



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360} \cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF .
5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 19$, $XY = 36$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Есть $|x| \geq \sqrt[3]{9}$, но 1-ый метод не работает.
 6) Знаком "1", макс. значение $x^3 - 9 + |x^2 - 1| \leq |x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - 9| + |x^2 - 1|$ все.
 Аналитич. для $|x| \geq \sqrt[3]{9}$ $x^3 - x^2 - 8 \geq 0$; * $x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 - 8 \Rightarrow x^2 \leq 1$, но $x \geq \sqrt[3]{9}$, $x \in \emptyset$
 2) $|x| > \sqrt[3]{9}$, $x > 1$, $x^3 - x^2 - 8 > 0$; * $x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq -x^2 + x + 8 \Rightarrow 2x^3 \leq 0 \Rightarrow$
 * $|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$
 $x^3 - 9 \geq 0$ или $x \in [\sqrt[3]{9}, +\infty)$; < 0 или $x \in (-\infty, \sqrt[3]{9})$; $x^2 - 1 \geq 0$ или $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
 < 0 или $x \in (-1, 1)$, рассмотрим несколько случаев: (1 к $\sqrt[3]{9}$)
 1) $x \in [\sqrt[3]{9}, +\infty)$ * $x^3 - x^2 - 8 \geq 0$; * $x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 - 8 \Rightarrow x^2 \leq 1$, но $x \geq \sqrt[3]{9}$, $x \in \emptyset$
 2) $x \in [\sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{9} + \infty)$ $x^3 - x^2 - 8 \leq 0$; * $x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq -x^2 + x + 8 \Rightarrow 2x^3 \leq 9$, но $x \in [\sqrt[3]{9}, +\infty)$
 ир. ед. нех. точка $x = \sqrt[3]{9}$: $x^3 - x^2 - 8 = 1 - \sqrt[3]{81} < 0$ - нехорошо.
 3) * $x \in [1, \sqrt[3]{9}]$ $x^3 - x^2 - 8 \geq 0$; * $-x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 - 8 \Rightarrow x^3 - x^2 - 8 \geq 0$
 4) $x \in [1, \sqrt[3]{9}]$ $x^3 - x^2 - 8 < 0$; * $-x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8 \Rightarrow 9 \leq 8$, нехорошо. Пусть $A = \{x | x \in [1, \sqrt[3]{9}] \wedge x^3 - x^2 - 8 \geq 0\}$
 тогда $x \in A$ - верно в обоих, но и $x \in [1, \sqrt[3]{9}] \setminus A$ верно в обоих по другому, ир.
 $x \in [1, \sqrt[3]{9}]$ - верно в обоих.
 5) $x \in (-1, 1)$ $x^3 - x^2 - 8 \geq 0$; * $-x^3 + 9 - x^2 + 1 \leq x^3 - x^2 - 8$ $x^3 \geq 9$, но $x \in (-1, 1) \Rightarrow x \in \emptyset$
 6) $x \in (-1, 1)$ $x^3 - x^2 - 8 \leq 0$; * $-x^3 + 9 - x^2 + 1 \leq -x^3 + x^2 + 8$ $x^2 \geq 1$, но $x \in (-1, 1) \Rightarrow x \in \emptyset$
 7) $x \in (-\infty, -1]$ $x^3 - x^2 - 8 < 0$, верно $x^3 < 0$ и $x^2 < 0$; * $-x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8 \Rightarrow 8 \leq 8$ - верно.
 Ответ: $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \sqrt[3]{9}]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c — взаимно простые, н.р. a или b или c ; p, q, r — простые, $p \neq 5, p \neq 7$, то $abc : p$
 но $abc = 5^{160} \cdot 7^{90}$ — произведение, н.р. $a = 5^{4\alpha} \cdot 7^{\beta}, b = 5^{8\gamma} \cdot 7^{\delta}$, где α, β — взаимно
 простые или 0, γ, δ — любые (но $\gamma = \delta = 0$ неверно) (зачисленные могут быть +1)
 тогда $b = aq, c = aq^2$ $abc = a^3 q^3 = 5^{160} \cdot 7^{90} \Rightarrow aq = 5^{120} \cdot 7^{30} = 5^{2+8\gamma} \cdot 7^{\delta+\gamma}$
 $\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 8\gamma = 120 \\ \beta + \gamma = 30 \end{cases}$, т.к. b, c — взаимно простые $c = aq^2 = 5^{2+2\delta} \cdot 7^{2\gamma}$, н.р. $\begin{cases} \alpha + 2\delta \geq 0 \\ \beta + 2\gamma \geq 0 \end{cases}$
 тогда $\begin{cases} \alpha = 120 - 8\gamma \\ \beta = 30 - \gamma \end{cases}; \begin{cases} 240 \geq 8\gamma \\ 60 \geq \beta \end{cases}$, для каждого α однозначно определён
 γ , для $\beta = \gamma$, всего α примитивов 241 значение, $\beta = 61$. Тогда всего
 комбинаций: $241 \cdot 61 - 1 = 14400$ ($q \neq 1$)
 Ответ: 14400

