



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $5^{360} \cdot 7^{90}$ ?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $CF$  – биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $ED$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что площадь треугольника  $BCF$  в 25 раз больше площади треугольника  $DGF$ .
5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = -x^5 + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = 2x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения  $abc$ .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность  $\omega$ , а на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , взяты точки  $E$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . На лучах  $EA$  и  $DC$  отметили точки  $X$  и  $Y$  соответственно таким образом, что  $AX = CF$  и  $CY = AF$ . Найдите площадь четырёхугольника  $BXFY$ , если  $BF = 19$ ,  $XY = 36$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Есть  $|x| \geq \sqrt[3]{9}$ , но 1-ый метод не работает.  
 6) Знаком "1", макс. коэф. перед  $x^3$   $x^3 - 9 + |x^2 - 1| \leq |x^3 - 8|$  все.  
 Аналитич. для  $|x| \geq \sqrt[3]{9}$   $x^3 - x^2 - 8 \geq 0$ ; \*  $x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 - 8 \Rightarrow x^2 \leq 1$ , но  $x \geq \sqrt[3]{9}$ ,  $x \in \emptyset$   
 2)  $|x| > \sqrt[3]{9}$ ,  $x > 1$ ,  $x^3 - x^2 - 8 > 0$ ; \*  $x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8 \Rightarrow 2x^3 \leq 0 \Rightarrow$   
 \*  $|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$   
 $x^3 - 9 \geq 0$  или  $x \in [\sqrt[3]{9}, +\infty)$ ;  $< 0$  или  $x \in (-\infty, \sqrt[3]{9})$ ;  $x^2 - 1 \geq 0$  или  $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$   
 $< 0$  или  $x \in (-1, 1)$ , рассмотрим несколько случаев: (1 к  $\sqrt[3]{9}$ )  
 1)  $x \in [\sqrt[3]{9}, +\infty)$  \*  $x^3 - x^2 - 8 \geq 0$ ; \*  $x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 - 8 \Rightarrow x^2 \leq 1$ , но  $x \geq \sqrt[3]{9}$ ,  $x \in \emptyset$   
 2)  $x \in [\sqrt[3]{9}, +\infty)$   $x^3 - x^2 - 8 \leq 0$ ; \*  $x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8 \Rightarrow 2x^3 \leq 9$ , но  $x \in [\sqrt[3]{9}, +\infty)$   
 ир. ед. нех. точка  $x = \sqrt[3]{9}$ :  $x^3 - x^2 - 8 = 1 - \sqrt[3]{81} < 0$  - нехорошо.  
 3) \*  $x \in [1, \sqrt[3]{9}]$   $x^3 - x^2 - 8 \geq 0$ ; \*  $-x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 - 8 \Rightarrow x^3 - x^2 - 8 \geq 0$   
 4)  $x \in [1, \sqrt[3]{9}]$   $x^3 - x^2 - 8 < 0$ ; \*  $-x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8 \Rightarrow 9 \leq 8$ , нехорошо. Пусть  $A = \{x | x \in [1, \sqrt[3]{9}], x^3 - x^2 - 8 \geq 0\}$   
 тогда  $x \in A$  - верно в обоих, но и  $x \in [1, \sqrt[3]{9}] \setminus A$  верно в обоих по другому \* ир.  
 $x \in [1, \sqrt[3]{9}]$  - верно в обоих.  
 5)  $x \in (-1, 1)$   $x^3 - x^2 - 8 \geq 0$ ; \*  $-x^3 + 9 - x^2 + 1 \leq x^3 - x^2 - 8$   $x^3 \geq 9$ , но  $x \in (-1, 1) \Rightarrow x \in \emptyset$   
 6)  $x \in (-1, 1)$   $x^3 - x^2 - 8 \leq 0$ ; \*  $-x^3 + 9 - x^2 + 1 \leq -x^3 + x^2 + 8$   $x^2 \geq 1$ , но  $x \in (-1, 1) \Rightarrow x \in \emptyset$   
 7)  $x \in (-\infty, -1]$   $x^3 - x^2 - 8 < 0$ , верно  $x^3 < 0$  и  $x^2 < 0$ ; \*  $-x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8 \Rightarrow 8 \leq 8$  - верно.  
 Ответ:  $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \sqrt[3]{9}]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c$ , если  $a$  или  $b$  или  $c$  :  $p, \exists q^2$   $p$ -простое,  $p \neq 5, p \neq 7$ , то  $abc : p$   
 но  $abc = 5^{160} \cdot 7^{90}$  произведение, н.р.  $a = 5^{4 \cdot 13}, q = 5^{8 \cdot 7}$ , где  $d, b$  - взаимно  
 простые или  $0, \gamma, \psi$  - углы (но  $\gamma = \psi = 0$  неверно) (заметим, что  $abc \equiv 1 \pmod{11}$ )  
 тогда  $b = aq, c = aq^2$   $abc = a^3 q^3 = 5^{160} \cdot 7^{90} \Rightarrow aq = 5^{120} \cdot 7^{30} = 5^{2 \cdot 60} \cdot 7^{30}$   
 $\Rightarrow \begin{cases} d + 8 = 120 \\ b + \psi = 30 \end{cases}$ , т.к.  $b, c$  - взаимно  
 тогда  $\begin{cases} d = 120 - 8 \\ \psi = 30 - b \end{cases}; \begin{cases} 240 \geq d \\ 60 \geq b \end{cases}$ , для каждого  $d$  однозначно определена  
 $\gamma$ , для  $b = \psi$ , всего  $d$  примитивных  $241$  значений,  $b = 61$ . Тогда всего  
 комбинаций:  $241 \cdot 61 - 1 = 14400$  ( $q \neq 1$ )  
 Ответ:  $14400$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x = x^2(x-3) - x(11x-34) + 32y - 101 = 0$ , квадратное уравнение от  $x$

