МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 6

1. [4 балла] Решите уравнение
$$4\operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $3^{240} \cdot 7^{240}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$\ln^2(x+2) - (x+1)\ln(4x+8) + (\ln 4)\ln(x+2) \geqslant 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -2x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 5x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом
$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}.$$
Найдите максимально возможное значение произведения xyz.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{10}$, $AD = DC = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$4tg2x + 1 + ctg\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0;$

$\frac{4\cdot 2tgx}{1-tg^2x} + 1 + \frac{ctgx\cdot 1 - 1}{ctgx+1} = 0;$

$\frac{8\cdot tgx}{1-tg^2x} + 1 + \frac{ctgx-1}{ctgx+1} = 0;$

Пусть $tgx = t$. Тогда $ctgx = \frac{1}{t}$.
(Отдельно рассмотрим случай $tgx=0$) →

О.Д.З: $\cos 2x \neq 0 \Rightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x+\frac{\pi}{4} \neq \pi n,\ n\in\mathbb{Z},$

$\Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$\Downarrow$ из этого $\Rightarrow tgX \neq \pm 1$

$ctgX \neq \pm 1$

Если $tgx = 0$, то $x = \pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, тогда:

$4\cdot tg2\pi k + 1 + ctg\left(\pi k + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0;$

$4\cdot 0 + 1 + 1 \neq 0$

$\Downarrow$

$tgx \neq 0$

$\frac{8t}{1-t^2} + 1 + \frac{\frac{1}{t}-1}{\frac{1}{t}+1} = 0;$

$\frac{8t+1-t^2}{1-t^2} = \frac{1-\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}+1};$

$8 + \frac{1}{t} - t + 8t + 1 - \cancel{t^2} = 1 - \frac{1}{t} - \cancel{t^2} + t;$

$6t + 8 + \frac{2}{t} = 0;\quad (\cdot t,\ \text{т.к. } t\neq 0).$

$6t^2 + 8t + 2 = 0;$

$3t^2 + 4t + 1 = 0;$

$\frac{D}{4} = 4 - 3 = 1 > 0 \Rightarrow$ 2 корня

$t_1 = \frac{-2-1}{3} = -1$ — не подходит по О.Д.З.

$t_2 = \frac{-2+1}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow tgx = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = arctg\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Сделаем проверку. $tgx = -\frac{1}{3} \Rightarrow ctgx = -3$

$4\cdot tg2x + 1 + ctg\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\cdot 2\cdot tgx}{1-tg^2x} + 1 + \frac{ctgx-1}{ctgx+1} = -\frac{8}{3}\cdot\frac{9}{8} + 1 +$
$+ \frac{(-4)}{(-2)} = -3 + 1 + 2 = 0.$ ✓

Ответ: $x = arctg\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 Пусть q - знаменатель прогрессии $\Rightarrow q \neq 1$.
Тогда $b = aq$, $c = bq = aq^2 \Rightarrow abc = a^3 \cdot q^3$.

По условию $abc = 3^{240} \cdot 7^{240} \Rightarrow a^3 \cdot q^3 = 3^{240} \cdot 7^{240} \Rightarrow$
$\Rightarrow aq = 3^{80} \cdot 7^{80}$, $aq = b \Rightarrow b = 3^{80} \cdot 7^{80}$.

Заметим, что $q \in \mathbb{Q}$, т.к. $c \in \mathbb{Z}$ по усл-ю и
$c = 3^{80} \cdot 7^{80} \cdot q$. Тогда $q = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$,
$|m|$ и n взаимно просты.

Тогда $a = \frac{b}{q} = \frac{3^{80} \cdot 7^{80} \cdot n}{m}$, $c = bq = \frac{3^{80} \cdot 7^{80} \cdot m}{n}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{80} \cdot 7^{80} \vdots |m|$ и $3^{80} \cdot 7^{80} \vdots n \Rightarrow$ есть несколько вариантов
для $\frac{m}{n}$:

1) $\frac{m}{n} = \pm 3^{\alpha} \cdot 7^{\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $0 \le \alpha, \beta \le 81$, кроме $\alpha = \beta = 0$

2.) $\frac{m}{n} = \pm \frac{1}{3^{\alpha} \cdot 7^{\beta}}$

3.) $\frac{m}{n} = \pm \frac{3^{\delta}}{7^{\gamma}}$; $\gamma, \delta \in \mathbb{Z}$; $0 < \gamma, \delta \le 81$

4.) $\frac{m}{n} = \pm \frac{7^{\delta}}{3^{\gamma}}$

Для 1) кол-во способов выбрать α и β = $82 \cdot 82 - 1$ (исключаем $\alpha = \beta = 1$).

Т.к. m может быть < 0, получаем кол-во различных
$\frac{m}{n}$ $= 2(82 \cdot 82 - 1)$ (для каждого из них $b = 3^{80} \cdot 7^{80}$,
а $a = \frac{b}{q}$, q различны $\Rightarrow$ различны a и $c \Rightarrow$ различны тройки чисел)

Для 2), очевидно, столько же вариантов, т.к.
во 2)-м случае мы берём обратные q из 1)-го случая. (По сути, в 1) возрастающая прогр-я, здесь - убывающая)

Для 3) вариантов $(81 \cdot 81) \cdot 2$, для 4.) по аналогии
столько же. Тогда суммарно $4(82 \cdot 82 - 1) + 4 \cdot 81 \cdot 81 =$
$= 4 \cdot (82^2 + 81^2 - 1) = 4 \cdot (6724 + 6560) = 4 \cdot 13284 = 53136$

Ответ: 53136.

