^2 = m^2 + \left(\frac{1}{3}m\right)^2 \Rightarrow f^2 = m^2 + \frac{1}{9}m^2 = \frac{10}{9}m^2 \Rightarrow f = \frac{\sqrt{10}}{3}m =$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt[4]{24}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{24}} = \sqrt[4]{\frac{100}{24}} = \sqrt[4]{\frac{50}{12}} = \sqrt[4]{\frac{25}{6}} \Rightarrow b = \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{\frac{25}{6}} =$$

$$= \sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[4]{\frac{25}{6}} = \sqrt[4]{\frac{25\cdot 4}{6}} = \sqrt[4]{\frac{100}{6}}$$ — сторона квадрата.

Ответ: $a = -\frac{13}{24}$; $b = \sqrt[4]{\frac{100}{6}}$ — сторона квадрата

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6 $a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}$

$$\begin{cases} a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c} \Big| \cdot abc \\ b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a} \Big| \cdot abc \\ a+\frac{5}{b}=c+\frac{5}{a} \Big| \cdot abc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(abc)+5ac=(abc)\cdot b+5ab \\ b(abc)+5ab=(abc)\cdot c+5bc \\ c(abc)+5bc=(abc)\cdot a+5ac \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (abc)(a-b)=5a(b-c) \\ (abc)(b-c)=5b(c-a) \\ (abc)(c-a)=5c(a-b) \end{cases} \cancel{\div (abc)}$$

Перемножим: $(abc)^3\cdot\underbrace{(a-b)(b-c)(c-a)}=5^3\cdot abc\,(b-c)(c-a)(a-b)$

Если ≥ 1 из скобок равна 0, то $a=b=c$, что

противоречит условию $\Rightarrow (abc)^3=5^3\cdot abc \Rightarrow$

$\Rightarrow abc=\sqrt[2]{5^3}=5\sqrt{5}$

Ответ: $abc_{min}=5\sqrt{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

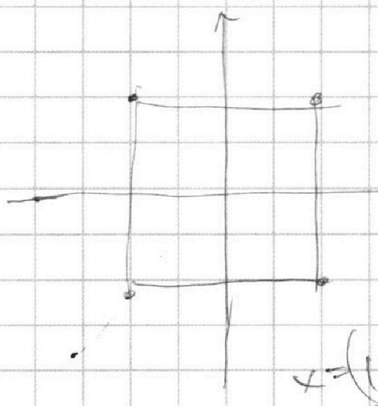
$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}$

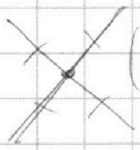
5. $y=x^5+ax$ $y'(x)=5x^4+a$

$y=-3x$

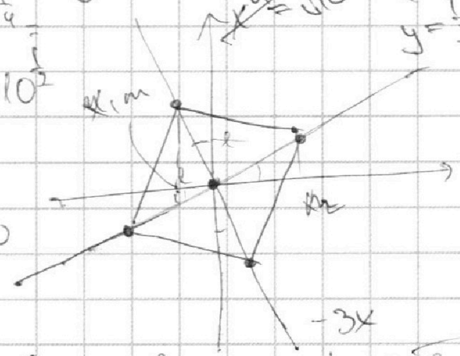
$x^4=\sqrt{10}$ $(\sqrt{10})^4=\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}$