$$D = (11y - 34)^2 - 4(y-3)(32y-101) = 121y^2 + 34^2 - 22 \cdot 34y + (4y-12)(101-32y) =$$
$$= 121y^2 + 34^2 - 22 \cdot 34y + 404y - 128y^2 - 1212 + 384y =$$

$$= 12yy^2 + 1156 - 484y + 404y - 128y^2 - 1212 + 384y = -4y^2 + 4y - 56 \geq 0$$

МН

кв. уравнение от  $y$ :

$$D = 16 - 4(-4)(-56)$$

$$= 16 - 28 \cdot 56 < 0, \text{ н.к.}$$

ели  $x$  - квадратное отн.  $x$ , но не имеет нем, что верно при  $y \neq 3$

$$y = 3; \quad 0 = 32 \cdot 3 - 101 - x(-1) \quad x = 101 - 32 \cdot 3 = 101 - 96 = 5$$

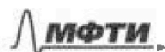
Ответ: (5; 3)



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1)  $DE$  — ср. линия  $\triangle ABC$ , т.е.  $DE \parallel BC$  и  $\angle EGF = \angle GCB = \angle GCA \Rightarrow \triangle GEC$  равноб.  $\Rightarrow AC = 2GE = 2DE + 2DG = BC + 2DG$

2) т.к.  $\angle GFD = \angle BFC$  и  $\angle DGF = \angle FCB$   $\triangle GDF \sim \triangle BCF$ , т.о.  $S_{\triangle BCF} = 25 S_{\triangle GDF}$   $\Rightarrow \frac{GD}{BC} = \sqrt{\frac{S_{\triangle GDF}}{S_{\triangle BCF}}} = \frac{1}{5}$ , тогда  $GD = \frac{BC}{5} = 2$  (т.к.  $BC = 10$ )

тогда  $AC = BC + 2DG = 10 + 2 \cdot 2 = 14$

3)  $DA = DB = \frac{AB}{2}$ , центры масс  $D$  и  $O$  шара  $\Omega$ :  $\frac{5d^2}{2} = \frac{AB^2}{4} \Rightarrow AB = 2\sqrt{10}$

4) 3 теоремы косинусов:  $10d^2 = 25d^2 + 49d^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7d^2 \cos \angle C$

$$49d^2 = 10d^2 + 25d^2 - 2 \cdot 5d \cdot 2\sqrt{10} \cos \angle B \quad \left| \begin{array}{l} 10 = 49 - 40 \cos \angle C \Rightarrow \cos \angle C = \frac{64}{40} = \frac{32}{25} \\ 49 = 55 - 10\sqrt{10} \cos \angle B \end{array} \right.$$

$$49 = 55 - 10\sqrt{10} \cos \angle B$$

$$\cos \angle B = -\frac{14}{10\sqrt{10}} = -\frac{7}{5\sqrt{10}}$$

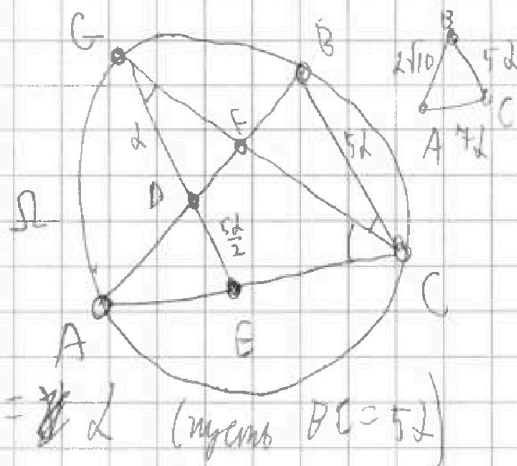
$$25d^2 = d^2 \cdot 10 + 49d^2 - 2 \cdot 7d \cdot 2\sqrt{10} \cos \angle A$$

$$25 = 59 - 14\sqrt{10} \cos \angle A \Rightarrow \cos \angle A = \frac{34}{14\sqrt{10}} = \frac{17}{7\sqrt{10}}$$

