МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12

1. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|x^3-9\right|+\left|x^2-1\right| \leqslant \left|x^3-x^2-8\right|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360}\cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y-3)-x(11y-34)+32y-101=0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC. Прямые ED и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF.

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y=-x^5+ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y=2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом

$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC$) вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX=CF$ и $CY=AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF=19$, $XY=36$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. Вариант 12

$|x^3-9|+|x^2-1|\leq|x^3-x^2-8|$

предположим, что $x^3-9\geq 0$, тогда $x\geq\sqrt[3]{9}$, так как $\sqrt[3]{9}>1$, то $x^2-1\geq 0$

то есть при $x^3-9\geq 0$, $x^2-1\geq 0$. ~~Сравним x^3-x^2-8 с 0~~

если $x^3-x^2-8<0$, то $x^3+x^2-10\leq -x^3+x^2+8 \Rightarrow 2x^3\leq 18$ $x\leq\sqrt[3]{9}$, но

$x\geq\sqrt[3]{9}$, т.е $x=\sqrt[3]{9}$, проверим, что при $x=\sqrt[3]{9}$ $x^3-x^2-8<0$, $x^3=9$, т.е

$x^3-x^2-8=1-x^2$, но при $x=\sqrt[3]{9}$ $x^2-1>0$, а значит $1-x^2<0$ и

$x^3-x^2-8<0$ при $x=\sqrt[3]{9}$. Если же при каких-то значениях $x>\sqrt[3]{9}$

$x^3-x^2-8\geq 0$, то утверждение $x^3-9+x^2-1\leq x^3-x^2-8$ явно неверно,

так как $x^3-x^2-8=(x^3-9)-(x^2-1)$, а значит при $x^2-1\geq 0$ $x^3-x^2-8<x^3-9$,

а значит $|x^3-9|+|x^2-1|>|x^3-x^2-8|$ при $x^3-x^2-8\geq 0$

теперь рассмотрим случай, когда $x^3-9<0$, тогда $x<\sqrt[3]{9}$ и возможны

2 варианта: $x^2-1\geq 0$ и $x^2-1<0$, рассмотрим 1 случай: $x^2-1\geq 0$

Посмотрим на x^3-x^2-8: $x^3-x^2-8=(x^3-9)-(x^2-1)$, где $x^3-9<0$ и

$-(x^2-1)\leq 0$ (т.к $x^2-1\geq 0$) $\Rightarrow x^3-x^2-8<0$, раскроем модули:

$9-x^3+x^2-1\leq -x^3+x^2+8$, мы получаем $0\leq 0$, что верно всегда,

когда $x^3-9<0$, а $x^2-1\geq 0$, что верно при $\begin{cases} x<\sqrt[3]{9} \\ |x|\geq 1\end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;-1]\cup$

$[1;\sqrt[3]{9})$. Рассмотрим случай 2: $x^2-1<0$, что возможно только

при $x\in(-1;1)$. Посмотрим на $x^3-x^2-8=x^2(x-1)-8$, т.е при $x-1<0$

$x^3-x^2-8<0$ то есть при $x\in(-1;1)$ $x^3-x^2-8<0$.

Получаем $9-x^3+1-x^2\leq -x^3+x^2+8 \Rightarrow 10-x^2\leq x^2+8 \Rightarrow 2x^2\geq 2$

$x^2\geq 1$, но $x\in(-1;1)$, а значит на промежутке $(-1;1)$ решений нет.

Ответ: $x\in(-\infty;-1]\cup[1;\sqrt[3]{9}]$.

2. вариант 12

Так как $a; b; c$ образуют геометрическую прогрессию, то $b^2 = ac$

значит $b^3 = abc = 5^{360} \cdot 7^{90} \Rightarrow b = 5^{120} \cdot 7^{30}$ и $ac = 5^{240} \cdot 7^{60}$.

Очевидно, что разным a будет соответствовать разные c и

задача сводится к подсчёту натуральных a таких, что $\frac{5^{240} \cdot 7^{60}}{a} \in N$

у 5 может быть одна из 241 степени, а у 7 одна из 61 степени, т.е

количество вариантов, когда $5^{240} \cdot 7^{60} \vdots a$ равно $241 \cdot 61 = 14701$.

При таком подсчёте мы считаем тройки a, b, c и c, b, a за

разные тройки, если же считать это за одинаковые тройки,

то ответ будет 7351

Ответ: 7351 не учитывая порядок и 14701 учитывая порядок

чисел a, b, c.