№3) $\ln^2(x+2) - (x+1)\cdot\ln(4x+8) + \ln 4\cdot\ln(x+2) \geq 0;$ О.Д.З.: $x > -2$

$\ln^2(x+2) - (x+1)\cdot\ln 4 - (x+1)\cdot\ln(x+2) + \ln 4\cdot\ln(x+2) \geq 0;$

$(\ln(x+2) - (x+1))(\ln(x+2) + \ln 4) \geq 0;$

$\ln(4x+8)\cdot(\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0;$

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{l} \ln(4x+8) = 0 \\ \ln(x+2) - (x+1) = 0 \\ \begin{cases} \ln(4x+8) > 0 \\ \ln(x+2) - (x+1) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \ln(4x+8) < 0 \\ \ln(x+2) - (x+1) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$

I. $\ln(4x+8) = 0 \Rightarrow 4x+8 = 1 \Rightarrow 4x = -7$

$x = -1{,}75$

При $x \in (-2; -1{,}75)$ $\ln(4x+8) < 0$,

при $x = -1{,}75$ $\ln(4x+8) = 0$,

при $x \in (-1{,}75; +\infty)$ $\ln(4x+8) > 0$

II. $\ln(x+2) - (x+1) = 0;$

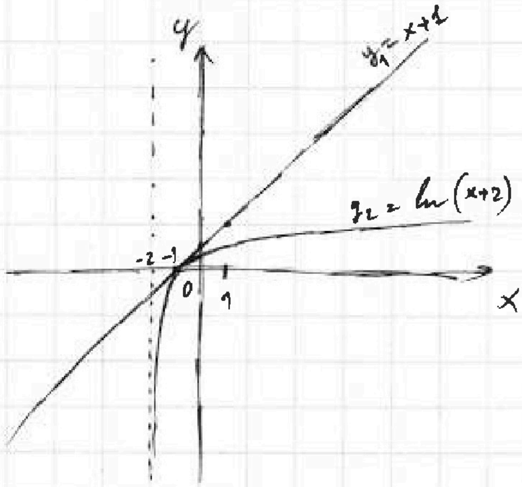
$\ln(x+2) = (x+1)$. Рассмотрим гр-ки этих ф-й

$y_1 = (x+1)$

$y_2 = \ln(x+2)$

Общая точка $(-1; 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ есть решение $x = -1$



~~$y_2(0) < y_1(0)$ $\Rightarrow$ если есть второе пересечение, т.е. $x_2 \neq -1$ и x_2 - корень, то $x_2 \in (-2; 0)$.~~

~~Тогда должен $\exists$ y, в к-м $y_2 > y_1$, т.е. $\ln(x_2+2) > (x_2+1)$ $e^{x_2+1} < x_2+2$ при $x_2 \in (-2; -1)$ $e^{x_2+1} \in (e^{-1}; 1)$~~

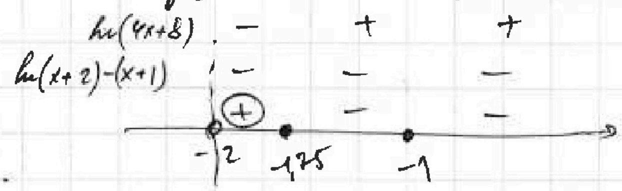
~~$x_2 \in (-1; 0)$ $e^{x_2+1} \in (1; e)$, $x_2+2 \in (1; 2)$~~

$y_2' = \dfrac{1}{x+2}$. Тогда получаем ур-е касательной

для точки с коорд $x = -1$ ур-е кас-й $y = x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1$ явл-ся касательной для $y_2 \Rightarrow$ только один

корень $x = -1$



Ответ: $x \in (-2; -1{,}75] \cup \{-1\}$.

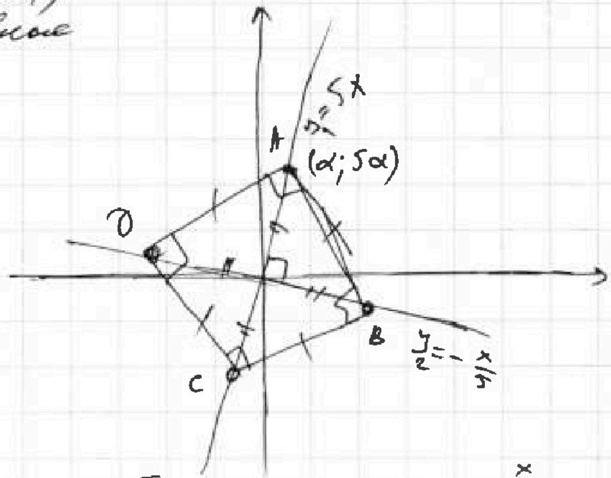
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 Диагонали кв-та $\perp$-ы, равны, делятся точкой $\cap$-я на равные отрезки.
Из перпендикулярности вторая диагональ лежит на $y=-\frac{x}{5}$
Пусть вершина квадрата в I коорд. четверти имеет коорд-ты $(\alpha; 5\alpha)$, (т.к. $\in y=5x$)



$C(-\alpha;-5\alpha)$ из симметрии ф-й $y=5x$ и $y=-\frac{x}{5}$ относительно начала координат.
(нечет. ф-ии) ; $B(5\alpha;-\alpha)$, $D(-5\alpha;\alpha)$.

