



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Решите уравнение

$$5 \operatorname{tg} 2x - 1 = \operatorname{tg} \left(x - \frac{3\pi}{4} \right).$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{90} \cdot 19^{90}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x+3) - (x+2)\ln(3x+9) + (\ln 3)\ln(x+3) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = \frac{x^3}{4} + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = \frac{2x}{5}$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{2}{11}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{6}{y^3} = y^3 + \frac{6}{z^3} = z^3 + \frac{6}{x^3}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения $x y z$.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 5$, $AD = DC = \sqrt{10}$, $AC = 2\sqrt{5}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 5 + 2\sqrt{5}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



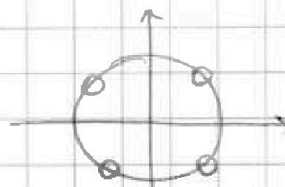
$$5 \operatorname{tg} 2x - 1 = \operatorname{tg} \left(x - \frac{3\pi}{4} \right)$$

ОДЗ: $\cos 2x \neq 0$

$$2\cos^2 x - \sin^2 x \neq 0$$

$$|\cos x| \neq |\sin x| \Rightarrow \operatorname{tg} x \neq \pm 1$$

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



$$5 \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - 1 = \frac{\sin \left(x - \frac{3\pi}{4} \right)}{\cos \left(x - \frac{3\pi}{4} \right)}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) = \sin x \cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{3\pi}{4} \cos x = -\frac{\sin x}{\sqrt{2}} - \frac{\cos x}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) = \cos x \cos \frac{3\pi}{4} + \sin x \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\cos x}{\sqrt{2}} + \frac{\sin x}{\sqrt{2}}$$

Подставим:

$$\frac{5 \cdot 2 \sin x \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{-\sin x - \cos x}{\sin x - \cos x}$$

Решим ~~sin~~ на $\sin x - \cos x$, в.к. это не равно 0.

$$\frac{10 \sin x \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x}{-(\cos x + \sin x)} = -(\sin x + \cos x)$$

$-(\cos x + \sin x) \neq 0 \Rightarrow$ можем умножить обе части

$$\cancel{10} \sin x \cos x - \cancel{\cos^2 x} + \cancel{\sin^2 x} = \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \cos x \sin x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

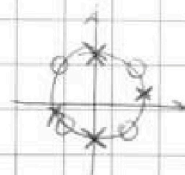
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$8 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$$

$$1) \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$$



$$2) 8 \sin x - 2 \cos x = 0 \quad (\cos x \neq 0)$$

$$4 \sin x - \cos x = 0 \quad | : \cos x \quad (\cos x \neq 0)$$

$$4 \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{4}$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \pi m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \pi m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$(a; b; c)$

$$b = a \cdot d$$

$$c = a \cdot d^2 = b \cdot d$$

$$a \cdot b \cdot c = a^3 \cdot d^3 = 2^{90} \cdot 19^{90} \Rightarrow ad = 2^{30} \cdot 19^{30}$$

Заметим, что d может быть и положительным, и отрицательным. Если $d < 0$, то $a < 0$, если $d > 0$.

$$d = \pm 2^n \cdot 19^m$$

Заметим, что сколько существует вариантов d , столько существует и троек, т.к. по b -уми можно всегда определить $a = \frac{b}{d}$, а $c = b \cdot d$.

~~$n \in [0, 60]$~~ ~~$m \in [0, 30]$~~ ~~матрица~~ ~~каждая~~ $n \in [0, 30]$

~~$m \in [0, 30]$~~ ~~матрица~~ ~~каждая~~ $m \in [0, 30]$

~~вариантов выбора d :~~ ~~$2 \cdot 34122$~~ ~~$(+; -)$~~ ~~n~~ ~~m~~ ~~34122~~

~~Ответ: 34122~~ ~~варианта.~~ $m \in 30$ и $n \in 30$, т.к. a - целое.

Вариантов выбора d : $2 \cdot 31 \cdot 31 = 1922$
 $(+; -)$

Ответ: 1922

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\ln^2(x+3) - (x+2) \ln(3x+9) + (\ln 3) \cdot \ln(x+3) \geq 0$$

$$\ln a + \ln b = \ln ab$$

$$\ln^2(x+3) - (x+2) (\ln 3 + \ln(x+3)) + (\ln 3) \cdot \ln(x+3) \geq 0$$

$$\ln^2(x+3) - (x+2) \ln(x+3) - (x+2) \ln 3 + (\ln 3) \ln(x+3) \geq 0$$

$$y = \ln(x+3)$$

$$y^2 + y(\ln 3 - (x+2)) - (x+2) \ln 3 \geq 0$$

Парабола ветвится вверх. Если у нее нет корней,
то она всегда больше 0.

$$1) D < 0 \quad ((\ln 3) - (x+2))^2 + 4(x+2) \ln 3 < 0$$

$$((\ln 3) + (x+2))^2 < 0 \quad \text{— противоречие.}$$

$$2) y = 0 \Rightarrow \ln(x+3) = 0 \Rightarrow x+3 = 1 \Rightarrow x = -2$$

$$(x+2) = 0 \quad \text{— это подходит} \Rightarrow x = -2 \quad \text{— в отв.}$$

$$3) D = (\ln 3 + (x+2))^2 = 0 \quad \text{— парабола касается осей.}$$

$$\ln 3 = -(x+2) \Rightarrow x = -2 - \ln 3$$

В осев. случаях у параболы есть 2 пересечения с
осью $\ln(x+3)$.

Заметим, что $e > 0 \Rightarrow x+3 > 0$ — всегда $\Rightarrow x \in (-3, +\infty)$

$\ln 3 > 1 \quad x+2 > -1 \Rightarrow (\ln 3 + (x+2))^2 > 0 \Rightarrow$ парабола всегда
больше 0 и не имеет корней. Ответ: $x \in (-3, +\infty)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



* $D > 0$ - всегда, т.к. $x = -2 - \ln 3 < -3$ - не принадлежит ОДЗ.