Ответ:  $\angle A = \arccos\left(\frac{17}{7\sqrt{10}}\right)$

$$\angle B = \arccos\left(-\frac{7}{5\sqrt{10}}\right)$$

$$\angle C = \arccos\left(\frac{32}{25}\right)$$



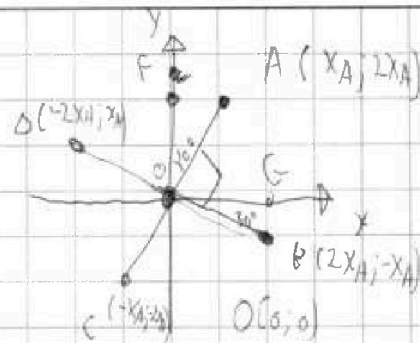
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



формула ABCD  
нужно точки A и C, знаем на гипотенузу,  
знаем на катете  $y = 2x$ , B известно  
 $A(x_A; 2x_A)$ , н.к.  $(0; 0)$  - центр квадрата

$C(-x_A; -2x_A)$ , пусть  $F(0; 2x_A)$ , тогда

$$\angle FOA = 30^\circ \quad (FA = \frac{OF}{2}) \quad \text{и} \quad \angle AOB = 90^\circ \Rightarrow \angle BOG = 30^\circ$$

где  $B(x_B; y_B)$  а  $G(x_B; 0)$  тогда  $BG = \frac{OG}{2}$ , но  $OA = OB$

$$\Rightarrow x_B = 2x_A; y_B = -x_A, \text{ н.к. } O \text{ - центр квадрата } D = (-x_B; -y_B) = (-2x_A; x_A)$$

$$A, B, C, D \in y = -x + a \Rightarrow \begin{cases} 2x_A = -x_A + a \\ -x_A = -2x_A + a \\ -2x_A = x_A - a \\ x_A = 3x_A - 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = a - 2 \\ 32x_A^4 = 2a + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A = \sqrt[4]{a-2} \\ 32a - 64 = 2a + 1 \\ 30a = 65 \\ a = \frac{65}{30} = \frac{13}{6} \end{cases}$$

$$x_A = \frac{1}{\sqrt[4]{6}}$$

$$OA = \sqrt{x_A^2 + 4x_A^2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{6}}$$

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = OA \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{6}} = \sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$$

Ответ:  $a = \frac{13}{6}$ ,

сторона квадрата  $\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



мысленно  $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ , если  $a=b$ , то  $a + \frac{4}{a} = a + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a} \Rightarrow a=c$ ,  
 что противоречит условию. Аналогично, если  $b=c$ , то  $a + \frac{4}{a} = b + \frac{4}{b} = c + \frac{4}{b} \Rightarrow a=b$ ,  
 что противоречит условию. Аналогично, если  $a=c$ , то  $a + \frac{4}{a} = b + \frac{4}{b} = c + \frac{4}{c} \Rightarrow a=b$ ,  
 что противоречит условию. Итого,  $a \neq b \neq c \neq a$ .

пусть  $abc = k \neq 0$ , тогда  $c = \frac{k}{ab}$ , подставим в формулу.

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4ab}{k} = \frac{k}{ab} + \frac{4}{a} \Rightarrow a + \frac{4}{b} = \frac{k}{ab} + \frac{4}{a} \Rightarrow a^2 b + 4a = k + 4b$$

$$\Downarrow \Rightarrow (a^2 b) = \frac{k-4a}{a} \quad (*) \quad \text{и} \quad a^2 = \frac{k+4b-4a}{b} = 1 + \frac{k-4a}{b} \quad (**)$$

$$b + \frac{4ab}{k} = \frac{k}{ab} + \frac{4}{a} \Rightarrow ab^2 + \frac{4a^2 b^2}{k} = k + 4b \Rightarrow b^2 \left( a + \frac{4a^2}{k} \right) = k + 4b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (по формуле *) \quad b^2 \left( a + \frac{4a^2}{k} \right) = b^2 (ak + 4a^2) = k^2 + 4bk \Rightarrow (по формуле **)$$

$$\Rightarrow b^2 \left( ak + 4a + \frac{4k-4a}{b} \right) = k^2 + 4bk \Rightarrow b^2 (ak + 4a) + b(4k - 4a) = k^2 + 4bk$$

$$\Rightarrow b^2 (ak + 4a) = k^2 + 4ab \Rightarrow (a^2 - 4)^2 b^2 (ak + 4a) = k^2 (a^2 - 4)^2 + (a^2 - 4)^2 4ab$$

$$\Rightarrow (по формуле **) \quad (k-4a)^2 (ak + 4a) = k^2 (a^2 - 4)^2 + (a^2 - 4)^2 4ab$$

$$(k^2 + 4ga^2 - 14ak)(ak + 4a) = k^2(a^4 + 4a^2 - 14a^2) + 4ga(a^2 k - 4k - 4a^3 + 4ga)$$