$y=\frac{1}{3}x$ $\sqrt{10}$





$(10)^{\frac{1}{4}}=$ $=10^{\frac{1}{2}}$



$\sqrt[4]{100^2}=$ $=100^{2\cdot\frac{1}{4}}=$ $=100^{\frac{1}{2}}=$ $=10$

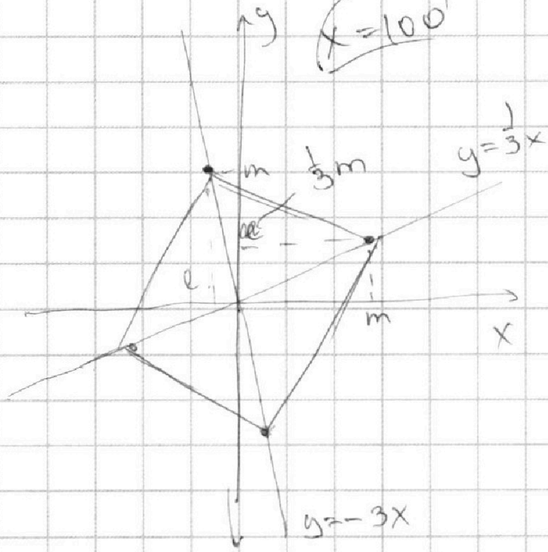
$\sqrt[4]{x}=\sqrt{10}$

$x=\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^4$

$x=100$

$\underline{m=\frac{1}{3}}$

$\begin{cases} m=-3l \\ l=\frac{1}{3}m \end{cases}$ $l=-\frac{1}{3}\cdot 3l$ $l=-l$??



$y=x^5+ax$ $l=m^5+am$

$\cancel{l=m^5+ax}$ $m=l^5+al$

$\cancel{m=l^5+ax}$

$l=m^5+am=\frac{1}{3}m$

$m^4+a=\frac{1}{3} \Rightarrow a=\frac{1}{3}-m^4$

$y=x^5+\left(\frac{1}{3}-m^4\right)x$

$m=\left(-\frac{1}{3}m\right)^5+\left(\frac{1}{3}-m^4\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}m\right)$

$1=-\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot m^4+\left(m^4-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}$

$1=-\frac{1}{3^5}+m$ $1=\left(\frac{1}{3}\right)^5 m^4+\frac{1}{3}m^4-\frac{1}{9}$

$m^4\left(\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{9}$

$m^4=\frac{10\cdot 3^5}{9\cdot(3^4+1)}$

$9\cdot 9=81$

$\sqrt[4]{x}=\sqrt{2}$ $3^4=9\cdot$

$x=(\sqrt{2})^4$

$x=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4=$

$x=4$

$2^4=16$

$\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4$

$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}$ $\frac{1}{3}-\frac{1}{3^5}=$

$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}$

$ab+5=b^2+\frac{5}{c}b$

$b^2+\left(\frac{5}{c}-a\right)b-5=0$

$c^2+\left(\frac{5}{a}-b\right)c-5=0$

$a^2+\left(\frac{5}{b}-c\right)a-5=0$

$\cancel{(abc)^2+\left(\frac{5}{c}-a\right)\left(\frac{5}{a}-b\right)\left(\frac{5}{b}-c\right)abc=5^3}$

$=\frac{3^4-1}{3^5}=\frac{80}{81\cdot 3}=$

$=\frac{80}{243}$

$243:3=81$

$72:3=24$

$\frac{1}{3}-\frac{81}{24}=$

$=\frac{8-81}{24}=-\frac{73}{24}$ $\frac{73}{24}$

$\sqrt[4]{100}=$

$=100^{\frac{1}{4}}=$

$\left(10^2\right)^{\frac{1}{4}}=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x^2(y-2) - x(13y+27) + 44y - 94 = 0$

$x^2y - 2x^2 - 13xy - 27x + 44y - 94 = 0$

$xy(x-13)$

$(13y+27)^2 - 4(y-2)(44y-94) \geq 0$

$(13y-27)^2 - 4(y-2)(44y-94) \geq 0$

$169y^2 + 27^2 - 2\cdot 13\cdot 27 - 4\cdot(44y^2 - 88y - 94y + 94\cdot 2) \geq 0$

$169y^2 + 27^2 - 26\cdot 27y - 4\cdot(44y^2 - 182y + 188) \geq 0$

$169y^2 + 27^2 - 26\cdot 27y - 4\cdot 44y^2 + 4\cdot 182y - 4\cdot 188 \geq 0$

$y^2(169 - 4\cdot 44) + y(4\cdot 182 - 26\cdot 27) + 27^2 - 4\cdot 188 \geq 0$

$-7y^2 + 26y - \quad y \in [\ldots]$

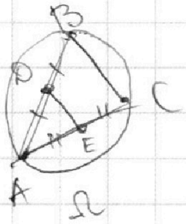
$94 + 88 = 182$ $\quad 94 + 94 = 188$ $\quad 26 \cdot 27$: $182 + 52 = 702$