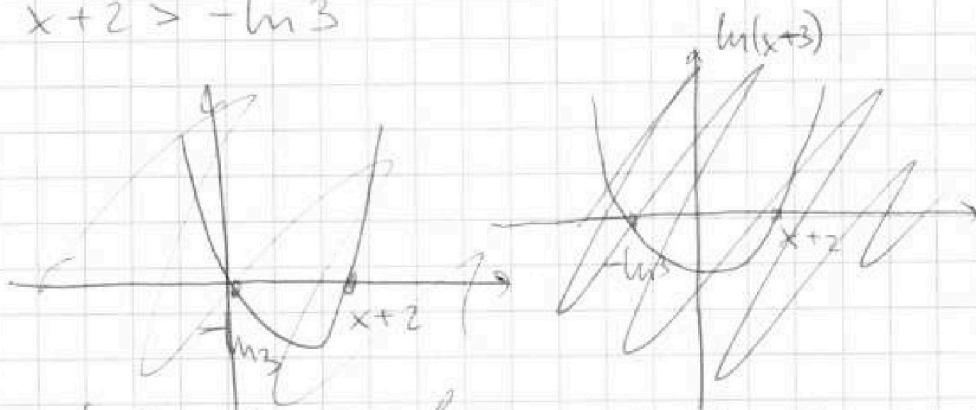
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = (x+2) - \ln 3$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -(x+2) \ln 3$$

$$x_1 = -\ln 3; \quad x_2 = (x+2)$$

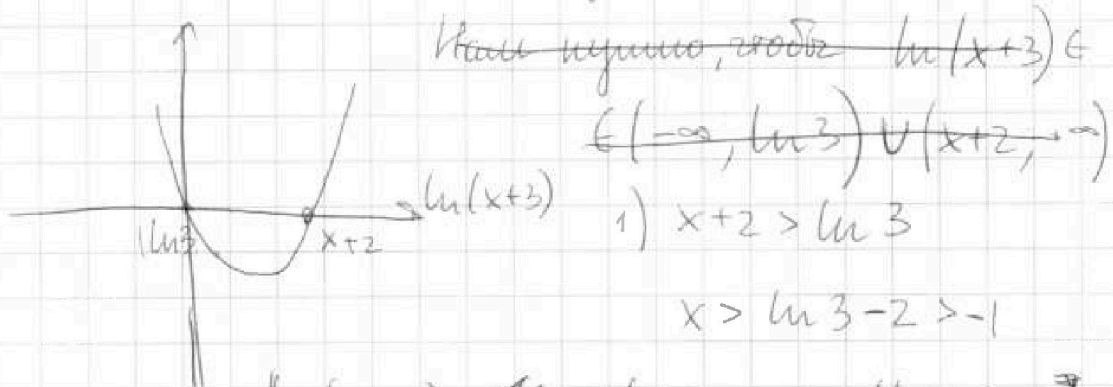
Нужно, чтобы $-\ln 3 < -1$ $x+2 > -1 \Rightarrow$

$$x+2 > -\ln 3$$



$-\ln 3$ - фиксированное число, а $x+2$ движется вдоль оси x в зависимости от x .

~~$x < x+2$, но нам нужно, чтобы~~



~~нам нужно, чтобы $\ln(x+3) \in$~~

$$\in (-\infty, \ln 3) \cup (x+2, \infty)$$

1) $x+2 > \ln 3$

$$x > \ln 3 - 2 > -1$$

$$\ln(x+3) \leq \ln 3 \Rightarrow x \in (\ln 3 - 2; 0]$$

в от



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

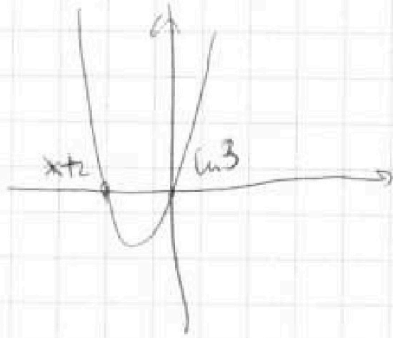
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\ln(x+3) \geq x+2 > \ln 3 \Rightarrow x \in (0; +\infty) - \text{в отв.}$$

$$2) \quad x+2 < \ln 3 \Rightarrow x < \ln 3 - 2 \Rightarrow x \in (-3; \ln 3 - 2)$$



$$\ln(x+3) \leq x+2 \in (-1; \ln 3)$$

$$x \in \left[\frac{1}{e} - 3; \ln 3 - 2\right) - \text{в отв.}$$

$$\ln(x+3) \geq \ln 3 \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\text{ответ: } x \in (\ln 3 - 2; +\infty)$$

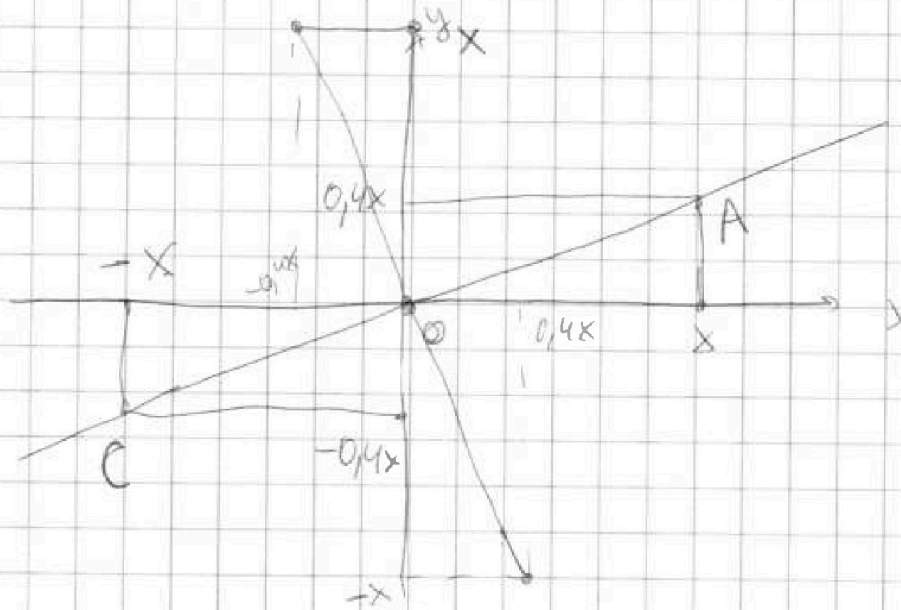
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть есть квадрат $ABCD$, допустим, диагональ AC лежит на прямой $y = \frac{2x}{5}$

т.к. $A = (x; \frac{2x}{5})$. Т.к. O - центр квадрата $O = (0; 0)$,

то т.к. диагонали квадрата равны, а середина обеих диагоналей - это O , то $C = (-x; -\frac{2x}{5})$