$$ak^3 + 4ga^2 k - 14a^2 k^2 + 4ga^2 k^2 + 4ga^2 a^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4ga k = a^4 k^2 + 4ga^2 k^2 - 14a^2 k^2 + 4ga^2 k - 4ga^3 - 4ga^2$$

$$+ 4ga^2 a^2 \Rightarrow ak^3 - 14a^2 k^2 + 4ga^2 k^2 = a^4 k^2 + 4ga^2 k^2 - 14a^2 k^2 + 4ga^2 k - 4ga^3 - 4ga^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3(k^2 - 4ga^2) = k(k^2 - 4ga^2), \text{ т.е. либо } k^2 = 4ga^2, \text{ либо}$$

$$a^3 = k, \text{ но если так, то по } (*) \quad (a^2 - 4)b = k - 4a = a(a^2 - 4), \text{ т.е.}$$

$$\text{либо } a=b \text{ (что неверно), либо } a^2 = 4, \text{ тогда } k^2 = a^6 = 4^3 = 64.$$

пусть  $k = \sqrt[3]{4^3}$ , тогда  $a = \sqrt[3]{4}, b = -\sqrt[3]{4}, c = -2\sqrt[3]{4}$

$$k = abc = \sqrt[3]{4} \cdot \left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right) \cdot (-2\sqrt[3]{4}) = \sqrt[3]{4^3}, \text{ а исходное равенство имеет вид:}$$

$$\sqrt[3]{4} + \frac{4}{-\sqrt[3]{4}} = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2} + \frac{4}{-\sqrt[3]{4}} = -2\sqrt[3]{4} + \frac{4}{-\sqrt[3]{4}} = -\sqrt[3]{4}.$$

Ответ:  $\sqrt[3]{4^3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $XF=XA+AF=FC+CY=FY$ ,  $\angle FXY = \angle XYF$ ; следовательно  
декартовы координаты,  $F(0;0)$ ,  $Y(x_2;0)$   
 $X(x_1; y_1)$ , пусть  $FC = \lambda$ , тогда  $C(\frac{x_2 \lambda}{\lambda+1}; 0)$   
 $A(\frac{x_1}{\lambda+1}; \frac{y_1}{\lambda+1})$ ,  $XY = 36$ :  
 $FB = 19$ ;  $x_3^2 + y_3^2 = 19^2$ , т.к.  $\triangle ABC$  - равност.  
 $(x_3 - \frac{x_1}{\lambda+1})^2 + (\frac{y_1}{\lambda+1})^2 = (x_3 - \frac{x_2 \lambda}{\lambda+1})^2 + y_3^2$   
по формуле Герона  
 $S = \frac{y_3 x_2 + y_1 x_3 - x_1 y_3}{2}$

B	$x_3$	$y_3$
Y	$x_2$	0
F	0	0
X	$x_1$	$y_1$
A	$x_3$	$y_3$



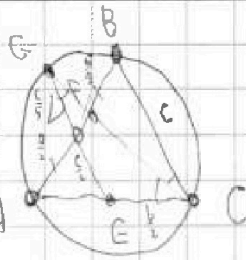
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

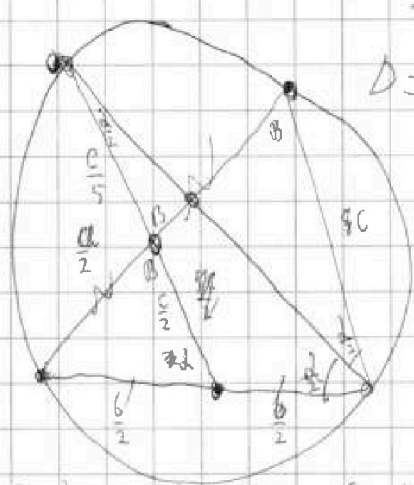
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



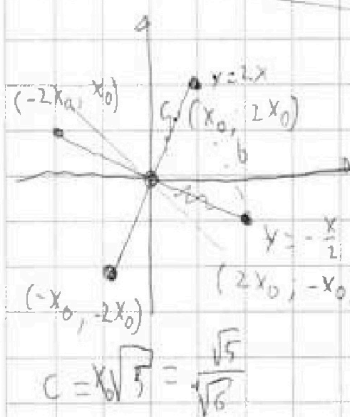
$S_{\triangle BCF} = 25$   $S_{\triangle DGF}$   
 $\angle A = \angle B = \angle C = ?$



$4y^2 - 4y + 56$   
 $D = 16$

$\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{c}{5} \cdot \frac{c}{5}$   
 $a = c \sqrt{\frac{2}{5}}$   $b = c + \frac{2c}{5} = \frac{7c}{5}$