МФТИ

3. вариант 12

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{11y-34 \pm \sqrt{121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 404y + 384y - 1212}}{2y-6} =$$

$$= \frac{11y-34 \pm \sqrt{-7y^2+40y-56}}{2y-6}, \text{ откуда } -7y^2+40y-56 \geqslant 0 \text{ и } y \neq 3$$

$$7y^2 - 40y + 56 \leqslant 0$$

$$y_{1;2} = \frac{40 \pm \sqrt{1600-1568}}{14} = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$

$y \in \left[\frac{20-2\sqrt{2}}{7}; \frac{20+2\sqrt{2}}{7}\right]$, но $y \in \mathbb{Z}$, $\frac{20-2\sqrt{2}}{7} > 2$, т.к. $20-2\sqrt{2} > 17$

$\frac{20+2\sqrt{2}}{7} < 4$, т.к. $20+2\sqrt{2} < 23$, то есть $2 < y < 4$, т.е $y = 3$, но

$y \neq 3$ решений нет.

Но при $y = 3$ уравнение имеет вид $-x(11y-34) + 32y - 101 = 0$

где $x = \frac{32y-101}{11y-34}$, и при $y = 3$ $x = \frac{96-101}{33-34} = \frac{-5}{-1} = 5$

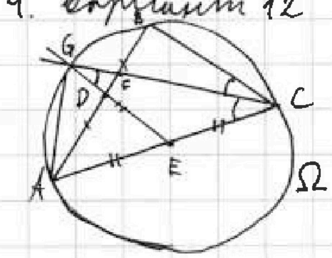
Ответ: $(5; 3)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. вариант 12



Дано: $AD=DB$, $AE=EC$ CF - биссектриса
$ED \cap CF = G$ $G \in \Omega$

$S_{DGF} = \frac{1}{25} S_{BCF}$

Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$

Решение: DE - средняя линия $\triangle ABC \Rightarrow DE \parallel BC$. $\angle DGF = \angle FCB$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых BC и DE секущей CG, также $\angle GFD = \angle BFC$ как ~~накр~~ вертикальные.

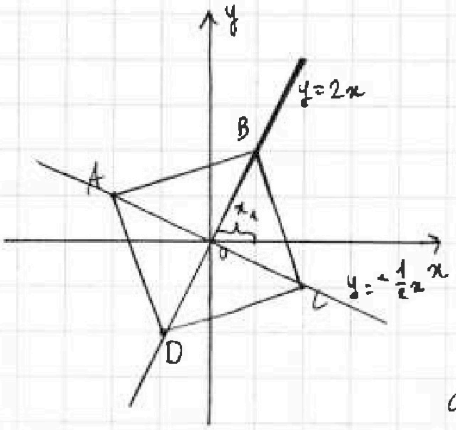
Значит, $\triangle DGF \sim \triangle BCF$ по I признаку, значит $\frac{S_{BCF}}{S_{DGF}} = k^2$, где k - коэфф. подобия $\frac{S_{BCF}}{S_{DGF}} = 25 = 5^2 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow \frac{FC}{GF} = 5$ и $\frac{BF}{DF} = 5$, т.к. $AD = BD$, а $BD = BF + DF$, то $\frac{BF}{AF} = \frac{5}{7}$. Так как $\angle DGF = \angle FCB$, а $\angle FCB = \angle FCA$, то $\angle DGF = \angle FCA \Rightarrow \triangle CEG$ - равнобедренный и $GE = EC$, а $EC = EA$. В треугольнике $\triangle AGC$ медиана $GE = \frac{1}{2}$ стороны AC, к которой проведена, а значит $\angle AGC = 90°$, но $\angle AGC$ и $\angle B$ опираются на одну и ту же дугу, значит $\angle B = 90°$. Так как CF - биссектриса, то

$\frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{7}$, откуда $\sin\angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{7} = \cos\angle C$, откуда

$\angle A = \arcsin\frac{5}{7}$, а $\angle C = \arccos\frac{5}{7}$

Ответ: $\angle A = \arcsin\frac{5}{7}$, $\angle B = 90°$, $\angle C = \arccos\frac{5}{7}$

5. вариант 12



Центр - точка O; A, B, C, D - вершины квадрата

x_1 - абсцисса точки B ($-x_1$ - ордината точки C)