Тогда для y_1: $\begin{cases} -2\alpha^3-a\alpha=5\alpha \\ -2(5\alpha)^3-a\cdot 5\alpha=-\alpha \end{cases}$
для y_2:

$\begin{cases} -2\alpha^3-a\alpha=5\alpha & \cdot(-5) \\ -250\alpha^3-5a\alpha=-\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10\alpha^3+5a\alpha=-25\alpha \\ -250\alpha^3-5a\alpha=-\alpha \end{cases} +$

$-240\alpha^3=-26\alpha$; $\alpha\neq 0$, иначе квадрат вырождается в точку $(0;0)$ $(:\alpha)$

$-240\alpha^2=-26$

$\alpha=\sqrt{\frac{26}{240}}=\sqrt{\frac{13}{120}}$

Подставим $\alpha=\sqrt{\frac{13}{120}}$ в I ур-е

$-2\left(\sqrt{\frac{13}{120}}\right)^3-a\sqrt{\frac{13}{60}}=5\cdot\sqrt{\frac{13}{120}}$;

$-\frac{\cancel{2}\cdot 26\,13}{\cancel{120}\,60}-a=5\Rightarrow a=-\frac{313}{60}$

Проверим, подставив во II ур-е:

~~$-250\alpha^3+\frac{5\cdot 313}{60}\alpha=-\alpha$~~

$-250\cdot\left(\sqrt{\frac{13}{120}}\right)^3+\frac{5\cdot 313}{60}\sqrt{\frac{13}{120}}=-\sqrt{\frac{13}{120}}$;

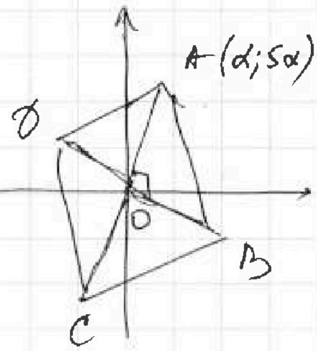
~~$-250\alpha^2+\frac{313}{12}=-1$~~

$-\frac{\cancel{250}^{125}\cdot 13}{\cancel{120}\,60}+\frac{5\cdot 313}{60}=-1$

$-1=-1$ - верно

$S_{кв}=\frac{d^2}{2}$; $OA=\sqrt{\alpha^2+25\alpha^2}=\alpha\sqrt{26}\Rightarrow$

$\Rightarrow d=2\alpha\sqrt{26}\Rightarrow$



$\Rightarrow S_{кв}=52\alpha^2=\frac{52\cdot 13}{120}=\frac{169}{30}$

Ответ: $a=-\frac{313}{60}$, $S_{кв}=\frac{169}{30}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6)

$$x^3+\frac{10}{y^3}=y^3+\frac{10}{z^3}=z^3+\frac{10}{x^3}$$

$$x^3+\frac{10}{y^3}=z^3+\frac{10}{x^3} \Rightarrow \text{I. } x^3-z^3=\frac{10(y^3-x^3)}{x^3y^3}$$

$$y^3+\frac{10}{z^3}=x^3+\frac{10}{y^3} \Rightarrow \text{II. } y^3-x^3=\frac{10(z^3-y^3)}{z^3y^3}$$

$$z^3+\frac{10}{x^3}=y^3+\frac{10}{z^3} \Rightarrow \text{III. } z^3-y^3=\frac{10(x^3-z^3)}{x^3z^3}$$

По усл. не все числа равны между собой $\Rightarrow$ хотя бы одно из этих двух выр-й $\neq 0$

Пусть $x\neq z$:

$$x^3-z^3=\frac{10\cdot 10(z^3-y^3)}{x^3\cdot y^3\cdot z^3\cdot y^3}=\frac{1000(x^3-z^3)}{x^6\cdot y^6\cdot z^6}.$$

Тогда $x^3-z^3\neq 0 \Rightarrow (:(x^3-z^3)) \Rightarrow 1=\frac{1000}{x^6\cdot y^6\cdot z^6} \Rightarrow x^2\cdot y^2\cdot z^2=10$

тогда $xyz=\pm\sqrt{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ max знач. $xyz=\sqrt{10}$

(Если $x=z$, тогда по усл. $y\neq x$, $y\neq z \Rightarrow$

$\Rightarrow z^3-y^3\neq 0$.

$$z^3-y^3=\frac{10(x^3-z^3)}{x^3\cdot z^3}=\frac{100(y^3-x^3)}{x^6\cdot z^3\cdot y^3}=\frac{1000(z^3-y^3)}{(x^6\cdot y^6\cdot z^6)},$$

$1000=x^6\cdot y^6\cdot z^6$. Снова получили $xyz=\pm\sqrt{10}$)

Ответ: $\sqrt{10}$.