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x = x^2(x-3) - x(11x-34) + 32y - 101 = 0$, квадратное уравнение от x

$$D = (11y - 34)^2 - 4(y-3)(32y-101) = 121y^2 + 34^2 - 22 \cdot 34y + (4y-12)(101-32y) =$$
$$= 121y^2 + 34^2 - 22 \cdot 34y + 404y - 128y^2 - 1212 + 384y =$$

$$= 12yy^2 + 1156 - 484y + 404y - 128y^2 - 1212 + 384y = -4y^2 + 4y - 56 \geq 0$$

МН

кв. уравнение от y :

$$D = 16 - 4(-4)(-56)$$

$$= 16 - 28 \cdot 56 < 0, \text{ н.к.}$$

ели x - квадратное отн. x , но не имеет нем, что верно при $y \neq 3$

$$y = 3; \quad 0 = 32 \cdot 3 - 101 - x(-1) \quad x = 101 - 32 \cdot 3 = 101 - 96 = 5$$

Ответ: $(5; 3)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $DE \perp BC$ ^{высота} $\triangle ABC$, где $DE \parallel BC$
 $\angle EGF = \angle GCB = \angle GCA \Rightarrow \triangle GEC$
 подобен $\Rightarrow AC = 2GE = 2DE + 2DG =$
 $= BC + 2DG$

2) м.к. $\angle GFD = \angle BFC$ и $\angle DGF = \angle FCB$
 $\triangle GDF \sim \triangle BCF$, тогда $S_{\triangle BCF} = 25 S_{\triangle GDF}$

$\Rightarrow \frac{GD}{BC} = \sqrt{\frac{S_{\triangle GDF}}{S_{\triangle BCF}}} = \frac{1}{5}$, тогда $GD = \frac{BC}{5} = 2$ (поскольку $BC = 10$)

тогда $AC = BC + 2DG = 10 + 2 \cdot 2 = 14$

3) $DA = DB = \frac{AB}{2}$, диаметр AB \perp DC $\Rightarrow \frac{5d^2}{2} = \frac{AB^2}{4} \Rightarrow AB = 2\sqrt{10}$

4) 3 теоремы косинусов: $10d^2 = 25d^2 + 49d^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7d^2 \cos \angle C$

$$49d^2 = 10d^2 + 25d^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7d^2 \cos \angle B \quad \left| \begin{array}{l} 10 = 49 - 40 \cos \angle C \Rightarrow \cos \angle C = \frac{64}{70} = \frac{32}{35} \\ 49 = 55 - 10\sqrt{10} \cos \angle B \end{array} \right.$$

$$49 = 55 - 10\sqrt{10} \cos \angle B$$

$$\cos \angle B = -\frac{14}{10\sqrt{10}} = -\frac{7}{5\sqrt{10}}$$

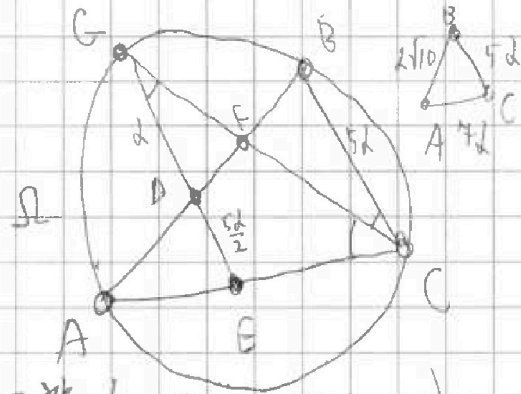
$$25d^2 = d^2 \cdot 10 + 49d^2 - 2 \cdot 7d \cdot 2\sqrt{10} \cos \angle A$$

$$25 = 59 - 14\sqrt{10} \cos \angle A \Rightarrow \cos \angle A = \frac{34}{14\sqrt{10}} = \frac{17}{7\sqrt{10}}$$