Диагонали $AC \perp BD \Rightarrow$ найдем BD , проведем перпендикуляр к AC в т. O . $y'(x) = \frac{5}{2}x = \frac{1}{k}x$

$$B = (-0,4x, x); D = (0,4x, -x)$$

Все точки лежат на $y = \frac{x^3}{4} + ax$

$$A: \frac{2x}{5} = \frac{x^3}{4} + ax$$

$$B: x = -\frac{8}{125 \cdot 4} + a \cdot (-0,4x) =$$

$$= -\frac{2}{125} - 0,4ax$$

$$C: -\frac{2x}{5} = \frac{-x^3}{4} - ax$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$D: -X = \frac{8x^3}{125 \cdot 4} + a \cdot \frac{2}{5x} = \frac{2x^3}{125} + \frac{a \cdot 2x}{5}$$

Заметим, что уравнения А и С, В и D симметричны, просто с противоположными знаками.

$$\frac{2x}{5} = \frac{x^3}{4} + ax \quad | :x \rightarrow 0,4 = \frac{x^2}{4} + a \Rightarrow x^2 = 1,6 - 4a$$

$$-x = \frac{2x^3}{125} + ax \cdot \frac{2}{5} \quad | :x \rightarrow -1 = \frac{2x^2}{125} + \frac{2a}{5} \Rightarrow x^2 = -\frac{125}{2} - 25a$$

$$1,6 - 4a = -62,5 - 25a$$

$$21a = -64,1 \Rightarrow a = \frac{-64,1}{21}$$

$$x^2 = 1,6 + \frac{4 \cdot 64,1}{21} = \frac{1,6 \cdot 21 + 4 \cdot 64,1}{21} = \frac{290}{21}$$

$$AO^2 = x^2 + \frac{4}{25}x^2 = \frac{29}{25}x^2 = \frac{29}{25} \cdot \frac{290}{21} = \frac{29^2 \cdot 2}{5 \cdot 21}$$

$$AB = \sqrt{2}AO = \sqrt{2} \sqrt{\frac{29^2 \cdot 2}{5 \cdot 21}}$$

$$S = AB^2 = 2 \cdot \frac{29^2 \cdot 4}{25 \cdot 21} = \frac{8 \cdot 29^2}{5 \cdot 21} = \frac{4 \cdot 29^2}{5 \cdot 21}$$

Ответ: ~~$a = -\frac{64,1}{21}$~~ ; ~~$S = \frac{8 \cdot 29^2}{5 \cdot 21}$~~ $S = \frac{4 \cdot 29^2}{5 \cdot 21}$

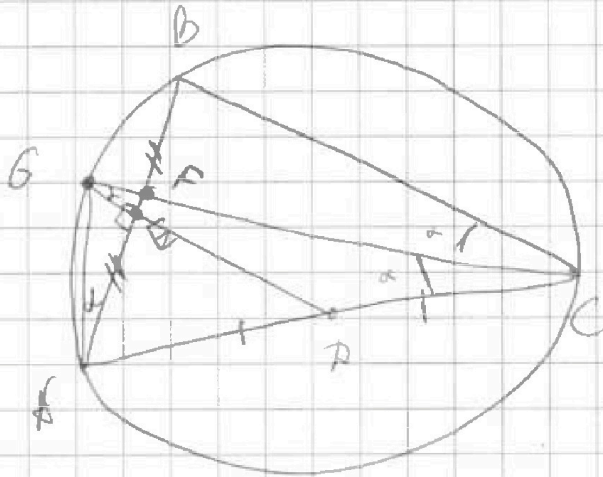
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



П.к. $\angle BCB = \angle BCA$, то они опираются на GB и GA, которые также равны, т.к. радиусы окружности постоянны $\left(2R = \frac{GB}{\sin \alpha} = \frac{GA}{\sin \alpha} \right)$

GE - медиана в равнобедренном треугольнике, значит и высота. $\angle DEB = 90^\circ$. DE - средняя линия $\triangle ABC \Rightarrow \Rightarrow DE \parallel BC$ и $\angle ADC = 180 - \angle DEB = 90^\circ$. П.к. $\angle ABC = 90^\circ$, то AC - диаметр окружности, а AD = DC - радиусы. $\angle AGA = 90^\circ$, т.к. опирается на AC.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 + \frac{6}{y^3} = y^3 + \frac{6}{z^3} = z^3 + \frac{6}{x^3}$$

1 и 2: $x^3 - y^3 = \frac{6}{z^3} - \frac{6}{y^3} = \frac{6(y^3 - z^3)}{z^3 y^3} \quad (4)$

2 и 3: $y^3 - z^3 = \frac{6}{x^3} - \frac{6}{z^3} = \frac{6(z^3 - x^3)}{x^3 z^3} \quad (5)$

1 и 3: $x^3 - z^3 = \frac{6}{x^3} - \frac{6}{y^3} = \frac{6(y^3 - x^3)}{x^3 y^3} \quad (6)$

$$(4) \cdot (5) \cdot (6) = (x^3 - y^3) \cdot (y^3 - z^3) \cdot (x^3 - z^3) = \frac{6^3}{x^6 y^6 z^6} \times (y^3 - z^3) \times (z^3 - x^3) \cdot (y^3 - x^3) = (y^3 - x^3) (z^3 - x^3) (y^3 - z^3)$$

П.к. не все числа x, y, z равны между собой, то хотя бы одно из уравнений $(y^3 - x^3)$, $(z^3 - x^3)$, $(y^3 - z^3)$ будет не равно 0. Поэтому обе части можно сократить на $(y^3 - x^3)(z^3 - x^3)(y^3 - z^3)$

$$1 = \frac{6^3}{x^6 y^6 z^6} \Rightarrow x^6 y^6 z^6 = 6^3 \Rightarrow x^2 y^2 z^2 = 6$$

$$xyz = \pm 6 \text{ или } xyz = -6$$

Ответ: -6 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AL^2 = 10 - x^2$$

$$AL^2 = 5 - (5-x)^2$$

$$10 - x^2 = 5 - 25 + 10x - x^2$$

$$10x = 30 \Rightarrow x = 3$$

$$AL^2 = 10 - 9 = 1 \Rightarrow AL = 1$$

$$\cos d = \frac{\sqrt{15}}{1} = \sqrt{15} \Rightarrow \sin d = \frac{\sqrt{5}}{4} \quad \cos d = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos d}{1 + \cos d}} = \sqrt{\frac{0,75}{1,25}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$n = 0,1k \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow 0,1k = \frac{n}{\sqrt{\frac{3}{5}}} = \frac{\sqrt{5}n}{\sqrt{3}}$$

$$BO_1 = BA - n = \sqrt{5} - n$$

$$\frac{0,1k}{LA} = \frac{BO_1}{BA} \Rightarrow 0,1k = \frac{n}{\sqrt{\frac{3}{5}}} = \frac{\sqrt{5} - n}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}n}{\sqrt{3}}$$

$$n\sqrt{5} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{5}n$$

$$\sqrt{15} - \sqrt{3}n = 5n$$

$$n\left(\sqrt{5} + \frac{\sqrt{3}}{5}\right) = \sqrt{3}$$

$$n = \frac{\sqrt{15}}{5 + \sqrt{3}}$$

$$n = \frac{\sqrt{15}}{5 + \sqrt{3}}$$

Ответ: а) $\frac{5\sqrt{15}}{3}$ б) $\frac{\sqrt{15}}{5 + \sqrt{3}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