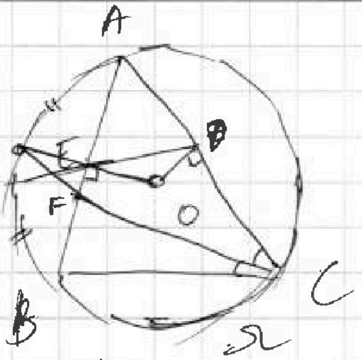
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

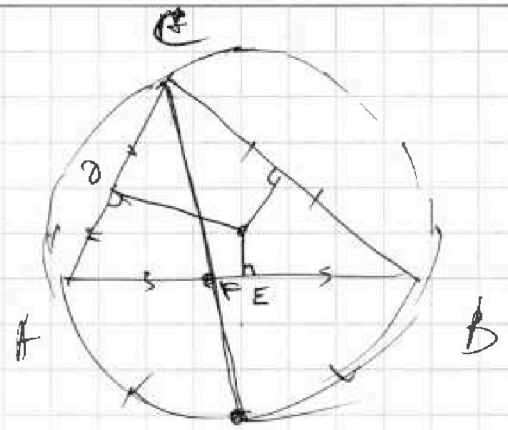
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

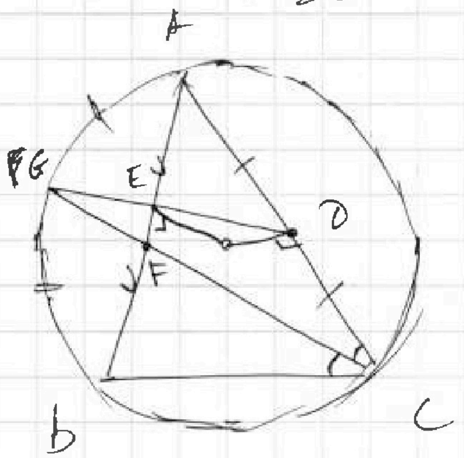
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

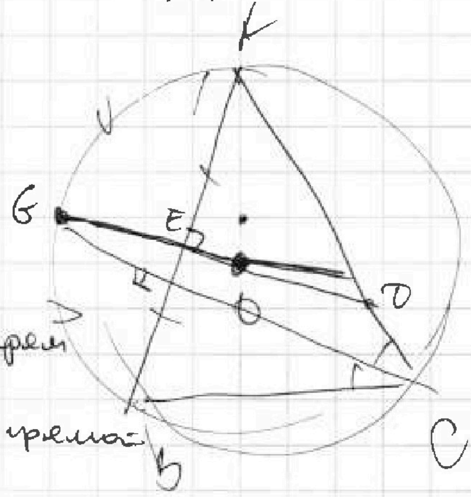
1.)







$$\frac{CF}{OF} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{14}}$$



G, E, D в одной прям

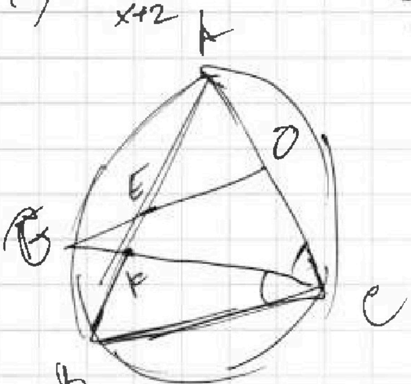
G, E, O ∈ одной прямой

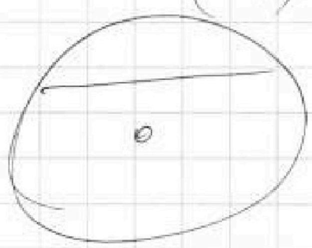
O, E, G - одна прям.

G, E, O - одна прям.

$f(x) = \ln(x+2)$ (-1)

$f'(x) = \frac{1}{x+2}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

всего $4\cdot 3+10+12=84$

$$x^3+\frac{10}{y^3}=y^3+\frac{10}{z^3}=z^3+\frac{10}{x^3}$$

$$x^3+\frac{10}{y^3}=z^3+\frac{10}{x^3}$$

$$x^3-z^3=\frac{10}{x^3}-\frac{10}{y^3}$$

$$\cancel{z^3= x^3+\frac{10}{y^3}-\frac{10}{x^3}}$$

$$x^3-z^3=\frac{10(y^3-x^3)}{x^3y^3}$$

$$y^3-x^3=\frac{10(z^3-y^3)}{y^3z^3}$$

$$x^3-z^3=\frac{10\cdot 10(z^3-y^3)}{y^3\cdot z^3\cdot x^3\cdot y^3}$$

$$z^3-y^3=\frac{10(x^3-z^3)}{x^3\cdot z^3}$$

$$\cancel{x^3-z^3}=\frac{1000(\cancel{x^3-z^3})}{x^6\cdot y^6\cdot z^6}$$

$$1=\frac{1000}{x^6\cdot y^6\cdot z^6}\qquad x^6\cdot y^6\cdot z^6=1000$$

$$x^2\cdot y^2\cdot z^2=10$$

$x=1,\ z=1,\ y=\sqrt{10}$ $\qquad xyz=1\sqrt{10}\Rightarrow xyz_{max}=\sqrt{10}$

$$1+\frac{10}{10\sqrt{10}}=1+\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{10+\sqrt{10}}{10}$$