Ответ: $\angle A = \arccos\left(\frac{17}{7\sqrt{10}}\right)$

$$\angle B = \arccos\left(-\frac{7}{5\sqrt{10}}\right)$$

$$\angle C = \arccos\left(\frac{32}{35}\right)$$



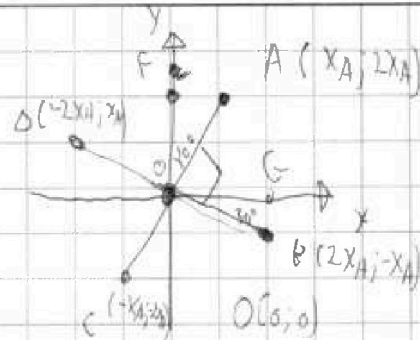
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



формула ABCD
нужно точки A и C, встан на диагональ,
маленько на диагонали $y = -x$, B находится
 $A(x_A; 2x_A)$, н.к. $(0;0)$ - центр квадрата

$C(-x_A; -2x_A)$, пусть $F(0; 2x_A)$, тогда

$$\angle FOA = 30^\circ \quad (FA = \frac{OF}{2}) \quad \text{и} \quad \angle AOB = 90^\circ \Rightarrow \angle BOG = 30^\circ$$

где $B(x_B; y_B)$ а $G(x_B; 0)$ тогда $BG = \frac{OG}{2}$, но $OA = OB$

$$\Rightarrow x_B = 2x_A; y_B = -x_A, \text{ н.к. } O \text{ - центр квадрата } D = (-x_B; -y_B) = (-2x_A; x_A)$$

$A, B, C, D \in y = -x + ax^5$

$$\begin{cases} 2x_A = -x_A^5 + ax_A \\ -x_A = -3 \cdot 2x_A^5 + 2ax_A \\ -2x_A = x_A^5 - ax_A \\ x_A = 32x_A^5 - 2ax_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A^4 = a - 2 \\ 32x_A^4 = 2a + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A = \sqrt[4]{a-2} \\ 32a - 64 = 2a + 1 \\ 30a = 65 \\ a = \frac{65}{30} = \frac{13}{6} \end{cases}$$

$$x_A = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$$

$$OA = \sqrt{x_A^2 + 4x_A^2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = OA \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Ответ: $a = \frac{13}{6}$,

сторона квадрата $\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



пусть $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, если $a=b$, то $a + \frac{4}{a} = a + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a} \Rightarrow a=c$,
 что противоречит условию. Аналогично, если $b=c$, то $a + \frac{4}{a} = a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{b} \Rightarrow a=b$,
 что противоречит условию. Аналогично, если $a=c$, то $a + \frac{4}{a} = a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{b} \Rightarrow a=b$,
 что противоречит условию. Итого, $a \neq b \neq c \neq a$.

пусть $abc = k \neq 0$, тогда $c = \frac{k}{ab}$, подставим в формулу.

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4ab}{k} = \frac{k}{ab} + \frac{4}{a} \Rightarrow a + \frac{4}{b} = \frac{k}{ab} + \frac{4}{a} \Rightarrow a^2 b + 4a = k + 4b$$

$$\Downarrow \Rightarrow (a^2 b) = \frac{k-4a}{b} (*) \text{ и } a^2 = \frac{k+4b-4a}{b} = 1 + \frac{k-4a}{b} (**)$$

$$b + \frac{4ab}{k} = \frac{k}{ab} + \frac{4}{a} \Rightarrow ab^2 + \frac{4a^2 b^2}{k} = k + 4b \Rightarrow b^2 \left(a + \frac{4a^2}{k} \right) = k + 4b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (по формуле **) b^2 \left(a + \frac{4a^2}{k} \right) = b^2 (ak + 4a^2) = k^2 + 4bk \Rightarrow (по формуле *)$$

$$\Rightarrow b^2 \left(ak + 4a + \frac{4k-4a}{b} \right) = k^2 + 4bk \Rightarrow b^2 (ak + 4a) + b(4k - 4a) = k^2 + 4bk$$