$160 + 16 = 176$ $\quad 182 \cdot 4 = 728$

$27 \cdot 27$: $189 + 54 = 729$

$188 \cdot 4 = 752$

$44 \cdot 4 = 176$ $\quad 182 \cdot 4$



$26 \cdot 26$: $156 + 52 = 676$

$728 - 26\cdot 27$

$728 - 702 = 26$

$169 - 176 = -7$

$26 \cdot 27$: $182 + 52 = 702$

$182 \cdot 4 = 728$

$28 \cdot 23$: $84 + 56 = 644$

$27 \cdot 27$: $189 + 54 = 729$

$188 \cdot 4 = 752$

$1 < \sqrt{2} < 2$

$4 < 4\sqrt{2} < 8$

$-(752 - 729) = -23$

$abc \geq$

$a \neq b \neq c$

$abc \to min$

$26 \quad 30 < 4\sqrt{2} + 26 < 34$

$26^2 - 4\cdot 7\cdot 23$

$\frac{30}{14} < \frac{4\sqrt{2}+26}{14} < \frac{34}{14}$ $\quad \frac{34}{14} = 2\frac{6}{14}$ $\quad 26^2 - 28\cdot 23$

$\frac{4\sqrt{2}+26}{14} < 2$

$2 \quad \frac{30}{14}$

$26 - 8 = 18$

$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$

$2 < \frac{4\sqrt{2}+26}{14} < 3$

$2 \quad 3$

~~$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$~~

~~$ab + 5 = bc + 5$~~

$1\frac{2}{7} \quad 1\frac{4}{7}$

$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$

$88 - 94 = 6$

$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $\underbrace{|x^3+4|}_{a} + \underbrace{|x^2-1|}_{b} \le |\underbrace{x^3-x^2+5}_{\cancel{a-b}\ a+b}|$ $\quad \cancel{b=-x^2+5}$ $\quad |3|+|5| = |8|$, $8=8$

$\cancel{|a|+|b| \le |a-b|}$ $\quad \underbrace{x^3+4}_{a} \underbrace{-x^2+1}_{b}$ $\quad |-3|+|5|$ $|\cancel{8}\,2|$, $8>2$

$|a|+|b| \le |a+b|$, но $|a|+|b| \ge |a+b|$ $\Rightarrow$ $\quad |-3|+|-4|$ $|-7|$, $3+4=7$

$\Rightarrow |a|+|b| = |a+b|$ $\quad \begin{cases} a=-x \\ b=y \end{cases}, x,y\ge 0$

$x+y = |y-x|$ $\quad 1 \le \sqrt[3]{4} \le 2$

$|x^3+4|+|x^2-1| = |x^3-x^2+5|$ $\quad x+y = y-x$ ~~error~~ $\quad -1 \ge -\sqrt[3]{4} \ge -2$

$x=0$ $\quad -2 \quad -1$

Если разного знака, то не работает

1) $\cancel{x^3+4\ge 0}$, $\cancel{x^2-1\ge 0}$ 2) $x^3+4<0$, $\cancel{x^2-1<0}$ $\quad$ 1) $x^3+4\ge 0$, $-x^2+1\ge 0$ $\quad$ 2) $x^3+4<0$, $-x^2+1<0$

$\cancel{x^3+4+x^2-1 = |x^3+4}$ $\quad \cancel{x^3+4+x^2-1 = x^3-x^2+5}$ $\cancel{4=5}$

Заново:

$\cancel{-x^3-4=}$ $\quad a=x$, $b=-y$, $x,y\ge 0$

$|x^3+4|+|x^2-1| \le |x^3-x^2+5|$ $\quad |a|+|b| = |a+b|$

$|x^3+4|+|-x^2+1| \le |x^3+4-x^2+1|$ $\quad x+y = |x-y|$ $\quad x^2\le 1 \Rightarrow x\in[-1;1]$