$$xyz=\sqrt{10}\qquad x=z=-\sqrt[6]{10}$$

$10\sqrt{10}+10$ $\qquad y=\sqrt[6]{10}$

$$\left(-\sqrt[6]{10}\right)^3+\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}\ \cancel{+}\ \sqrt{10}=0$$

$$\sqrt{10}-\frac{10}{\sqrt{10}}=0$$

$$-\sqrt{10}\ \cancel{+}\ -\sqrt{10}=$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Будем считать, что один из корней у $\ln(x+2)-(x+1)$

$x=-1$

$\ln(x+2)-(x+1)<0$ всегда,

кроме $x<-2$ (не опр)

$x=-1$ $(=)$

при $-2<x<-1$

$\ln(0{,}5)-0{,}5<0$

мало мало

I $-$ $+$ $+$

II $-$ $-$ $-$

-2 $-1{,}75$ -1

$(+)$ $-$ $-$

при $x>-1$

$\ln(2)-$

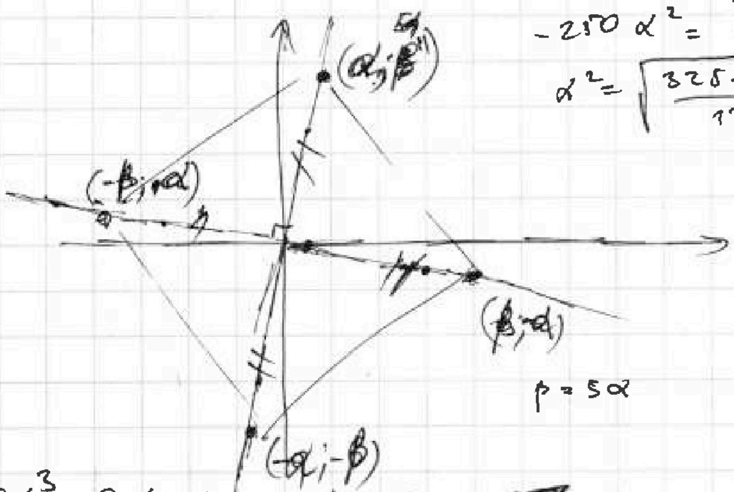
$\ln(x+2)-(x+1)>0$

$\ln(x+2)>(x+1)$

нет

$x\in(-2;-1{,}75]\cup\{-1\}$.

4)



$-250\alpha^2=\frac{-325}{12}$

$\alpha^2=\sqrt{\frac{325-250}{12}}$

$y_1=5x$

под $90°$ $y_2=-\frac{x}{5}$

$y_{кв}=-2x^3-ax$

$b=5a$

$p=5\alpha$

$-2x^3-ax=5x$

имеют корни α и $-\alpha$

$-2\alpha^3-a\alpha=5\alpha$

$+2\alpha^3+a\alpha=-5\alpha$ $(\checkmark)$

$-2x^3-ax=5x$ нет

$-2x^3-ax=-\frac{x}{5}$ нет

$-2x^3-ax=-\frac{x}{5}$

при $x=5\alpha$

и $x=-5\alpha$

$-2x^3-ax=y(x)$

$+2x^3+ax=y(-x)=-y(x)$ нечет

$f(x)=y$

$-2\cdot125\alpha^3-5a\alpha=-\alpha$

$\alpha=250\alpha^3+5a\alpha$

$\begin{cases}-2\alpha^3-a\alpha=5\alpha \\ -2\cdot125\cdot\alpha^3-5a\alpha=-\alpha\end{cases}$ работает

сист. $\begin{cases}-2\alpha^3-a\alpha=5\alpha & \cdot(-5) \\ -250\alpha^3-5a\alpha=-\alpha\end{cases}$

~~$-10\alpha^3-5a\alpha=5\alpha$~~

$\begin{cases}10\alpha^3+5a\alpha=-25\alpha \\ -250\alpha^3-5a\alpha=-\alpha\end{cases}$ $+$

$-240\alpha^2=-26\alpha$ $\alpha\neq0$

$\alpha^2=\frac{26}{240}=\frac{13}{120}$

$\alpha=\sqrt{\frac{13}{120}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{30}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\alpha = \sqrt{\frac{13}{120}}$ проверим найдем a

$-2\left(\sqrt{\frac{13}{120}}\right)^{2} - a\sqrt{\frac{13}{120}} = 5\cdot\sqrt{\frac{13}{120}}$

$-\frac{2\cdot 13}{120} - a = 5 \qquad a = -\frac{13}{60} - 5 = \frac{-13-300}{60} = -\frac{313}{60}$

$-2\left(\sqrt{\frac{13}{120}}\right)^{2} + \frac{313}{60}\cdot\sqrt{\frac{13}{120}} = -\frac{1}{5}\cdot\sqrt{\frac{13}{120}}$