$$\Rightarrow b^2 (ak + 4a) = k^2 + 4ab \Rightarrow (a^2 - 4)^2 b^2 (ak + 4a) = k^2 (a^2 - 4)^2 + (a^2 - 4)^2 4ab$$

$$\Rightarrow (по формуле *) (k-4a)^2 (ak + 4a) = k^2 (a^2 - 4)^2 + (a^2 - 4)^2 4ab$$

$$(k^2 + 4ga^2 - 14ak)(ak + 4a) = k^2(a^4 + 4a^2 - 14a^2) + 4ga(a^2 k - 4k - 4a^3 + 4ga)$$

$$ak^3 + 4ga^2 k - 14a^2 k^2 + 4ga^2 k^2 + 4ga^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4ga k = a^4 k^2 + 4ga^2 k^2 - 14a^2 k^2 + 4ga^2 k - 4ga^3 - 4ga^2 + 4ga^2$$

$$\Rightarrow ak^3 - 14a^2 k^2 + 4ga^2 k^2 = a^4 k^2 + 4ga^2 k^2 - 14a^2 k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3(k^2 - 4ga) = k(k^2 - 4ga), \text{ т.е. либо } k^2 = 4ga, \text{ либо}$$

$$a^3 = k, \text{ но если так, то по } (*) (a^2 - 4)b = k + 4a = a(a^2 - 4), \text{ т.е.}$$

$$\text{либо } a=b \text{ (что неверно), либо } a^2 = 4, \text{ тогда } k^2 = a^6 = 4^3 = 64.$$

пусть $k = \sqrt[3]{64}$, тогда $a = \sqrt[3]{4}, b = -\sqrt[3]{4}, c = -2\sqrt[3]{4}$

$$k = abc = \sqrt[3]{4} \cdot \left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right) \cdot (-2\sqrt[3]{4}) = \sqrt[3]{64}, \text{ а исходное равенство имеет вид:}$$

$$\sqrt[3]{4} + \frac{4}{-\sqrt[3]{4}} = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2} + \frac{4}{-\sqrt[3]{4}} = -2\sqrt[3]{4} + \frac{4}{-\sqrt[3]{4}} = -\sqrt[3]{4}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{64}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

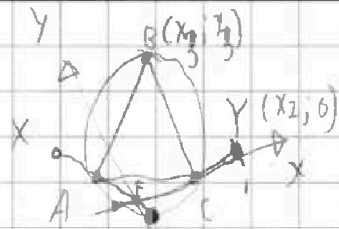
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ΔABC с F — центром тяжести, $F(0;0)$, $Y(X_2;0)$
 дискриминанте координаты, $F(0;0)$, $Y(X_2;0)$
 $X(X_1; Y_1)$, $BC = 1$, тогда
 $A\left(\frac{x_1}{\lambda+1}, \frac{y_1}{\lambda+1}\right)$, $XY = 36$



$FB = 19$; $x_3^2 + y_3^2 = 19^2$, т.к. ΔABC — равносторонний.
 $(x_2 - x_1)^2 + y_1^2 = 36^2$

$$\left(x_3 - \frac{x_1}{\lambda+1}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{\lambda+1}\right)^2 = \left(x_3 - \frac{x_2 \lambda}{\lambda+1}\right)^2 + y_3^2$$

по формуле Герона

$$S = \frac{y_3 x_2 + y_1 x_3 - x_1 y_3}{2}$$

B	x_3	y_3
Y	x_2	0
F	0	0
X	x_1	y_1
A	x_3	y_3

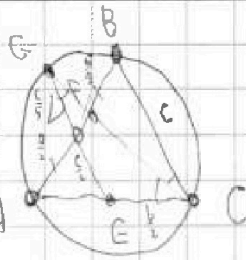
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

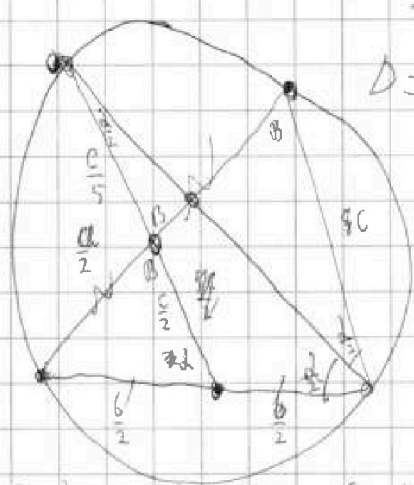
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