$|a|+|b| \le |a+b|$ $\quad x+y = x-y$, $x+y = y-x$ $\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\quad x^3\ge -4$, $x\ge -\sqrt[3]{4}$

но $|a|+|b| \ge |a+b|$ $\Rightarrow$ $|a|+|b| = |a+b|$

Случай 1: $a\ge 0, b\ge 0$: $\begin{cases} x^3+4\ge 0 \\ -x^2+1\ge 0 \end{cases}$

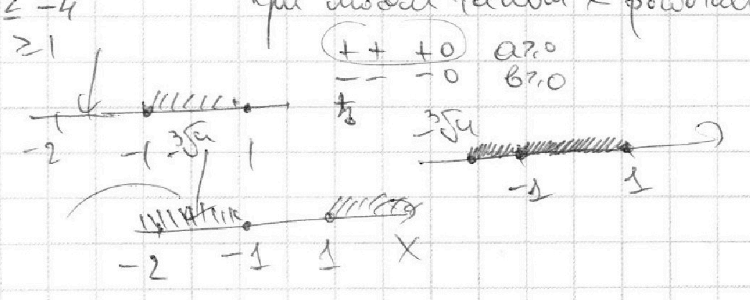
Случай 2: $a\le 0; b\le 0$

$-x^3-4+x^2-1 = -x^3-4+x^2-1$ $\quad x^3+4-x^2+1 = x^3+4-x^2+1$

$\forall x$, при $x^3\le -4$, $x^2\ge 1$ $\quad$ При любом таком x работает

$x\le -\sqrt[3]{4}$ $\quad$ $+ +$ $+ 0$ $a\ge 0$, $- -$ $- 0$ $b\ge 0$

$x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(a, b, c) \in \mathbb{N}$ $abc = 2^{150} \cdot 3^{300}$

$a = a$
$b = aq$
$c = aq^2$

$(a; aq; aq^2)$

$a^3q^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$

$\underbrace{aq = 2^{50} \cdot 3^{100}}$

Способы для a:

$a = 2^k \cdot 3^m$

$(a; 2^{50} \cdot 3^{100}; aq^2)$ $q = \frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{a}$

$\cancel{a; 2^{50} \cdot 3^{100}; 2^{50} \cdot 3^{100}}$

$1; 2^{50} \cdot 3^{100}; 2^{100} \cdot 3^{200}$ $2^{150} \cdot 3^{300}$

$2^{50} \cdot 3^{100}$ $2^{50} \cdot 3^{100}$

$0 \le k \le 50$
$0 \le m \le 100$

При a опред $\rightarrow$
$\rightarrow$ опред q $\Rightarrow$

$6 \cdot \frac{1}{2} = 3$

$51 \cdot 101$ ← вот столько штук

$\Rightarrow$

$a = \frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q}$

$0 \le \varphi_2 \le 50$

$0 \le \varphi_1 \le 50$

51

$(x; 2^{50} \cdot 3^{100}; y)$

$q = \frac{n}{m}$

$\frac{2^\alpha \cdot 3^{100}}{3^\beta}$

$\left(\frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q}; 2^{50} \cdot 3^{100}; 2^{50} \cdot 3^{100} q\right)$ $51 \cdot 101$

$S = \frac{b(q^n - 1)}{q - 1}$

$z \in [0; 50]$
$k \in [0; 50]$
$f \in [0; 100]$
$m \in [0; 100]$

$\boxed{q \ne 1}$

$2^k 3^m$ $q = \frac{2^k 3^m}{2^z 3^f}$ $\frac{2^z 3^f}{2^k 3^m} \in \mathbb{N}$

$2^{z-k} \cdot 3^{f-m}$

$2^{-1} \cdot 3^{-1}$

$\frac{2}{3}$

$2^{50} \cdot 3^{100}$ 1 бракуем

$\cancel{\alpha, \beta > 0}$ $\cancel{50}$ $\cancel{49}$ $50 \cdot 50 +$
$+ 51 + 51$