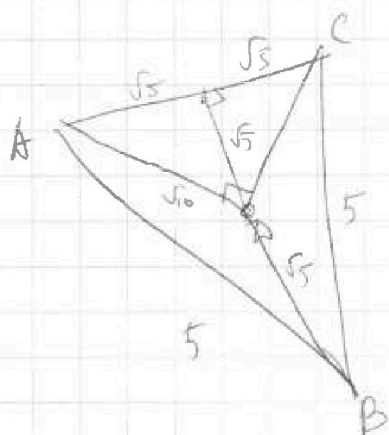
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$SA^2 = SB^2 - 4S = (20 - 6\sqrt{5})^2 - 4S = 400 - 240\sqrt{5} + 180 - 4S =$$
$$= 580 - 240\sqrt{5} < 0$$

Еще один уровень сложности.



$$BS^2 = SA^2 + AB^2 = SA^2 + 5$$

$$SD^2 = SA^2 + AD^2 = SA^2 + 10$$

$$SA^2 - SB^2 = 5 \Rightarrow SA + SB \cdot SA - SB = \frac{5}{5 + 2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{5(5 - 2\sqrt{5})}{5} = 5 - 2\sqrt{5}$$

$$SA - SB = 5 - 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow SA = 5 \cdot SB = 2\sqrt{5}$$

$$SA + SB = 5 + 2\sqrt{5}$$

$$SD^2 = \frac{SA^2 + SB^2}{2} = \frac{20 + 5}{2} = 15 \Rightarrow SD = \sqrt{15}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{15} \cdot 15 = 5\sqrt{15} \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} - \frac{1}{2} (\sqrt{10})^2 = 5$$

$$V = \frac{1}{3} \sqrt{15} \cdot 5 = \frac{5\sqrt{15}}{3}$$

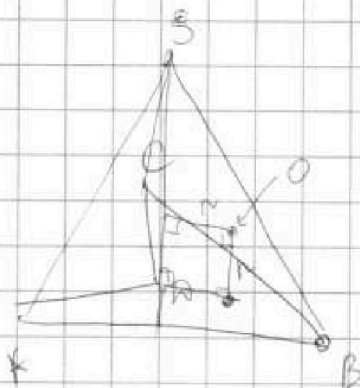
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

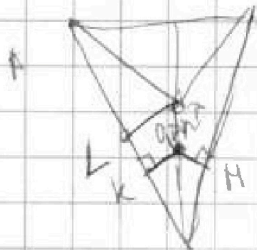
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



O_1 - проекция O на $ABCO$

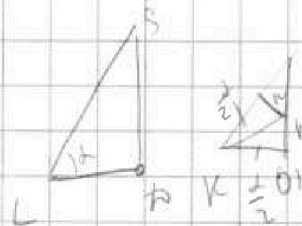
Центр шара O ; o_1 находим на расстоянии r от $ABCO$ и на расстоянии h от SD .

Вид сверху:



$O_1 K \perp AB$

$O_1 M \perp BC$



Пусть ~~SA~~ и ~~SB~~ - SA и SB

наклоны под углом α к $ABCO$.

~~тогда~~ $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{O_1 K}$

Заметим, что O_1 лежит на BD - а это биссектриса

$\angle ABC \Rightarrow O_1 K = O_1 M$ и SA и SB также наклонены

под углом α . Найдем α .

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{SD}{AL}$ ($AL \perp AB$)

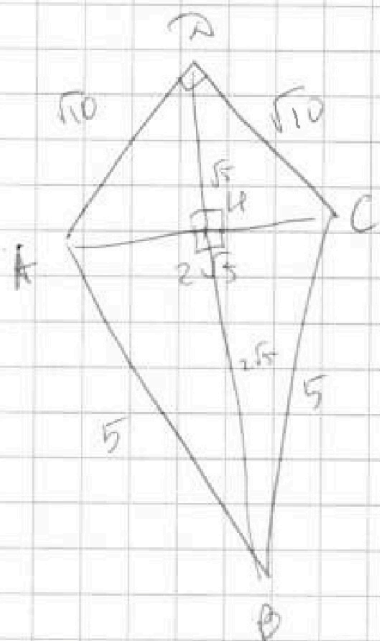
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = \sqrt{2} \cdot AM \Rightarrow \angle ADC = 90^\circ$$

DM - медиана и высота в $\triangle ADC$,

BM' - медиана и высота в $\triangle ABC$,

замечаем, что $M' = M$, т.к. $\angle ADC =$

$$= \angle ABC \text{ и } AM' = AM$$

$$BM = \sqrt{25 - 5} = 2\sqrt{5}$$

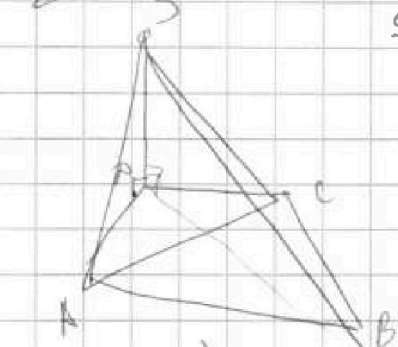
$$AM = \sqrt{10 - 5} = \sqrt{5}$$

SA - высота пирамиды $\Rightarrow SA \perp ABCD$.

$$V = \frac{1}{3} h \cdot S = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{10})^2 + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 20 = 15$$

$$SA^2 =$$



$$SA^2 = SA^2 + AM^2 = SA^2 + 10$$

$$SB^2 = SA^2 + AB^2 = SA^2 + 25$$

$$SB^2 - SA^2 = 35 = (SA + SB) \cdot (SB - SA) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SB - SA = \frac{35}{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{35(5 - 2\sqrt{5})}{5}$$

$$= 7(5 - 2\sqrt{5})$$

$$SB + SA = 5 + 2\sqrt{5} \Rightarrow SB = 20 - 6\sqrt{5}$$

$$SB - SA = 35 - 14\sqrt{5} \Rightarrow SA = 2\sqrt{5} - 15$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