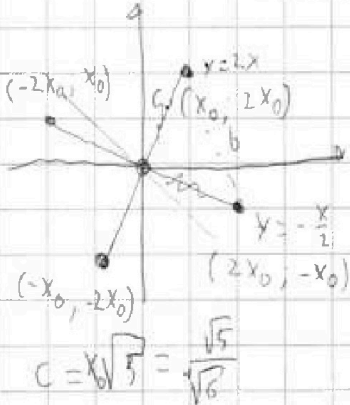
$S_{\triangle BCF} = 25$ $S_{\triangle DGF}$
 $\angle A = \angle B = \angle C = ?$



$4y^2 - 4y + 56 = 0$
 $D = 16$

$\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{c}{5} \cdot \frac{c}{5}$
 $a = c \sqrt{\frac{2}{5}}$ $b = c + \frac{2c}{5} = \frac{7c}{5}$

$10 = 25 + 49 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos \alpha = 74 - 70 \cos \alpha$ $\cos \alpha = \frac{64}{70} = \frac{32}{35}$
 $49 = 25 + 10 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{10} \cdot \cos \beta = 35 - 10\sqrt{10} \cos \beta$ $\cos \beta = -\frac{14}{10\sqrt{10}} = -\frac{7}{5\sqrt{10}}$
 $25 = 10 + 49 - 2 \cdot \sqrt{10} \cdot 7 \cdot \cos \gamma = 59 - 14\sqrt{10} \cos \gamma$ $\cos \gamma = \frac{34}{14\sqrt{10}} = \frac{17}{7\sqrt{10}}$



$2x_0 = -x_0^5 + ax_0$
 $-x_0 = -32x_0^5 + 2ax_0$
 $2x_0 = 1x_0^5 - ax_0$
 $x_0 = 32x_0^5 - 2ax_0$
 $x_0^4 = a - 2$ $2a + 1 = 32a - 64$ $30a = 65$ $a = \frac{65}{10} = \frac{13}{2} = 2\frac{1}{2}$
 $2x_0^4 = 2a + 1$ $x_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $b = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \sqrt{2}$
Orbit: $2\frac{1}{6}, \frac{15}{16}, \sqrt{2}$

$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a}$ $a^2bc + 7ac = ab^2c + 7ab = abc^2 + 7bc$
 $abc + 7c = b^2c + 7b = bc^2 + \frac{7bc}{a}$ $a = \frac{4}{b + \frac{4}{c} - c}$ $7 = b^2 + \frac{14}{c} + \frac{49}{c^2} - 7 - \frac{14}{cc} + \frac{49}{c^2} - 6c - 7 + \frac{7c}{c}$
 $abc + 7a = a^2c^2 + 7c = a^2c + \frac{7ac}{b}$ $a = \frac{4}{b + \frac{4}{c} - c} = \frac{4}{b + \frac{49}{c^2} - \frac{49}{6c} - 14 - 6c + 14 \frac{c}{6} + 14 \frac{b}{c}}$
 $abc + 7b = a^2b + 7a = ab^2 + \frac{7ab}{c}$ $1 + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} - c + 4$ $abc = k$ $a + \frac{4}{b} = b + \frac{7ab}{k} = b + \frac{4}{ab} + \frac{4}{a}$
 $3abc + 7(a+b+c) = a^2b + ac^2 + b^2c + 7(a+b+c) = ab^2 + a^2c + b^2c + 7(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c})$
 $a^2b + ac^2 + b^2c = ab(a + \frac{4}{b}) + ac(c + \frac{4}{a}) = ab(b + \frac{4}{a}) + ac(a + \frac{4}{c}) + bc(c + \frac{4}{a}) =$
 $abc = \frac{a^2b + ac^2 + b^2c}{3} + bc(b + \frac{4}{c}) = (a + \frac{4}{b})(ab + ac + bc)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 + x^2 - 8|$ *Область: $x \in (-\infty, -1] \cup [1, 19]$*