$-\frac{2\cdot 13}{120} + \frac{313}{60} = \frac{313-13}{60} = 5$

$(\ln(x+2))' = \frac{1}{x+2} \quad (-1) = 1$

$k(x-x_0) + y_0 =$

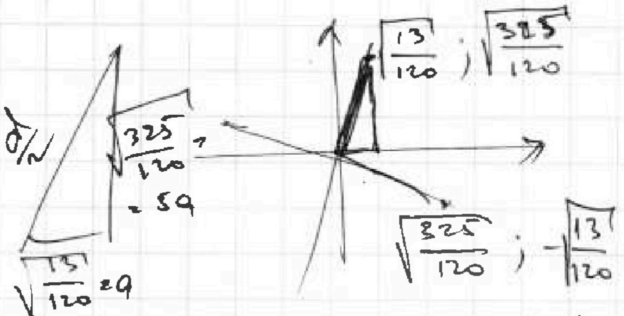
$260 + 50$

$-2x^{2} + \frac{313}{60}x = -\frac{x}{5}$

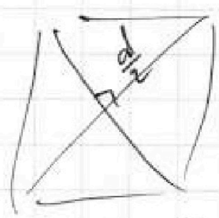
$-2x^{2} + \frac{313}{60} = -\frac{1}{5} =$

$2x^2 = \frac{313}{60} + \frac{1}{5} = \frac{313+12}{60} = \frac{325}{120}$

$x = \sqrt{\frac{325}{120}} \quad ? \quad \sqrt{\frac{13}{120}}\cdot 5 = \sqrt{\frac{13\cdot 25}{120}} = \sqrt{\frac{260+50+15}{120}}$ ✓



AB



$\sqrt{a^2 + 25a^2} = a\sqrt{26} \qquad \frac{d}{2} = a\sqrt{26}$

$\frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2}\cdot 2 = \frac{d^2}{2}$

$S = \frac{52\cdot 13}{120} = \frac{169}{30}$

$d = 2a\sqrt{26} \Rightarrow \frac{d^2}{2} = \frac{4a^2\cdot 26}{2} = 2a^2\cdot 26$

$\ln(x+2) > (x+1)$

$e^{x+1} < x+2$

$125\cdot 13 = 1250 + 300 + 75 =$

$= 1625 + 1565 =$

$=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(\ln(x+2)+\ln 4)(\ln(x+2)-(x+1)) \geq 0$

$b = \ln a$

$a = \ln\frac{1}{b}$

$a = \cancel{b}e^b$

$-a = \ln b$

$\cancel{\ln(x+2)+\ln 4 \geq 0}$

$\underbrace{\ln(4x+8)} \cdot \underbrace{(\ln(x+2)-(x+1))} \geq 0$

$e^{-a} = b \Rightarrow b = \frac{1}{e^a}$

$$\left[\begin{array}{ll} \ln(4x+8)=0 & (1) \\ \ln(x+2)-(x+1)=0 & (2) \\ \begin{cases} \ln(4x+8)>0 & (3) \\ \ln(x+2)-(x+1)>0 & (4) \end{cases} \\ \begin{cases} \ln(4x+2)<0 & (5) \\ \ln(x+1)-(x+1)<0 & (6) \end{cases} \end{array}\right.$$

1) $\ln(4x+8)=0$

$4x+8=1$

$4x=-7$ $\quad x=-\frac{7}{4}=-1{,}75$ ✓

при $x \in (-2; -1{,}75)$ $\ln(4x+8)<0$

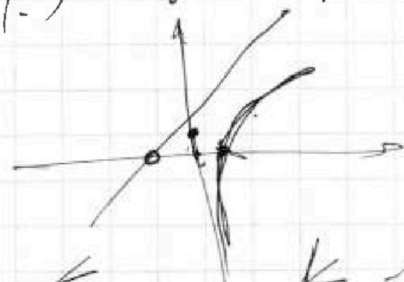
при $x \in (-1{,}75; +\infty)$ ← >0

$e^b = \ln\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}\right)^{e^b} =$

2) $\ln(x+2)-(x+1)=0$

$\ln(x+2)=(x+1)$ $\quad (\ln(x+2)-(x+1))' = \frac{1}{x+2}-1$

(1) это один корень



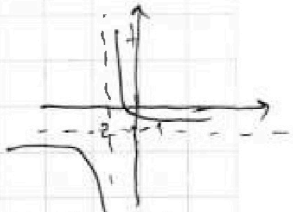
$y=\ln x$

$y'=\frac{1}{x}$ $\quad e^{x+1}=x+2$

$y''=-\frac{1}{x^2}$

0 только

$x=-1$ ✓ $\quad e^0=1$ ✓



$y=\log_2 x$

$1=\log_2 2$

$2=\log_2 4$

$3=\log_2 8$

$\log_2 8=3$

log

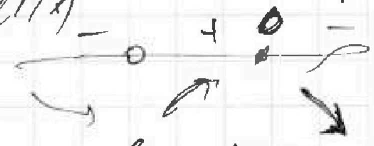
$-1=\log_2\frac{1}{2}$

$-2=\log_2\frac{1}{4}$

0

убывает везде
на $x=-2$
не опр.