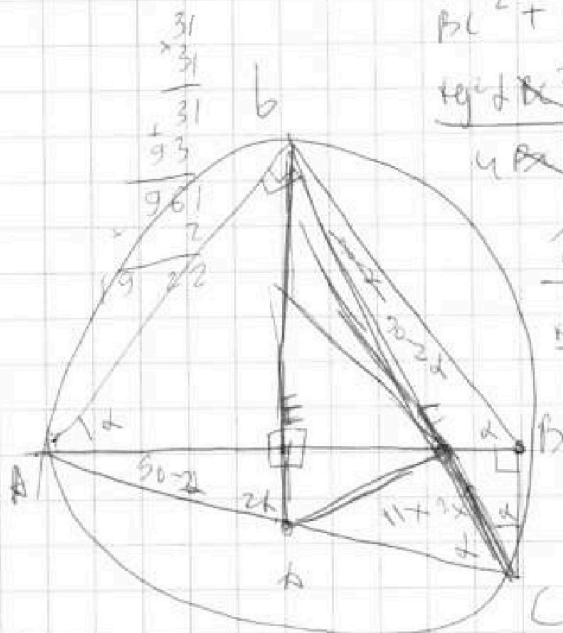
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$20^{30} \cdot 19^{29}$$

$$20^{30} \cdot 19^{30}$$



$$BC^2 + BC \cdot \tan^2 \alpha = 4x^2$$

$$\tan^2 \alpha \cdot BC^2 = \frac{4x^2}{\cos^2 \alpha - 1} + \frac{BC^2}{4} = 121x^2$$

$$\frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha (\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1)} = \frac{4}{121}$$

$$\frac{AF}{BF} = \frac{CF}{AC} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{FB}{AF} = \sin \alpha$$

$$BC^2 + FB \cdot AF = 4x^2$$

$$AF + FB = 2AE$$

$$EF^2 + \frac{BC^2}{4} = 121x^2$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BC}$$

$$BC^2 + BF^2 = 4x^2$$

$$\frac{BF^2 (AC - BC)^2}{4BC^2} + \frac{BC^2}{4} = 121x^2$$

$$FB \left(1 + \frac{AC}{BC} \right) = 2AE$$

$$AE = \frac{BF (BC + AC)}{2BC}$$

$$EF = AF - AE = FB \cdot \frac{AC}{BC} - \frac{BF \cdot AC}{2BC} - \frac{BF}{2} =$$

$$= \frac{BF (AC - BC)}{2BC}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

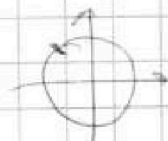
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$~~



$$\frac{10 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\sin x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cos x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\cos x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{-\sin x - \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$\frac{10 \sin x \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x}{-(\cos x + \sin x)} = -(\cos x + \sin x)$$

$$-\cos^2 x + \sin^2 x + 10 \sin x \cos x = \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x$$

$2 \cos^2 x$ $\ln(x+3)$

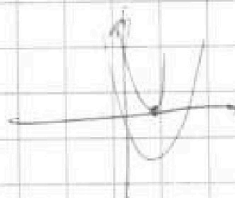
$b = a \cdot d$

$c = a \cdot d^2$

$(a; ad; ad^2)$

$abc = a^3 d^3 = 2^{90} \cdot 19^{90}$

$ad = 2^{30} \cdot 19^{30} = b$



$\ln 3 = -(x+2)$

$x =$

$a = 1$

$d = 2^{30} \cdot 19^{30}$

$\ln^2(x+5) - (x+2) \ln(3x+9) + \ln 3 \ln(x+3) \geq 0$

$\ln^2(x+5) - 3(x+2) \ln 3(x+3)$

$\ln(x+3) (\ln(x+5) - 3(x+2) + \ln 5) \geq 0$

$\ln(x+3) (\ln 3(x+3))$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

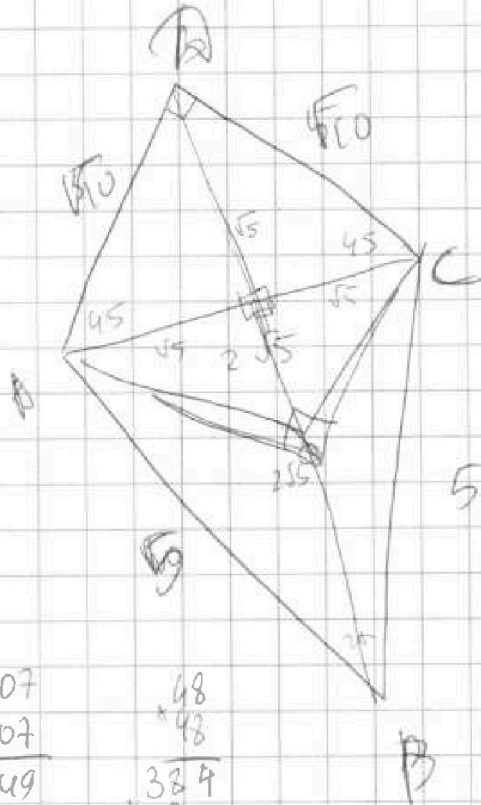
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



535



$$\sqrt{10} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{5 \cdot 4600}{5} = 288000$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{r} 107 \\ \times 107 \\ \hline 749 \\ 1070 \\ \hline 11449 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 48 \\ \hline 384 \\ 1920 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$\frac{2304}{5} = 460.8$$

$$\sqrt{25+5} = \sqrt{30} = 2\sqrt{5}$$

$$ab = 120\sqrt{5}$$

$$a^2 + b^2 = 535$$

$$\frac{535 \cdot 5}{107}$$

$$\frac{14400 \cdot 5}{b^2} + b^2 = 535$$

$$b^4 - 535b^2 + 14400 \cdot 5 = 0$$

$$b^2 = \frac{535 \pm \sqrt{25 \cdot 107^2 - 4 \cdot 14400 \cdot 5}}{2}$$

$$\frac{535}{535}$$

$$14400 \cdot SA^2 = 9a^2 + 10$$

$$\frac{2675}{2675}$$

$$\frac{282000}{20} \quad SB^2 = 9a^2 + 9 \cdot 5 = 9a^2 + 45$$

$$2675$$

$$12 \cdot 11 = 144$$

$$24 \cdot 24 = 576$$

$$286225$$

$$2$$

$$5800 \cdot 5 \quad (SB - SA)(SB + SA) = 95$$

$$535 \sqrt{240\sqrt{5}}$$

$$SB - SA = \frac{35}{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{35(5 - 2\sqrt{5})}{25 - 20}$$