$10 = 25 + 49 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos \alpha = 74 - 70 \cos \alpha$   $\cos \alpha = \frac{64}{70} = \frac{32}{35}$   
 $49 = 25 + 10 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{10} \cdot \cos \beta = 35 - 10\sqrt{10} \cos \beta$   $\cos \beta = -\frac{14}{10\sqrt{10}} = -\frac{7}{5\sqrt{10}}$   
 $25 = 10 + 49 - 2 \cdot \sqrt{10} \cdot 7 \cdot \cos \gamma = 59 - 14\sqrt{10} \cos \gamma$   $\cos \gamma = \frac{34}{14\sqrt{10}} = \frac{17}{7\sqrt{10}}$



$2x_0 = -x_0^5 + ax_0$   
 $-x_0 = -32x_0^5 + 2ax_0$   
 $2x_0 = 1x_0^5 - ax_0$   
 $x_0 = 32x_0^5 - 2ax_0$   
 $x_0^4 = a - 2$   $2a + 1 = 32a - 64$   $30a = 65$   $a = \frac{65}{10} = \frac{13}{2} = 2\frac{1}{2}$   
 $2x_0^4 = 2a + 1$   $x_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$   $b = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \sqrt{2}$   
 Ответ:  $2\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a}$   $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$   $a \neq b \neq c$   $a \neq b \neq c$   
 $a^2bc + 4ac = ab^2c + 4ab = abc^2 + 4bc$   
 $abc + 4c = b^2c + 4b = bc^2 + \frac{4bc}{a}$   $a = \frac{4}{b + \frac{4}{c} - \frac{4}{a}}$   
 $abc + 4a = a^2c^2 + 4c = a^2c + \frac{4ac}{b}$   $a = \frac{4}{b + \frac{4}{c} - \frac{4}{a}}$   
 $abc + 4b = a^2b + 4a = ab^2 + \frac{4ab}{c}$   $a = \frac{4}{b + \frac{4}{c} - \frac{4}{a}}$   
 $3abc + 4(a+b+c) = a^2b + ac^2 + b^2c + 4(a+b+c) = ab^2 + a^2c + bc^2 + 4(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c})$   
 $a^2b + ac^2 + b^2c = ab(a + \frac{4}{b}) + ac(c + \frac{4}{a}) = ab(b + \frac{4}{a}) + ac(a + \frac{4}{c}) + bc(c + \frac{4}{b})$   
 $abc = \frac{a^2b + ac^2 + b^2c}{3} + bc(b + \frac{4}{c}) = (a + \frac{4}{b})(ab + ac + bc)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 + x^2 - 8|$  Область:  $x \in (-\infty, -1] \cup [1, 19]$   
 ~~$x \geq 1$~~   $|x| \geq \sqrt[3]{9}$   $x^3 - x^2 - 8 \geq 0$  (I)  $a + \frac{4}{5} = b + \frac{4}{7} = c + \frac{4}{a}$   
 $x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq x^3 + x^2 - 8$   $a = \sqrt[3]{b + \frac{4}{c} - \frac{4}{b}}$   
 $2x^2 \leq 2$   $x \in (-1, 1]$  или  $x \in (-\infty, -\sqrt[3]{9}]$   $b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{b + \frac{4}{c} - \frac{4}{b}}$   
 $2) |x| \geq \sqrt[3]{9}$   $x^3 - x^2 - 8 \leq 0$   $x = \sqrt[3]{9}$   $1 - \sqrt[3]{81} > 0$   $x = \frac{24}{6}$   $6 + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{6 + \frac{4}{c} - \frac{4}{6}}$   
 $x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8$   $1 < \sqrt[3]{81}$   $24$   $6$   
 $2x^3 \leq 18$   $x \leq \sqrt[3]{9}$   $1156$   $1212$   $1156$   $bc + 4 = c^2 + \frac{c^2}{bc + 4 - \frac{4c}{b}}$   
 $3) |x| < \sqrt[3]{9}$   $|x| \geq 1$   $x^3 - x^2 - 8 \geq 0$   $404$   $384$   $788$   $14706$   $5.6$   
 $-x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 - 8$   $34$   $22$   $58$   $68$   $bc + 4 = c^2 + \frac{c^2}{bc + 4 - \frac{4c}{b}}$   
 $x^3 + 9 + 16 + 2x^2 \leq 2x^3$   $136$   $x^3 - x^2 - 8 \geq 0$   $x \in (-\sqrt[3]{9}, -1] \cup [1, \sqrt[3]{9}]$   
 $4) |x| < \sqrt[3]{9}$   $|x| \geq 1$   $x^3 - x^2 - 8 \leq 0$   $488$   $784$   $5.6$   
 $-x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8$   $8 \leq 8$  (II)  $\frac{6^3}{4} + 6c + c^2 + 6c + 4 = \frac{4c}{6}$   
 $5) |x| < \sqrt[3]{9}$   $|x| < 1$   $x^3 - x^2 - 8 \geq 0$   $a, b, c$   $abc = 5$   $abc = 5$   $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$   $p_i \neq 5, p_i \neq 7 \Rightarrow abc = p_1 \cdot 5 \cdot 7$   
 $-x^3 + 9 - x^2 + 1 \leq x^3 - x^2 - 8$   $18 \leq 2x^3$   $9 \leq x^3$   $|x| \geq \sqrt[3]{9}$   $abc = a(aq) = a^2 q^2 = 5^{360} \cdot 7^{90}$   $aa = 5^{120} \cdot 7^{30} = 5^{2+8} \cdot 7$   
 $6) |x| < \sqrt[3]{9}$   $|x| < 1$   $x^3 - x^2 - 8 \leq 0$   $a, b = \text{комплексные (или 0)}$   $\text{комплексные (или 0)}$   $d, \psi = \text{члены В}$   $2x = 240 - 2d$   $2\psi = 60 - 2d$   
 $-x^3 + 9 - x^2 + 1 \leq -x^3 + x^2 + 8$   $2 \leq 2x^2$   $|x| \geq 1$   $d + 2x \geq 0$   $2x + \psi \geq 0$   $2 + x = 120$   $2\psi + \psi \geq 30$   
 $7) |x| \geq 1$   $11y - 3y + \sqrt{-7y^2 + 40y - 56}$   $2(y-3)$   $2 + \frac{6-2\sqrt{2}}{7} = \frac{20-2\sqrt{2}}{7} - \frac{40-2\sqrt{2}}{14} \leq \frac{40+2\sqrt{2}}{14} = \frac{20+\sqrt{2}}{7} = 2 + \frac{6+\sqrt{2}}{7} = 3 + \frac{2\sqrt{2}+1}{4} < 4$   
 $x^2(y-3) - x(11y-3y) + 32y - 101 = 0$   $241 \cdot 51 = \text{комбинаторика}$   
 $D = (11y-3y)^2 - 4(x-3)(32y-101) = 0$   $11y - 3y \pm \sqrt{-7y^2 + 40y - 56}$   
 $= 12y^2 - 448y + 1156 - 4(32y^2 - 101y - 96y + 303) = 0$   
 $= 12y^2 - 448y + 1156 - 128y^2 + 101y + 96y + 303 = 0$   
 $= -116y^2 + 207y + 1459 = 0$   
 $y = \frac{207 \pm \sqrt{207^2 - 4 \cdot (-116) \cdot 1459}}{2 \cdot (-116)}$   
 $y = 3 + \text{линейное}$   
 $-116y^2 + 207y + 1459 = 0$   $3 \cdot 56 = 120 - 56 - 63 = 120 - 119 = 1$  Область:  $(5; 3)$   
 $x = \frac{32 \cdot 3 - 101}{11 - 34} = \frac{96 - 101}{-23} = \frac{-5}{-23} = \frac{5}{23}$  (III)