$\ln(x+2)=(x+1)$ $\quad f'(x)$

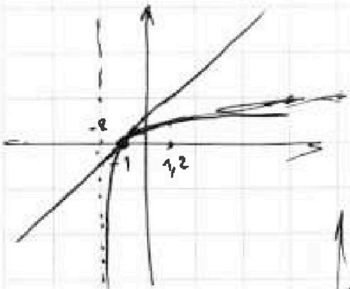


$\ln(1)=0$ $\quad (-1;0)$

$\ln(e)=1$ $\quad e\approx 2{,}7$

$\approx 0{,}7$

$3{,}2 \Rightarrow (1{,}2;1)$



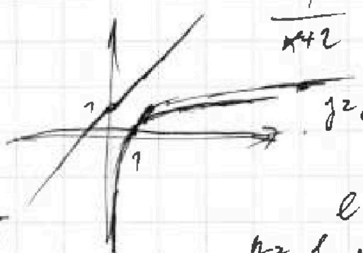
ln если $x+1$ нас

$\frac{1}{x+2}$

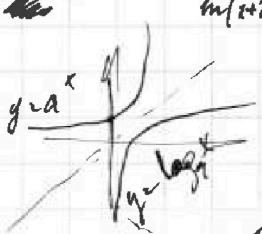
$x+1>0$ при $x>-1$

$\ln(x+2)>0$ при $x+2>e$

при $x>0$



$y=\log_a x$



$y=a^x$

$y=\log_a x$

$y=a^x$

$e=3{,}27$

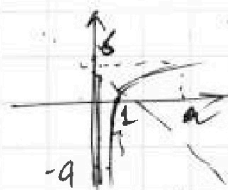
$y=1$ при $x=1{,}27$

$y=2$ при $x+2=10$

$x=8$

$a^x=\log_a x$

$a^{a^x}=x$



b

1 a

$-a$

$y=\log x$ $\quad b=\log a$ $\quad -a=\log b$ $\quad b=\ln a$ $\quad a=-\log_b = -\frac{1}{\log_b e}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{m}{n} = \frac{3^{\alpha}}{7^{\beta}}$ $\qquad \frac{3^{80}\cdot 7^{80}\cdot 3^{\alpha}}{7^{\beta}}$; $\frac{3^{80}\cdot 7^{80}\cdot 7^{\beta}}{3^{\alpha}}$

$0 < \alpha \leq 80$ 80 вар

$0 < \beta \leq 80$ 80 вар.

Короче

1) $q \in \mathbb{Q}$ $\quad q_1 = \pm\frac{3^{\alpha}}{7^{\beta}}$

или

$q_1 = \pm\frac{7^{\beta}}{3^{\alpha}}$

$\frac{3^{\alpha}}{7^{\beta}}$ для α 81 вар

для β 81 вар

$13284 \times 4 = 53136$

т.е. кол-во

$q = 2q_1 = 2q_2$

$(81\cdot 81 - 1)$ - для +

$2(81\cdot 81 - 1)$ - для +-

$4(81\cdot 81 - 1)$ - для $q_1 q_2$

$y_1(0) = 1$

$y_2(0) = \ln 2 < 1$

второй корень должен быть на $\in(-2;0)$

$\ln(x+2)$ $-\infty; <1$

$(-2;0)$ $-1;1$

ещё есть $q_3 = \pm 3^{\gamma}\cdot 7^{\delta}$ и $q_4 = \pm\frac{1}{3^{\gamma}\cdot 7^{\delta}}$

$\gamma \neq 0$, $\delta \neq 0$, т.к. уже посчитано

тогда по 80 вар.

$80\cdot 80\cdot 2\cdot 2$

$\ln(x+2) > (x+1)$ $\qquad e^{x+1} < x+2$

$4(81\cdot 81 - 1) + 4\cdot 80\cdot 80 = 4(81^2 - 1 + 80^2) =$

$= 4\cdot(6560 + 6400) =$

$= 4\cdot 12960 = 51840$ 0

$82^2 = (80+2)^2 =$
$= 6400 + 4\cdot 80 + 4 =$
$= 6400 + 320 + 4 = 6724$

$81^2 = (80+1)^2 = 6400 + 160 + 1 =$
$= 6561$

$12960 \times 4 = 51840$

81×81: 81, 648, 6561

$80\cdot 80 = 6400$

$\ln^2(x+2) - (x+1)\cdot\ln 2(x+2) + \ln 4\cdot\ln(x+2) \geq 0$

$x > -2$

$\ln(x+2) = t$

$t^2 - (x+1)\cdot(\ln 2 + t) + \ln 4\cdot t \geq 0;$

$t^2 - (x+1)\cdot\ln 2 - t(x+1) + 2\ln 2\cdot t \geq 0;$

$\ln(x+2)\cdot\ln(x+2) - (x+1)\cdot(\ln 2 + \ln(x+2)) + \ln 4\cdot\ln(x+2) \geq 0$

$\ln(x+2)(\ln(x+2) - (x+1)) + \ln 4(\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0;$

$(\ln(x+2) + \ln 4)(\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0;$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице.