$$107 \sqrt{48\sqrt{5}}$$

$$= 7(5 - 2\sqrt{5}) \quad (8\sqrt{5} - 15)^2 - 10$$

$$\frac{64 \cdot 5}{545} + 225 - 240\sqrt{5} - 10 = 535 - 240\sqrt{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1 + \tan^2 d}{\tan^2 d \left(\frac{1}{\cos^2 2d} - 1 \right)} = \frac{1}{121}$$

$$1 + \tan^2 d = \frac{1}{\cos^2 d}$$

$$\frac{1}{\sin^2 d \left(\frac{1}{\cos^2 2d} - 1 \right)} = \frac{1}{121}$$

$$121 = \sin^2 d \left(\frac{1}{\cos^2 2d} - 1 \right)$$

$$121 = \frac{\sin^2 d (1 - \cos^2 2d)}{\cos^2 2d} = \frac{\sin^2 d \cdot \sin^2 2d}{\cos^2 2d}$$

$$11 = \frac{\sin d \cdot 2 \sin d \cdot \cos d}{\cos^2 d - \sin^2 d}$$

$$11 \cos^2 d - 11 \sin^2 d = 2(1 - \cos^2 d) \cos d$$

$$11 \cos^2 d - 11 + 11 \cos^2 d = 2 \cos d - 2 \cos^3 d$$

$$2 \cos^3 d + 22 \cos^2 d - 2 \cos d - 11 = 0$$

$$2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{22}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} - 11$$

$$\cos^2 d - \frac{1}{2} = -\sqrt{2}$$

$$\cos^2 d = 1$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 1,6 \\ \hline 126 \\ + 21 \\ \hline 33,6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 69,1 \\ - 4 \\ \hline 256,4 \\ + 33,6 \\ \hline 290,0 \end{array}$$

$$\frac{290}{21}$$

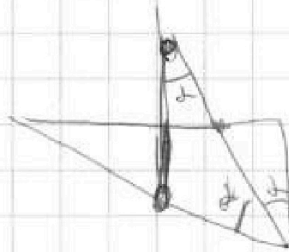
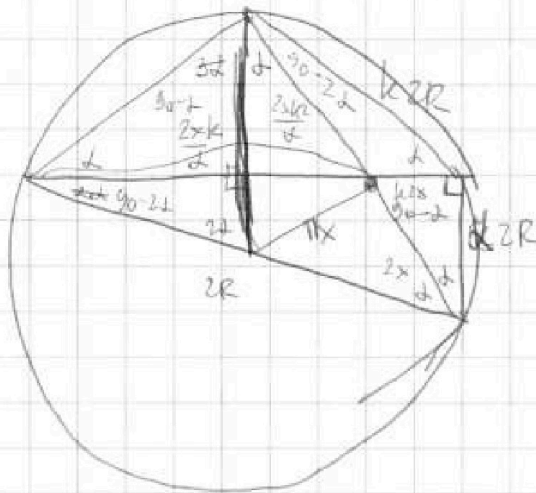
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{2R \cdot \sin 2d \cdot \sin d}{2}$$

$$\frac{2xk^2}{2xk^2 + 2x}$$

$$2R \cos 2d$$

$$R = 2 \sin^2 d \cdot \cos d$$

R

$$\frac{k \cdot 2R}{2xk^2 + 2x} = \frac{k - 2x}{d - 2R} = \frac{xk^2}{x \cdot 2R}$$

$$\frac{xk}{Rd} = \frac{kx}{Rd} = \frac{kRd}{xk^2 + xd}$$

$$k^3 x^2 + kx^2 d = kR^2 d^2$$

$$x^3 + \frac{6}{y^3} = y^3 + \frac{6}{z^3} = z^3 + \frac{6}{x^3}$$

$$x^3 - y^3 + \frac{6}{y^3} - \frac{6}{z^3} = 0 \quad (x^3 - y^3) =$$

$$x^3 - y^3 = \frac{6}{y^3 z^3} (y^3 - z^3) \quad 1 = \frac{6^3}{x^6 y^6 z^6}$$

$$x^3 - z^3 = \frac{6}{x^3 y^3} (y^3 - x^3) \quad (xyz)^6 = 6^3$$

$$y^3 - z^3 = \frac{6}{x^3 z^3} (z^3 - x^3) \quad || \quad xyz = \sqrt[6]{6^3}$$

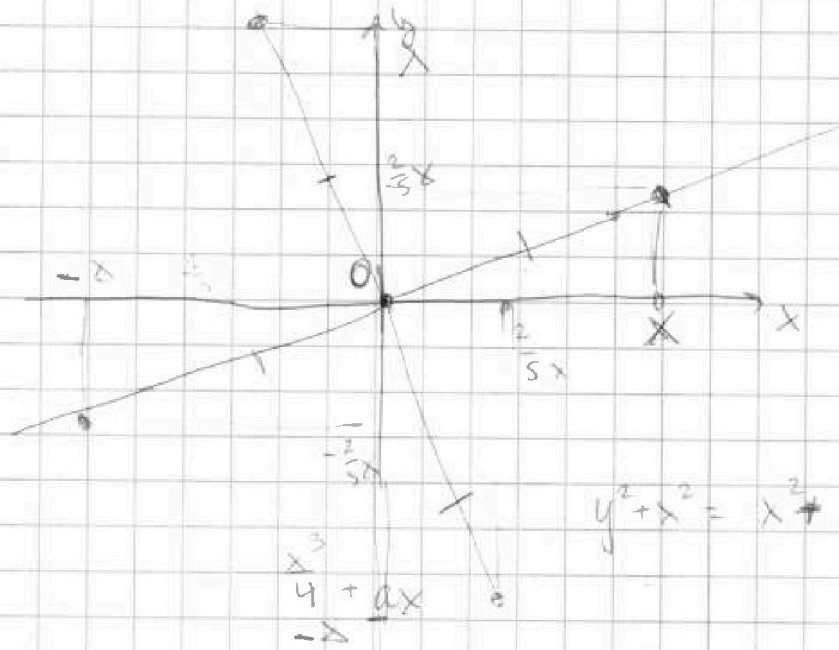
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y^2 + x^2 = x^2 + \frac{4}{25}x^2 = \frac{29}{25}x^2$$