1) $|x| \geq \sqrt[3]{9}$ $x^3 - x^2 - 8 \geq 0$ *(I)*

$x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq x^3 + x^2 - 8$

$2x^2 \leq 2$ $x \in (-1, 1]$ *против.*

2) $|x| < \sqrt[3]{9}$ $x^3 - x^2 - 8 \leq 0$ $x \in (-\infty, -\sqrt[3]{9}]$

$x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8$

$2x^3 \leq 18$ $x \leq \sqrt[3]{9}$

3) $|x| < \sqrt[3]{9}$ $|x| \geq 1$ $x^3 - x^2 - 8 \geq 0$

$-x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 - 8$

$16 + 2x^2 \leq 2x^3$

$13/6$ $x^3 - x^2 - 8 \geq 0$

4) $|x| < \sqrt[3]{9}$ $|x| \geq 1$ $x^3 - x^2 - 8 \leq 0$ *(II)*

$-x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8$

$8 \leq 8$

5) $|x| < \sqrt[3]{9}$ $|x| < 1$ $x^3 - x^2 - 8 \geq 0$

$-x^3 + 9 - x^2 + 1 \leq x^3 - x^2 - 8$

$18 \leq 2x^3$

$9 \leq x^3$ $|x| \geq \sqrt[3]{9}$

6) $|x| < \sqrt[3]{9}$ $|x| < 1$ $x^3 - x^2 - 8 \leq 0$

$-x^3 + 9 - x^2 + 1 \leq -x^3 + x^2 + 8$

$2 \leq 2x^2$

$|x| \geq 1$ *противоречие.*

$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$ δ, ψ - корни

$D = (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) = 121y^2 - 748y + 1156 - 4(32y^2 - 101y - 96y + 303) = 13y^2 - 448y + 1156 - 128y^2 + 1904y - 3888 = -115y^2 + 1456y - 2732$

$-115y^2 + 1456y - 2732 \geq 0$ $115y^2 - 1456y + 2732 \leq 0$

$115y - 34 \pm \sqrt{-7y^2 + 140y - 56}$

$2(y-3)$

$2 + \frac{6 \pm \sqrt{6}}{7} = \frac{20 \pm 2\sqrt{6}}{7} = \frac{40 \pm 4\sqrt{6}}{14} = \frac{20 \pm 2\sqrt{6}}{7} = 2 + \frac{2\sqrt{6}}{7} = 3 + \frac{2\sqrt{2}}{4} < 4$

$y = 3 + \text{линейное}$

$-115y^2 + 1456y - 2732 = 0$ $3 - 56 = 120 - 56 - 63 = 120 - 119 = 1$ *Область: (5; 3)*

$x = \frac{32 \cdot 3 - 101}{11 \cdot 3 - 34} = \frac{101 - 96}{33 - 34} = \frac{5}{-1} = -5$ *(III)*

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

0 1
1 0
0 0
0 1

X_3, Y_3
 $X_2, 0$
 $0, 0$
 X_1, Y_1
 X_3, Y_3

$(0; 1)$
 $(0, 0)$ $(1, 0)$
 (X_3, Y_3)

$X_2 = 1 \quad Y_2 = 0$

~~X_3~~
 ~~X_3~~

36
 (X_1, Y_1)
 $(\frac{X_1}{\lambda+1}, \frac{Y_1}{\lambda+1}) = (\frac{X_1}{\lambda+1}, \frac{Y_1}{\lambda+1})$
 $(X_1, -1)^2 + Y_1^2 = 36^2$
||
 $(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 = 36^2$
 $X_3^2 + Y_3^2 = 19^2$

(X_2, Y_2)
 $(\frac{X_2 \lambda}{\lambda+1}, \frac{Y_2 \lambda}{\lambda+1}) = (\frac{\lambda}{\lambda+1}, 0)$
 $\frac{2S}{\sin \alpha} = CA + (36+h)(19-c) - C(36-h) - h(19-c) = 4Scm$
 $\frac{X_1 Y_3 - Y_3 X_2 - Y_1 X_3}{2}$

$(X_3 - \frac{X_1}{\lambda+1})^2 + (Y_3 - \frac{Y_1}{\lambda+1})^2 = (X_3 - \frac{\lambda}{\lambda+1})^2 + Y_3^2$
 $(X_3 \lambda + X_3 - X_1)^2$