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\frac{8\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+1+\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot 1-1}{\operatorname{ctg}\alpha+1}=0;$$

Пусть $\operatorname{tg}x=t$

$$\frac{8t}{1-t^2}+1+\frac{\frac{1}{t}-1}{\frac{1}{t}+1}=0;$$

$$\frac{8t+1-t^2}{1-t^2}=\frac{1-\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}}$$

$$\frac{t^2-8t-1}{t^2-1}=\frac{1-\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}}$$

$$\cancel{t^4}-8t-1+t-8-\frac{1}{t}=\cancel{t^2}-1-t+\frac{1}{t}$$

$$-7t-9-\frac{1}{t}=-1-t+\frac{1}{t}; \quad (\cdot t)$$

$$-7t^2-9t-1=-t-t^2+1;$$

$$6t^2+8t+2=0;$$

$$3t^2+4t+1=0;$$

$$D=4-3=1$$

$$t_1=\frac{-2-1}{3}=-1 \text{ — нельзя}$$

$$t_2=\frac{-2+1}{3}=-\frac{1}{3} \text{ — проверим}$$

О.Д.З.: $\operatorname{tg}=\frac{\sin}{\cos}\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2x\neq 0$

$2x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$

$x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$

$x+\frac{\pi}{4}\neq\pi k$

$x\neq-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\operatorname{tg}x\neq\pm 1$

$\operatorname{ctg}x\neq -1$

Отдельно проверить $\operatorname{tg}x=0$

если $\operatorname{tg}x=0\Rightarrow$

$\sin x=0$

$x=\pi k$

$4\operatorname{tg}(2\pi k)+1+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)=$

$=0+1+1=2\Rightarrow t\neq 0$

$\operatorname{tg}x=-\frac{1}{3}\Rightarrow\operatorname{ctg}x=-3$

$\operatorname{tg}2x=\frac{-\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=-\frac{2}{3}:\frac{8}{9}=-\frac{\cancel{2}\cdot 9^3}{\cancel{3}\cdot 8_4}=-\frac{3}{4}$

$-\frac{3\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}}+1+\left(\frac{-3\cdot 1-1}{-3+1}\right)=$

$=-3+1+\frac{-4}{-2}=-3+1+2=0$

✓

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a = a$

$b = aq$

$c = bq = aq^2 \Big| \Rightarrow abc = a^3 \cdot q^3 = (aq)^3$

$(aq)^3 = 3^{240} \cdot 7^{240} \Rightarrow aq = 3^{80} \cdot 7^{80}$

Сначала разберемся с $q > 1$

Всего q вариантов $2(81 \cdot 81 - 1) = (9^4 - 1) \cdot 2$

когда $3^0 \cdot 7^0$

потому что $++$ или $--$

~~если $q<1$~~ если $q < 1$ обозначим q как $\frac{1}{q'}$, где $q' > 1$

$\frac{a}{q'} = 3^{80} \cdot 7^{80}$ $\quad a = 3^{80} \cdot 7^{80} \cdot q'$ ну не очень

$q = \frac{1}{2}$ $\quad q' = 2$

$b^2 = ac$ если $q < 0$, то b_+, c_-, a_- $\Rightarrow b = \sqrt{ac}$

$\sqrt{ac} \cdot ac = (a \cdot c)^{1,5} = (aq)^3$ $\quad$ если $q = \frac{1}{3}$

$ac = aq^2 \cdot a$

$c = aq^2$

$a = 3^{81} \cdot 7^{80}$ $\quad b = 3^{80} \cdot 7^{80}$

$b = aq = 3^{80} \cdot 7^{80}$

$c = 3^{79} \cdot 7^{80}$

$a = \frac{3^{80} \cdot 7^{80}}{q}$ $\quad c = 3^{80} \cdot 7^{80} \cdot q$

$\mathbb{Z}$

$3^{80} \cdot 7^{80} \,\vdots\, q$

если $q \in \mathbb{Z}$ то разобрали

если $q = \frac{m}{n}$

a было

если $q < 0$ и $\mathbb{Z}$ (либо $\frac{1}{q}$), тогда это просто перевертыш к-ю мы уже посчитали

Тогда получается всего $4(9^4 - 1)$

m, n вз. пр-ты

$\frac{3^{80} \cdot 7^{80} \cdot n}{m}$ $\quad \frac{3^{80} \cdot 7^{80} \cdot m}{n}$

$m = 3 \quad n = 7 \Rightarrow q = \frac{3}{7}$

$\frac{3^{80} \cdot 7^{80} \cdot 7}{3} = 3^{79} \cdot 7^{81}$; $3^{80} \cdot 7^{80}$; $3^{81} \cdot 7^{79}$

$m = \pm 3^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$ $\quad n = 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$ $\quad a = \frac{3^{80} \cdot 7^{80} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}}{3^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}}$

$\frac{m}{n} = \frac{3^\alpha}{7^\beta} \Big/ \frac{7^\beta}{3^\alpha} \Big/ \underbrace{3^\alpha \cdot 7^\beta \Big/ \frac{1}{3^\alpha \cdot 7^\beta}}_{\text{рассмотрели}}$