$$y = \frac{2}{5}x = \frac{x^3}{4 + ax}$$

$$x = \frac{\left(\frac{2}{5}x\right)^3}{4} - \frac{2}{5}x \cdot a = -\frac{8x^3}{125 \cdot 4} - \frac{2}{5}x \cdot a$$

$$-x = \frac{8x^3}{125 \cdot 4} + \frac{2}{5}x \cdot a$$

$$-\frac{2}{5}x = \frac{-x^3}{4} + x \cdot a$$

-641

$$\frac{x^3}{4} + \left(a - \frac{2}{5}\right)x = 0 = \frac{-625 - 16}{5} \cdot 42a$$

$$\frac{2x^3}{125} + x\left(\frac{2}{5}a + 1\right) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x^2 + 4a - \frac{8}{5} = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{8}{5} - 4a}$$

$$42a = -125 - \frac{16}{5}$$

$$\frac{2x^2}{125} + \frac{2}{5}a + 1 = 0$$

$$2x^2 = -125 - 50a = \frac{16}{5} - 9a$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$EA = R \cdot \cos 2\alpha$$

$$BC = 2R \cdot \cos 2\alpha$$

$$4x^2 = \frac{4R^2 \sin^2 \alpha \cos^2 2\alpha}{\cos^2 \alpha} + 4R^2 \cos^2 2\alpha$$

$$11x^2 = R^2 \cos^2 2\alpha + 4R^2 \cdot \frac{\sin^6 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{11}{4} = \frac{\cos^2 2\alpha + 4 \frac{\sin^6 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{4 \sin^2 \alpha \cos^2 2\alpha}{\cos^2 \alpha} + 4 \cos^2 2\alpha}$$

$$11 \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 2\alpha}{\cos^2 \alpha} + 11 \cos^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha + 4 \frac{\sin^6 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{11 \sin^2 \alpha \cos^2 2\alpha}{\cos^2 \alpha} + 10 \cos^2 2\alpha - 4 \frac{\sin^6 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 0$$

$$11 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 2\alpha + 10 \cos^2 2\alpha \cdot \cos^2 2\alpha - 4 \sin^6 \alpha = 0$$

$$11 \sin^2 \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha)^2 + 10 (1 - \sin^2 \alpha)^2 (1 - 2 \sin^2 \alpha)^2 - 4 \sin^6 \alpha = 0$$

$$11 \sin^2 \alpha (1 - 4 \sin^2 \alpha + 4 \sin^4 \alpha) + 10 (1 - 2 \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) \times$$

$$\times (1 - 4 \sin^2 \alpha + 4 \sin^4 \alpha) - 4 \sin^6 \alpha = 0$$

$$(1 - 6 \sin^2 \alpha + 13 \sin^4 \alpha + 12 \sin^6 \alpha + 4 \sin^8 \alpha)$$

$$11 \sin^2 \alpha - 44 \sin^4 \alpha + 44 \sin^6 \alpha + 10 - 20 \sin^2 \alpha + 10 \sin^4 \alpha$$

$$10 - 60 \sin^2 \alpha + 130 \sin^4 \alpha - 120 \sin^6 \alpha + 40 \sin^8 \alpha - 4 \sin^6 \alpha =$$

$$= 40 \sin^8 \alpha - 124 \sin^6 \alpha - 80 \sin^4 \alpha + 26 \sin^2 \alpha - 49 \sin^2 \alpha + 10$$



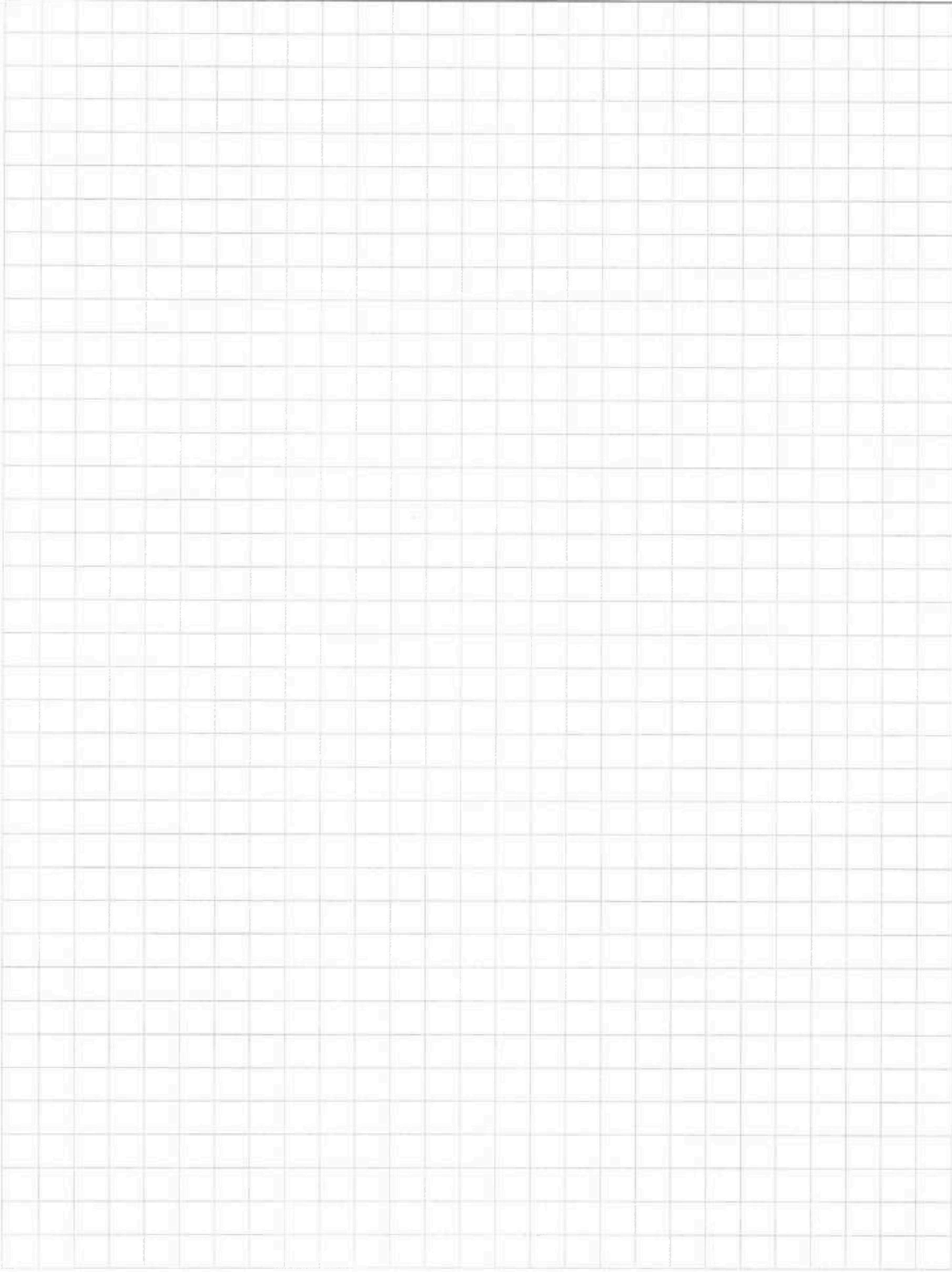
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