$X_3^2 + Y_3^2 = 19^2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МОФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a}$$

$$abc = k$$

$$c = \frac{k}{ab}$$

$$1) k^2 = 49$$

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4ab}{k} = \frac{k}{ab} + \frac{4}{a}$$

$$k(k^2 - 4 \cdot 49) = a^3(k^2 - 4 \cdot 49)$$

$$a^3 = k$$

$$1) a + \frac{4}{b} = \frac{k}{ab} + \frac{4}{a}$$

$$a^2b + 4a = k + 4b$$

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4b}{a^2} = \frac{a^2}{b} + \frac{4}{a}$$

$$b = \frac{k - 4a}{a^2 - 4}$$

$$a^2 = \frac{k + 4b - 4a}{b} = 4 + \frac{k - 4a}{b}$$

$$2) a^2 = 4$$

$$k = (\sqrt{4})^3 = \sqrt{4}^3$$

$$ab + 4 = b^2 + \frac{4b^2}{a^2} = a^2 + \frac{4}{a}$$

$$2) a b + \frac{4ab}{k} = \frac{k}{ab} + \frac{4}{a} \Rightarrow (a^2 - 4) \frac{1}{a} b = b \left(a - \frac{4}{a} \right) = a^2 - 4$$

$$ab^2 + \frac{4ab^2}{k} = k + 4b$$

$$a = b$$

$$a = b = c$$

$$b^2 \left(1 + \frac{4}{a^2} \right) = 4 + ab$$

$$ab^2k + 4a^2b^2 = k^2 + 4bk$$

$$b^2(ak + 4a^2) = k^2 + 4bk$$

$$S: k = \sqrt{4^3}$$

$$b^2(ak + 4a^2) = k^2 + 4bk$$

$$c = -2\sqrt{4}$$

$$a = \sqrt{4}$$

$$b^2(ak + 4a^2) + 4/k = k^2 + 4/k + 49ab$$

$$a + \frac{4}{b} = 2b + \frac{4}{b} = \frac{4}{b} + \frac{4}{a}$$

$$b^2(ak + 4a^2) = k^2 + 49ab$$

$$2b^2 = \sqrt{4}b + 4$$

$$2b^2 - \sqrt{4}b - 4 = 0$$

$$b = 4 + 4 \cdot 2 \cdot 4 = 9 \cdot 4$$

$$2b^2 = ab + 4$$

$$2b^2 - ab - 4 = 0$$

$$\Delta = a^2 + 4 \cdot 2 \cdot 4$$

$$(k - 4a)^2(ak + 4a^2) = k^2(a^2 - 4) + 49ab(a^2 - 4)$$

$$(k^2 - 14ak + 49a^2)(ak + 4a^2) = a^4k^2 - 14a^2k^2 + 49k^2 + 49a(a^2k - 4k - 4a^3 + 49a)$$

$$ak^3 - 14a^2k^2 + 49a^3k + 49k^2 - 14 \cdot 49ak + 49a^2 = a^4k^2 - 14a^2k^2 + 49k^2 + 49a^3k - 49 \cdot 4ak - 4 \cdot 49a^3 + 49a^2$$

$$ak^3 = a^4k^2 - 4 \cdot 49a^3 + 4 \cdot 49ak \Rightarrow k^3 = a^4k^2 - 4 \cdot 49a^3 + 4 \cdot 49k$$

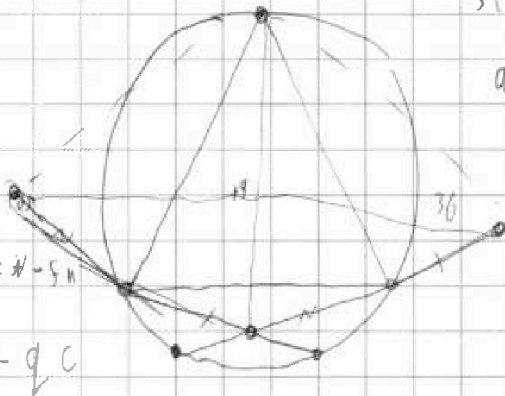
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

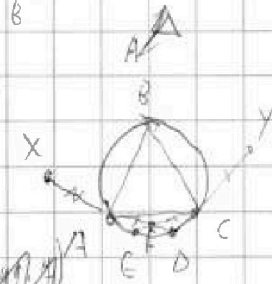
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S(BXFY) = S$$

$$a^3(k^2 - 49 \cdot 4) = k^3 - 7 \cdot 49k$$

$$a^3 = k$$



$$\begin{aligned} 19-C \\ -19h + Ch = h - 5h \\ 36-h \\ -36c + Ch = -9c \end{aligned}$$