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

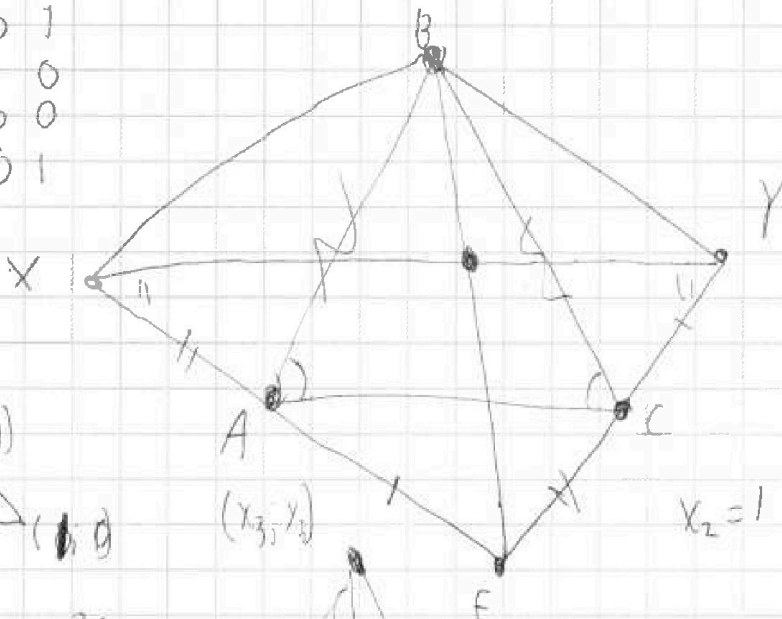
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