$x_1 > 0$

Проведём вторую диагональ квадрата, она перпендикулярна первой и её функция $y = -\frac{1}{2}x$

ордината точки C $= -x_1$ в силу того, что при повороте на 90° квадрат переходит в такой же квадрат. Рассмотрим точки B и C, в них пересекаются по 2 функции, так что

$2x_1 = -x_1^5 + ax_1$ (в точке B $y = y$) и $-x_1 = -32x_1^5 + 2ax_1$ (в точке C)

$-x_1^5 + x_1(a-2) = 0 \Rightarrow -x_1^4 + (a-2) = 0$ (т.к. $x_1 > 0$ можем сократить)

$a - 2 = x_1^4 \Rightarrow a = x_1^4 + 2$ (1)

$-x_1 = -32x_1^5 + 2ax_1 \Rightarrow -32x_1^5 + x_1(2a+1) = 0$ $\quad 2a + 1 = 32x_1^4$

$a = \frac{32x_1^4 - 1}{2}$ (2)

из (1) и (2) получаем $2x_1^4 + 4 = 32x_1^4 - 1 \Rightarrow 30x_1^4 = 5$ $\quad x_1^4 = \frac{1}{6}$

$a = \frac{1}{6} + 2 = 2\frac{1}{6}$ $\quad x_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$

$OB = OC$ и $BC = \sqrt{2} \cdot OB$, где $OB = \sqrt{x_1^2 + 4x_1^2}$ ($y = 2x \Rightarrow y_1 = 2x_1$)

$OB = \sqrt{5x_1^2} \Rightarrow BC = \sqrt{10x_1^2} = \sqrt{10 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}} = \sqrt[4]{\frac{50}{3}}$

Ответ: $a = 2\frac{1}{6} = \frac{13}{6}$, а сторона квадрата $\sqrt[4]{\frac{50}{3}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

6. вариант 12

$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a} \quad \cdot abc$$

$$\frac{ab+7}{b}=\frac{bc+7}{c}=\frac{ac+7}{a}$$

$$a^2bc+7ac=ab^2c+7ab=abc^2+7bc$$

Заметим, что $a\neq b\neq c$, т.к. если например $a=b$, то $\frac{7}{b}=\frac{7}{c}$, а значит $b=c$, но тогда получается, что $a=b=c$, что противоречит условию.

$$\begin{cases} abc(a-b)=7a(b-c) \\ abc(a-c)=7c(b-a) \\ abc(b-c)=7b(c-a) \end{cases}$$

$$bc(a-b)=7(b-c) \Rightarrow a-b=\frac{7(b-c)}{bc}$$

$$abc(c-a)=\cancel{7c\cdot\frac{7(b-b)}{bc}}=7\cancel{c}\cdot\frac{7(b-c)}{b\cancel{c}}$$

$$c-a=\frac{49(b-c)}{ab^2c}$$

$$abc(b-c)=7b\cdot\frac{49(b-c)}{ab^2c}$$

$$abc=\frac{7^3}{abc}$$

$$abc=\pm\sqrt{7^3}=\pm\sqrt{343}$$

Ответ: $abc=\sqrt{343}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну задачу**.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1

$|x^3-9|+|x^2-1| \le |x^3-x^2-8|$

$x^3-x^2-8 \ge 1-x^2$ где $x^2>1$, т.к $x>1$
т.е. $x^3-x^2-8<0$

пусть $x^3-9 \ge 0$ и $x^2-1\ge 0$ если $x^3-9\ge 0$, то $x^2-1\ge 0$ тоже верно,