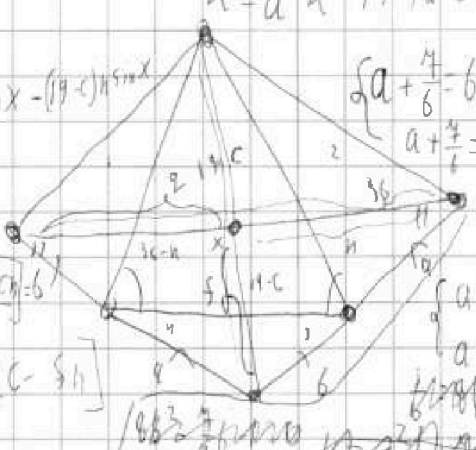
$$a^3 = k$$

$$k^3 = a^3 k^2 - 49 \cdot 7a^3 + 7 \cdot 49k$$

$$2S = \sin(x)Ch + \sin(x)(19-C)(36-h) - 19(36-h)\sin x - (19-C)h\sin x$$

$$\begin{cases} a + \frac{4}{6} = b + \frac{4}{6} \\ a + \frac{4}{6} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \end{cases}$$

$$= \sin(x) [Ch + (19-C)(36-h) - 19(36-h) - (19-C)h] =$$



$$= \sin(x) [Ch + 19 \cdot 36 - 19h + Ch - 36C - 19 \cdot 36 + 19h - 19h + Ch - 6]$$

$$\begin{cases} a + \frac{4}{6} = 8b \\ a + \frac{4}{6} = \frac{4}{6} \end{cases}$$

$$= \sin(x) [3Ch - 19h - 36C] = \sin(x) [Ch - 9C - 5h]$$

$$\Rightarrow S = \boxed{2} + \boxed{1} + \boxed{3}$$

$$b + \frac{4ab}{k} = \frac{k}{ab} + \frac{4}{a}$$

$$ak + \frac{4}{6}k = 6k + 4ab$$

$$a^3b + 4a^2 = ka + 4ab$$

$$b = \frac{ka - 4a^2}{a^3 - 4a} = \frac{k - 4a}{a^2 - 4}$$

$$ab^2k + 4a^2b^2 = k^2 + 4bk$$

$$b^2(ka + 4a^2) = k^2 + 4bk$$

$$b^2 \left(ka + \frac{4k - 49a}{6} + 4a \right) = k^2 + 4bk$$

$$a^2 = \frac{k - 4a + 4}{6}$$

$$\frac{k}{6} - \frac{4}{6} = \frac{4}{6} + \frac{4}{6}$$

$$\begin{cases} a + \frac{4}{6} = b + \frac{4}{6} \\ a + \frac{4}{6} = \frac{k}{6} + \frac{4}{6} \end{cases}$$

$$ak + \frac{4}{6}k = b + 4ab$$

$$k + k(4ab) = b + 4ab \Rightarrow a^3b + 4a^2 = ka + 4ab$$

$$b^2(ka + 4a^2) = k^2 + 4bk \Rightarrow \frac{k}{6}k = b + 4ab - a^3 - 4a^2$$

$$(k - 4a^2)^2 (ka + 4a^2) = k^2 (a^2 - 4) + 49a(a^2 - 4)(k - 4a)$$

$$(k^2 + 49a^2 - 14ak)(ka + 4a^2) = k^2(a^2 - 4) + 49a(a^2 - 4)(k - 4a)$$

$$k^3a + 49ak^2 - 14a^2k^2 + 49k^2 + 19a^3 - 14a^2k = a^4k^2 + 49a^4k - 14a^4k^2 - 49a^4 + 19a^4k - 14a^4k^2 - 49a^4k + 19a^4$$

$$k^3a - 14 \cdot 49ak = a^4k^2 - 49 \cdot 4a^4 - 49 \cdot 4ak$$

$$k^3a = a^4k^2 - 49 \cdot 4a^4 + 4 \cdot 49ak$$

$$k = \frac{b^2 + 14ab^2 - a^3b - 4a^2b}{7}$$

$$a = 1$$

$$k = \frac{b^2 + 14b^2 - b^2 - 4b}{7}$$

$$= \frac{14b^2 - 4b}{7} = 2b^2 - \frac{4}{7}b$$