$q = 2^\alpha 3^\beta$ $\frac{1}{q} = \frac{1}{2^\alpha 3^\beta}$

$\frac{1}{2^\alpha 3^\beta}$ $2^i 3^j$ $\frac{2^\alpha}{3^\beta}$

$= 2500 + 102 = 2602$ тройки

$\frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q}$ $\boxed{\alpha, \beta > 0}$

$\cancel{50 \cdot 50 = 2500}$
$50 \cdot 100$ $+$ $50 \cdot 100$

$= 2^\alpha \cdot 3^{-\beta}$

$\frac{1}{2^\alpha 3^\beta \cdot \cancel{X}} = 2^i 3^j$

$\frac{1}{2^i 3^j}$

$\frac{1}{2^\alpha}$ $50 + 50$
$+ 100 + 100$

$\alpha, \beta < 0$

$50 \cdot 50 =$

$\begin{cases} 2^{50} \cdot 3^{100} \cdot 2^{-\alpha} \cdot 3^{+\beta} = \\ 2^{50} \cdot 3^{100} \cdot 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot \cancel{X} \end{cases}$

$\begin{cases} 0 \le \alpha \le 50 \\ 0 \le \beta \le 100 \end{cases}$

$2 \cdot 50 \cdot 100 + 100 + 200 =$ $= 2$

$= 100^2 + 300 =$

$= 10000 + 300 =$

$= 10300$

$2, 3$ α, β

$\alpha, \beta > 0$ $\alpha, \beta > 0 \Rightarrow$

$\frac{2^k}{3^\ell} = \frac{\cancel{2}}{3^\ell}$

$\frac{1}{2^k 3^\ell}$

$\frac{\alpha}{2^\alpha 2^\beta}$

$\frac{\alpha}{2^\alpha 3^\beta}$

$\frac{2^\alpha}{3^\beta}$

$\frac{1}{2^\alpha 2^\beta}$

$50 \cdot 100 + 100 +$
$+ 50$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6. $a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}$

$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c} \mid \cdot b \qquad a=b+\frac{5}{c}-\frac{5}{b}$

$\cancel{ab+5=b^2+\frac{5b}{c}}$

$b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{b+\frac{5}{c}-\frac{5}{b}}$

$b+\frac{5}{c}=c+\frac{5bc}{b^2c+5b-5c}$

$\frac{bc+5}{c}=\frac{b^2c^2+5bc-5c^2+5bc}{b^2c+5b-5c}=\frac{b^2c^2+10bc-5c^2}{b^2c+5b-5c}$

$b^2c^3+10bc^2-5c^3=b^3c^2+5b^2c-5c^2b+5b^2c+25b-25c$

$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a} \qquad abc=z$

abc → min

$\frac{z}{bc}+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c} \qquad z= \quad z+5c=b^2c+5b$

$\frac{z}{ab}+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a} \qquad z+5a=c^2a+5c \qquad a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}$

$z+5b=a^2b+5a$

min

$z=b^2c+b\cdot 5-5c \qquad z=\frac{25}{4c^2}-\frac{25}{2c}-5c \qquad \cancel{abc+\frac{5}{}}$

$x_B=\frac{-5}{2c}$

$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}$

$abc+5c=b^2c+5b \qquad b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}$

1) $a\cdot(abc)+5ac=(abc)\cdot b+5ab \qquad abc+5a=ac^2+5c$

$\cancel{b\cdot(abc)}\cdot \qquad b\cdot(abc)+5ab=(abc)\cdot c+5bc$

2) $b\cdot(abc)+5ab=(abc)\cdot c+5bc$

3) $c\cdot(abc)+5bc=(abc)\cdot a+5ac$

$(abc)(a-b)=5a(b-c) \qquad a=b$

$(abc)(b-c)=5b(c-a)$

$(abc)^3=5^3abc \qquad (abc)(c-a)=5c(a-b)$

$abc=\sqrt{5^3}$

$\cancel{(abc)}$

$(abc)= \qquad 0=5a(a-c)$

$\cancel{a=0} \quad a=c$

$b=c$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!