0 1  
1 0  
0 0  
0 1



$X_3, Y_3$   
 $X_2, 0$   
 $0, 0$   
 $X_1, Y_1$   
 $X_3, Y_3$

$(0; 1)$



$(X_3, Y_3)$

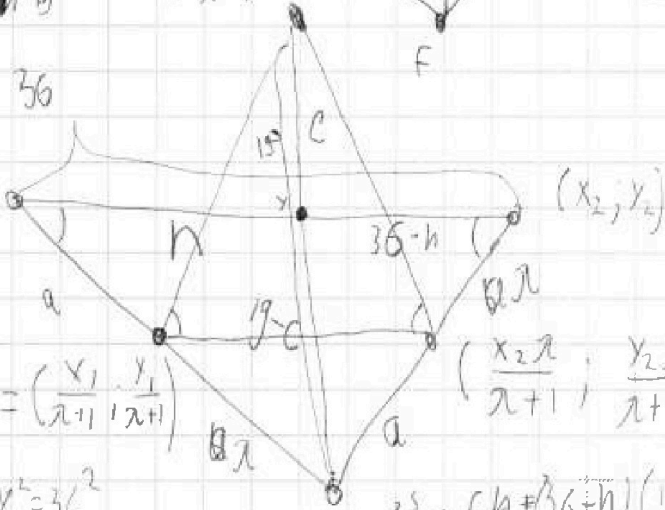
$X_2 = 1 \quad Y_2 = 0$

$X_3^2 + Y_3^2 = 19^2$   
 $(X_2 - X_3)^2 + Y_3^2 = 36^2$

~~$X_3$~~

36

$(X_1, Y_1)$



$(X_2, Y_2)$

$\left(\frac{x_1}{\lambda+1}, \frac{y_1}{\lambda+1}\right) = \left(\frac{x_1 - y_1}{\lambda+1}, \frac{y_1}{\lambda+1}\right)$

$\left(\frac{x_2 \lambda}{\lambda+1}, \frac{y_2 \lambda}{\lambda+1}\right) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}, 0\right)$

$(x_1 - 1)^2 + y_1^2 = 36^2$

$\frac{2S}{\sin \alpha} = CA + (36+h)(19-c) - C(36-h) - n(19-c) =$

$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 36^2$

$= 36h + 36 \cdot 19 - 36 \cdot c - 19 \cdot h + 19c - 36c + hc - 19h + 19c =$   
 $= 4hc$

$X_3^2 + Y_3^2 = 19^2$

$\frac{X_1 Y_3 - Y_3 X_2 - Y_1 X_3}{2}$

~~$X_3$~~

$\left(X_3 - \frac{X_1}{\lambda+1}\right)^2 + \left(Y_3 - \frac{Y_1}{\lambda+1}\right)^2 = \left(X_3 - \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^2 + Y_3^2$

$(X_3 \lambda + X_3 - X_1)^2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МОФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a}$$

$$abc = k$$

$$c = \frac{k}{ab}$$

$$1) k^2 = 49$$

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4ab}{k} = \frac{k}{ab} + \frac{4}{a}$$

$$k(k^2 - 4 \cdot 49) = a^3(k^2 - 4 \cdot 49)$$

$$a^3 = k$$

$$1) a + \frac{4}{b} = \frac{k}{ab} + \frac{4}{a}$$

$$a^2b + 4a = k + 4b$$

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4b}{a^2} = \frac{a^2}{b} + \frac{4}{a}$$

$$b = \frac{k - 4a}{a^2 - 4}$$

$$a^2 = \frac{k + 4b - 4a}{b} = 4 + \frac{k - 4a}{b}$$

$$2) a^2 = 4$$

$$k = (\sqrt{4})^3 = \sqrt{4}^3$$

$$ab + 4 = b^2 + \frac{4b^2}{a^2} = a^2 + \frac{4}{a}$$

$$2) a b + \frac{4ab}{k} = \frac{k}{ab} + \frac{4}{a} \Rightarrow (a^2 - 4) \frac{1}{a} b = b \left( a - \frac{4}{a} \right) = a^2 - 4$$

$$ab^2 + \frac{4ab^2}{k} = k + 4b$$

$$a = b$$

$$a = b = c$$

$$b^2 \left( 1 + \frac{4}{a^2} \right) = 4 + ab$$

$$ab^2k + 4a^2b^2 = k^2 + 4bk$$

$$b^2(ak + 4a^2) = k^2 + 4bk$$

$$b^2(ak + 4a^2) = k^2 + 4bk$$

$$b^2(ak + 4a^2) + \frac{4}{k} = k^2 + \frac{4}{k} + 49ab$$

$$b^2(ak + 4a^2) = k^2 + 49ab$$

$$b^2(ak + 4a^2)(a^2 - 4)^2 = k^2(a^2 - 4)^2 + 49ab(a^2 - 4)^2$$

$$(k - 4a)^2(ak + 4a^2) = k^2(a^2 - 4a^2 + 49) + 49a(k - 4a)(a^2 - 4)$$

$$(k^2 - 14ak + 49a^2)(ak + 4a^2) = a^4k^2 - 14a^2k^2 + 49k^2 + 49a(a^2k - 4k - 4a^3 + 49a)$$

$$ak^3 - 14a^2k^2 + 49a^3k + 49k^2 - 14 \cdot 49ak + 49a^2 = a^4k^2 - 14a^2k^2 + 49k^2 + 49a^3k - 49 \cdot 4ak - 4 \cdot 49a^3 + 49a^2$$