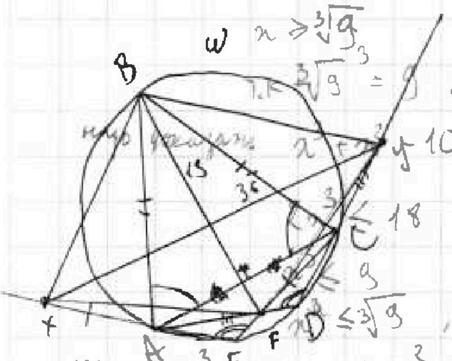
$x^3 \ge 9$ $\quad x^2 \ge 1$

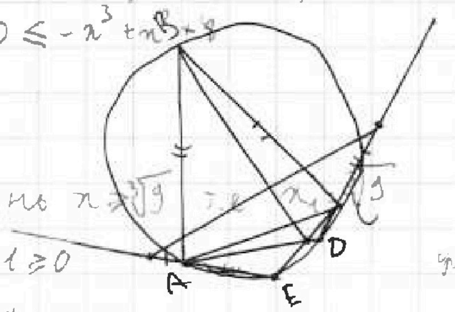
$x \ge \sqrt[3]{9}$ $\quad |x| \ge 1$

т.к. $\sqrt[3]{9}^3 = 9$ и $1^3<9$, то $\sqrt[3]{9}>1$, т.е $x \ge \sqrt[3]{9}$

$x^3 - 9 + x^2 - 1 \le ... 10 \le -x^3+x^3 - 8$

≤ 18, но $x \ge \sqrt[3]{9}$





2. $\times\frac{241}{61}$ 241 1446 14701

$\times\frac{241}{61}$ 241 1446 14701

пусть $x^3-9<0$, а $x^2-1\ge 0$

$x<\sqrt[3]{9}$ $\quad x\ge 1$ и $x\le -1$

значит $x\in(-\infty,-1]\cup[1,\sqrt[3]{9})$, посмотрим на x^3-x^2-8

сумма этих чисел мин, когда $a=b=c$

$9-x^3+x^2-1 \le -x^3+x^2+8$

$-x^3+x^2+8 \le -x^3+x^2+8$

при $x=1$ ~~$x^3-x^2-8<0$~~

$x^3-x^2-8 \ge 0$ $\quad x^3-x^2-8<0$

$x^3-x^2-8=0$

Ответ 1: при всех $x\in(-\infty,-1]\cup[1,\sqrt[3]{9}]$ это верно

$(x^3-9)-(x^2-1)$

$\wedge$ $\quad$ $\parallel$

$0 + 0 < 0$

пусть $x^3-9<0$ и $x^2-1<0$

$x<\sqrt[3]{9}$ $\quad x\in(-1;1)$

$ac=b^2$ $\quad x^3-x^2-8<0$

$x^3-9<-8$ т.к $x<1$, $x^3<1$

x^3-x^2-8 при $x=-1$ $=-10<0$

2. $a\cdot b\cdot c = 3^{300}\cdot 7^{30}$ a – любое число от 1 до $5^{30}\cdot 7^{30}$

$a\cdot b\cdot c = a^3\cdot q^3 = (aq)^3$

$a \quad aq \quad aq^2$

$x^3-9<-8$ $\quad x^2-1\ge -1$ $\quad x^3-x^2-8$ при $x=0$ $=-8$

$x^2-1\ge -1$

т.к $x^2\ge 0$ $x^2-1<0$ x^3-x^2-8 при $x=1$ $=-8$

$aq=5^{120}\cdot 7^{30}$

$b=5^{120}\cdot 7^{30}$

количество способов

$(x^3-9)-(x^2-1)<-9$ $\quad$ для каждого n, которого будет выбрать a, такое c, что $\frac{5^{240}\cdot 7^{60}}{a}\in N$

$\wedge$ $\quad -(x^2-1)\le -1$ $\quad$ т.е. x^3-x^2-8 при $x\in(-1;1)$ $x^3-x^2-8<0$

-8

$a=5^n\cdot 7^k$ для каждого n существует 61 k

т.е

$9-\cancel{x^3}-x^2+1 \le \cancel{-x^3}+x^2+8$ $\quad$ ни каждое n приходится

$10-x^2 \le x^2+8$ $\quad$ т.е. $S=241\cdot 61$

$2x^2\ge 2 \Rightarrow x^2\ge 1$, но $x^2<1$, т.е на промежутке $(-1;1)$ решений нет

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(1) $x^2(y-3)-x(11y-34)+32y-101=0$

$x_{1;2}=\dfrac{11y-34\pm\sqrt{121y^2-748y+1156-128y^2+404y+384y-1212}}{2y-6}=$

$=\dfrac{11y-34\pm\sqrt{-7y^2+40y-56}}{2y-6}$

$-7y^2+40y-56$

$x=\dfrac{32y-101}{11y-34}$

$-7y^2+40y-56\geq 0$

$y_{1;2}=\dfrac{-40\pm\sqrt{1600-1568}}{-14}$

$\dfrac{+40\pm\sqrt{32}}{+14}=\dfrac{20\pm 2\sqrt{2}}{7}$ $y\in\left[\dfrac{20-2\sqrt{2}}{7};\dfrac{20+2\sqrt{2}}{7}\right]$