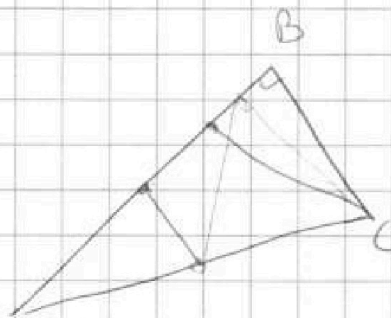
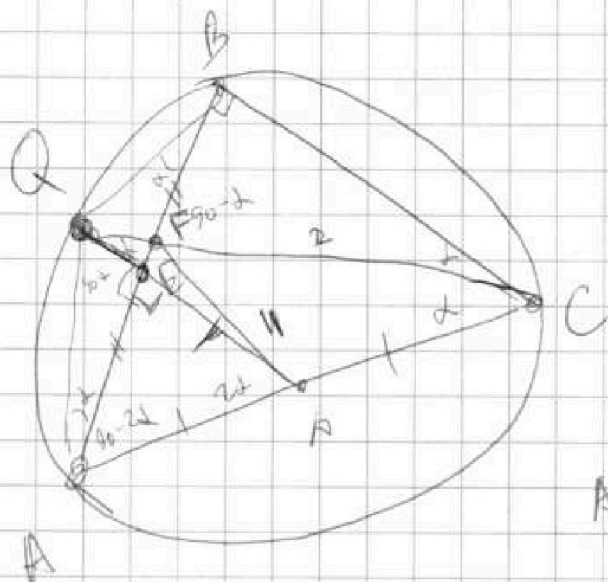
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

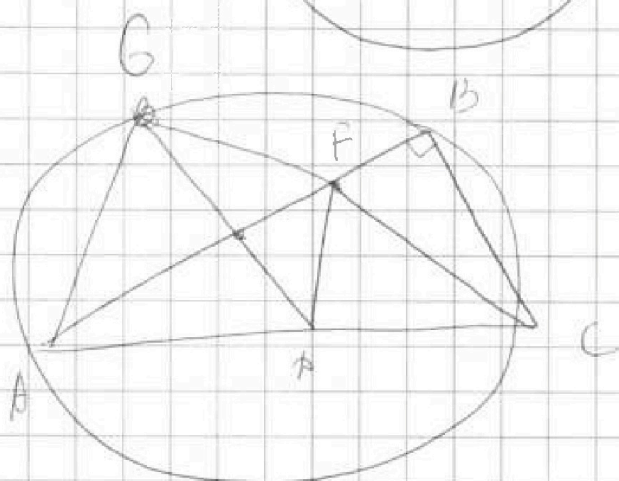
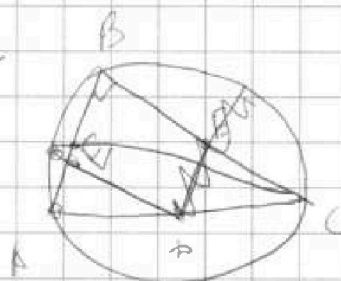
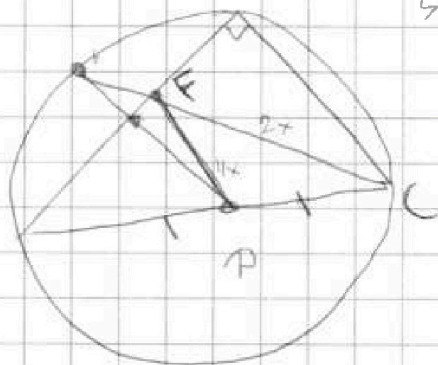
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{\sin 2\alpha} = AC$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{200}{78} \Big| \frac{3}{66}$
 $\frac{20}{20}$
 $\frac{1}{3}, 3$
 $x \in (\frac{1}{3}, 3)$

$2x + \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}R \quad \text{D}$
 $2x + \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}R$
 $x \in (\frac{1}{3}, 3)$
 $\frac{1}{e}, 3$
 $x \in (\frac{1}{3}, 3)$
 $\frac{1}{e} = x + 3$
 $x = \frac{1}{e} - 3$

17061
 $EF + FB = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \sin 2\alpha$
 $EF = R \cdot \sin 2\alpha - FB$
 $FB = \frac{2R \cos 2\alpha \cdot \sin 2\alpha}{2 \cos 2\alpha} = R \sin 2\alpha$
 $EF = R \sin 2\alpha - 2R \sin \alpha \cdot \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} = 2R \sin \alpha \left(\cos \alpha - \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} \right) = 2R \frac{\sin \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$

$AG = 2^{-31} 2^{30} 2^{31} 2^{-30} 2^{30} 2^{30}$
 $= \frac{1}{2} h_2 + \frac{1}{2} (1+x) \cdot 2x$
 $\cos \alpha = 10\sqrt{5} \cos^2 \alpha - 10\sqrt{5}$
 $10\sqrt{5} \cos^2 \alpha - \cos \alpha - 10\sqrt{5} = 0$
 $100\sqrt{5} \cos^2 \alpha - \cos \alpha - 100\sqrt{5} = 0$
 $\cos \alpha = \frac{2R \cos 2\alpha}{2R \sin \alpha} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 2000}}{2}$
 $\cos \alpha = \frac{2R \cos 2\alpha}{2R \sin \alpha} = \frac{2R \cos 2\alpha}{2R \sin \alpha}$
 $AG = 2R \cdot \sin \alpha$
 $AG^2 = 4R^2 \sin^2 \alpha$
 $CG^2 = 4x^2 + 121x^2$
 $CG = 5\sqrt{5}x = R$
 $\frac{1}{x} = \frac{R}{5\sqrt{5}}$