$$ak^3 = a^4k^2 - 4 \cdot 49a^3 + 4 \cdot 49ak \Rightarrow k^3 = a^3k^2 - 4 \cdot 49a^3 + 4 \cdot 49k$$

$$c = -2\sqrt{4} \quad a = \sqrt{4}$$

$$a + \frac{4}{b} = 2b + \frac{4}{b} = \frac{4}{b} + \frac{4}{a}$$

$$2b^2 = \sqrt{4}b + 4$$

$$2b^2 - \sqrt{4}b - 4 = 0$$

$$b = \frac{\sqrt{4} \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2} = \frac{\sqrt{4} \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{\sqrt{4} \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = 4$$

$$2b^2 = ab + 4$$

$$2b^2 - ab - 4 = 0$$

$$\Delta = a^2 + 4 \cdot 2 \cdot 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

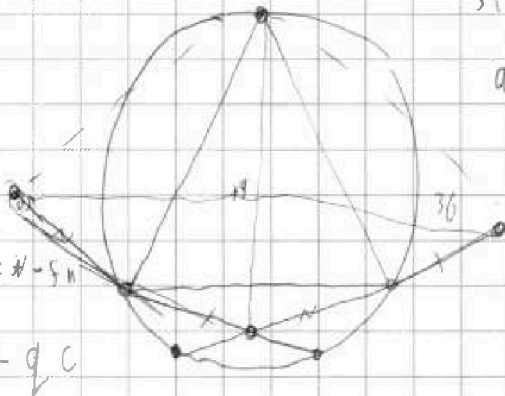


$$19-C$$

$$-19h + C h = h - 5h$$

$$36-h$$

$$-36C + C h = -qC$$

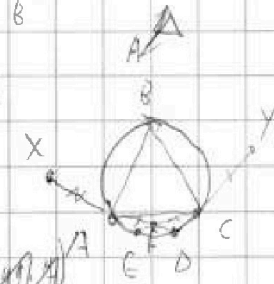


$$S(BXFY) = S$$

$$a^3(k^2 - 49 \cdot 4) = k^3 - 7 \cdot 49k$$

$$a^3 = k$$

$$a^3 b^3 c^3 =$$



$$k^3 = a^3 k^2 - 49 \cdot 7a^3 + 7 \cdot 49k$$

$$2S = \sin(x) C h + \sin(x) (19-C)(36-h) - 19(36-h) \sin x - (19-C) h \sin x$$

$$= \sin(x) [C h + (19-C)(36-h) - 19(36-h) - (19-C)h] =$$

$$= \sin(x) [C h + 19 \cdot 36 - 19h + C h - 36C - 19 \cdot 36 + 19h - 19h + C h - 19h] =$$

$$= \sin(x) [3C h - 19h - 36C] = \sin(x) [C h - 19h - 36C]$$

$$\Rightarrow S = \boxed{2} + \boxed{1} + \boxed{3}$$

$$b + \frac{4ab}{k} = \frac{k}{ab} + \frac{4}{a}$$

$$a k + \frac{4}{6} k = 6k + 4ab$$

$$a^3 b + 4a^3 = k a^3 + 4ab$$

$$a b^2 k + 4 a^2 b^2 = k^2 + 4 b k$$

$$b^2 (k a + 4 a^2) = k^2 + 4 b k$$

$$b^2 \left( k a + \frac{4k - 19a}{6} + 19 \right) = k^2 + 4 b k$$

$$a^2 = \frac{k - 4a + 4}{6}$$

$$\frac{k}{6} - b + \frac{4b}{a}$$

$$a k + \frac{4}{6} k = b + 4ab$$

$$k + k(4b - 1) = 6b + 24ab \Rightarrow a^3 b + 4a^3 = k a + 4ab$$

$$b^2 (k a + 4 a^2) = k^2 + 4 b k \Rightarrow \frac{4}{6} k = b + 4ab - a^3 - 4a^2 b$$

$$(k - 4a^2)^2 (k a + 4 a^2) = k^2 (a^3 - 4) + 4 a a^2 (a^3 - 4) (k - 4a)$$

$$(k^2 + 49a^2 - 14ak)(ka + 4a) = k^2(a^3 + 49 - 14a^2) + 49a(a^3 - 4)(k - 4a)$$

$$k^3 a - 14 \cdot 49 a k = a^4 k^2 - 49 \cdot 7 a^4 - 49 \cdot 3 a k$$

$$k^3 a = a^4 k^2 - 49 \cdot 7 a^4 + 4 \cdot 49 a k$$

$$k = \frac{b^2 + 14ab^2 - a^3 b^2 - 4a^2 b}{7}$$

$$a =$$

$$k = \frac{b^2 + 14b^2 - b^2 - 4b}{7}$$

$$= \frac{4b^2 - 4b}{7} = \frac{4}{7} b^2 - \frac{4}{7} b$$