$20-2\sqrt{2}<18$ $20+2\sqrt{2}<23$

$y\in\mathbb{Z}$, т.к. $\Rightarrow$ $\dfrac{18}{7}<3$ $\dfrac{23}{7}<4$

подставим $y=3$

$x^2(3-3)-x(33-34)+96-101=0$ $20-2\sqrt{2}>17$

$\dfrac{17}{7}>2$ $2<y<4$

$x-5=0$ Ответ $(5;3)$

$x=5$ $y=3$

$a+\dfrac{4}{a}=a+\dfrac{4}{b}=b+\dfrac{7}{c}$

$\dfrac{ac+4}{a}=\dfrac{ab+7}{b}=\dfrac{bc+7}{c}$ abc $a\neq b\neq c$

т.к. если $a=b$

$abc^2+7bc=a^2bc+7ac=ab^2c+7ab$ $a+\dfrac{4}{b}=b+\dfrac{7}{c}$

$\dfrac{4}{b}=\dfrac{7}{c}\Rightarrow b=c$ противоречие

$abc(c-a)$

$abc(c-a)=7c(a-b)$

$abc=\sqrt{7^3}$ $abc(c-a)=\dfrac{49(b-c)}{b}$

$abc(c-a)=7c(a-b)$

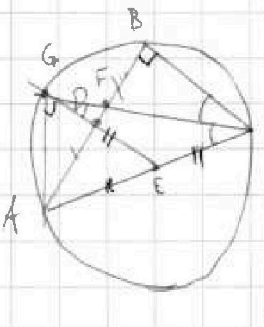
$abc(c-b)=7b(a-c)$

$abc(a-b)=7a(b-c)$

$bc(a-b)=7(b-c)$

$a-b=\dfrac{7(b-c)}{bc}$

(4)



k – коэффициент подобия $\triangle CBF$ и $\triangle DGF$

$k=5$

$\dfrac{FC}{GF}=5$ $\dfrac{BF}{DF}=5$ $\dfrac{BF}{AF}=\dfrac{5}{7}$

$6\sqrt{343}$

т.к. CF – биссектриса, то

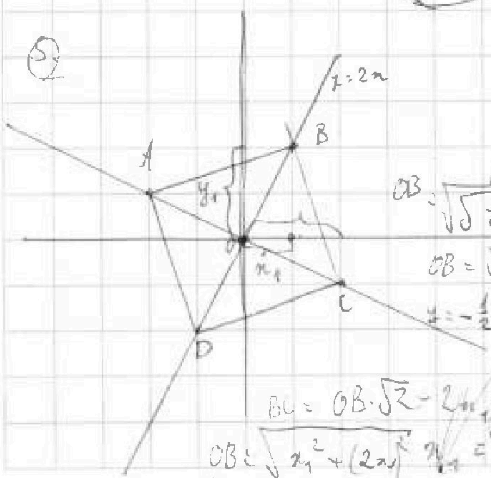
$a=\dfrac{1}{6}+2=2\dfrac{1}{6}$

$a=x_1^4+2$

$\angle A=\arcsin\left(\frac{5}{7}\right)$ $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{BF}{FA}=\dfrac{5}{7}$ $a=x_1^4+2$

$\angle C=\arccos\left(\frac{5}{7}\right)$ $a-2=x_1^4$

(5)



$y_1=2x_1$ и $y_1=-(x_1)^5+ax_1$

$OB=\sqrt{\sqrt{\frac{1}{6}}+\sqrt{\frac{16}{6}}}$

$2x_1=-x_1^5+ax_1$ $x_1^5+x_1(a-2)=0$

$OB=\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{6}}$

$-32x_1^5+x_1(2a+1)=0$

$y=-\frac{1}{2}x$ $\sqrt[4]{\frac{25}{6}}$ $-x_1=-32x_1^5+2ax_1$

$2a+1=32x_1^4$

$BC=OB\cdot\sqrt{2}$ $-2x_1=x_1^5-ax_1$

$32x_1^4-1=2x_1^4+4$ $a=\dfrac{32x_1^4-1}{2}$

$OB=\sqrt{x_1^2+(2x_1)^2}$ $x_1=32x_1^5-2ax_1$

$30x_1^4=5$

OB

$6x_1^4=1$ $x_1^4=\frac{1}{6}$ $x_1=\sqrt[4]{\frac{1}{6}}$