



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $2^{150} \cdot 3^{300}$ ?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $CF$  – биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $ED$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что площадь треугольника  $BCF$  в 16 раз больше площади треугольника  $DGF$ .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = x^5 + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = -3x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения  $abc$ .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность  $\omega$ , а на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , взяты точки  $E$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . На лучах  $EA$  и  $DC$  отметили точки  $X$  и  $Y$  соответственно таким образом, что  $AX = CF$  и  $CY = AF$ . Найдите площадь четырёхугольника  $BXFY$ , если  $BF = 17$ ,  $XY = 31$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$3) x \in [a; -1):$$

$$4) x \in [-1; 1]:$$

$$x^3 + 4 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 + 5$$

$$x^3 + 4 + x^2 + 1 \leq x^3 - x^2 + 5$$

$$2x^2 \leq 2$$

$$5 \leq 5$$

$$x^2 \leq 1$$

верно  
↓

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$\text{и}$$
$$[a; -1)$$

$$5) x \in (1; \infty):$$

$$x^3 + 4 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 + 5$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$\text{и}$$
$$(1; \infty)$$

$$\text{Об: } x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [1; 1]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

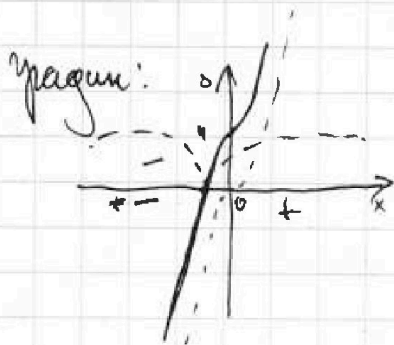
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

Решение:

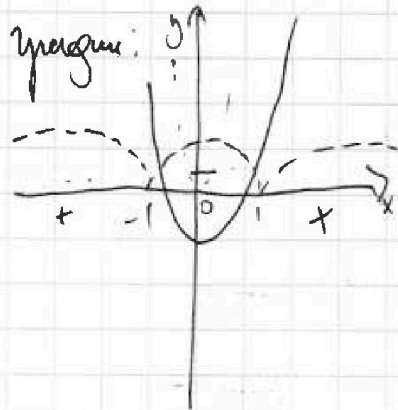
$$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2+5|$$

(1)                      (2)                      (3)

(1)  $y = x^3 + 4$   
 $y = 0$ :  
 $x^3 + 4 = 0$   
 $x = -\sqrt[3]{4}$



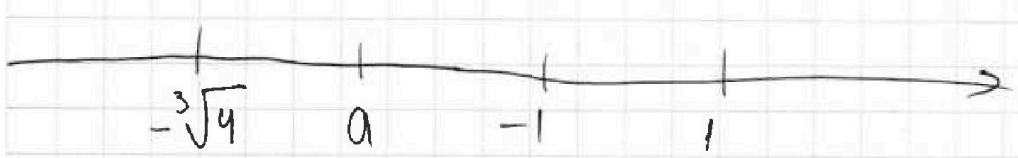
(2)  $y = x^2 - 1$   
 $y = 0$ :  
 $x = \pm 1$



(3)  $y = x^3 - x^2 + 5$  график  $y = x^3 - x^2$  со смещ. вверх на 5

$y = 0$ :  
 $x = a$

$x = -1$ :  
 $y = -1 + 1 + 5 = 3 > 0$   
 $x = -\sqrt[3]{4}$ :  
 $y = -4 - (\sqrt[3]{4})^2 + 5 = 1 - (\sqrt[3]{4})^2 < 0$   
 $\Downarrow$   
 $a \in (-\sqrt[3]{4}, -1)$



1)  $x \in (-\infty, -\sqrt[3]{4}]$                       2)  $x \in (-\sqrt[3]{4}, a)$

$-x^3 - 4 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 - 5$                        $x^3 + 4 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 - 5$

$-5 \leq -5$                        $2x^3 \leq -8$   
 $\Downarrow$  верно                       $x^3 \leq -4$   
 $x \in (-\infty, -\sqrt[3]{4}]$                        $x \leq -\sqrt[3]{4}$

решение по графику. нет

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

Т.к.  $a, b, c$  - геом. прогрессия

$$a \cdot b \cdot c = b^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$b = 2^{50} \cdot 3^{100}$$

Если прогрессия возрастающая:

$$\text{Т.к. } a \in \mathbb{N} \Rightarrow a = \frac{b}{q} \Rightarrow b : q \quad \text{и т.к. } c \in \mathbb{N} \Rightarrow c = bq \Rightarrow q \in \mathbb{N}$$

получается, что  $q$  - делитель  $b$

$$\text{ка-то делитель } b = 51 \cdot 101 = 5151$$

Отв: 5151 Если прогрессия убывающая:

$$\text{Т.к. } c \in \mathbb{N} \Rightarrow b : q ; a \in \mathbb{N} \Rightarrow q \in \mathbb{N}$$

получается, что  $q$  - делитель  $b$

$$\text{ка-то делитель } 5151.$$

Тогда всего 1 вариант:

$$5151 \cdot 2 - 8 = 10301$$

Итак, т.к. для обеих случаев есть значение  $a = b = c$

$$\text{Отв: } 10301$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$x^2(y-2) - x(13(y-2)-1) + 44(y-2) - 6 = 0$$

$$x^2(y-2) - 13x(y-2) + x + 44(y-2) - 6 = 0$$

$$(y-2)(x^2 - 13x + 44) = 6 - x$$

$$x^2 - 13x + 44 =$$

$$D = 169 - 176 < 0$$

$$\downarrow$$
$$x^2 - 13x + 44 > 0$$

$$(y-2) = \frac{6-x}{(x^2-13x+44)}$$

Т.к.  $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y-2 \in \mathbb{Z}$

$$(6-x) \downarrow \downarrow (x^2-13x+44)$$

$$\downarrow$$
$$|6-x| \geq x^2 - 13x + 44$$

1)  $6-x \geq x^2 - 13x + 44$

2)  $x-6 \geq x^2 - 13x + 44$

$$0 \geq x^2 - 12x + 38$$

решений  
нет

$$x^2 - 12x + 38$$

$$D = 144 - 152 < 0$$

$$x^2 - 12x + 38 > 0$$

$$x^2 - 14x + 50 \leq 0$$

решений  
нет

$$x^2 - 14x + 50$$

$$D = 196 - 200 < 0$$

$$x^2 - 14x + 50 > 0$$

Т.к.  $|6-x| < x^2 - 13x + 44$

$\downarrow$   
 $y-2 \notin \mathbb{Z}$   
 $\downarrow$  ур-ия  
в  $\mathbb{Z}$  нет решений

Ответ: решений нет



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

$$x^5 + ax = 0$$

$$x(x^4 + a) = 0$$

$$x = 0; x^4 + a \neq 0$$

$$x^4 = -a$$

$$x = \pm \sqrt[4]{-a}$$

$y = ax + x^5$  имеет луг (рис 1)

2) Рассмотрим точки  $A, B, C, D$

$$x^5 + ax = -3x$$

$$x(x^4 + a + 3) = 0$$

$$x = 0; x^4 = -a - 3$$

$$x = \pm \sqrt[4]{-a - 3}$$

3) Т.к.  $\triangle ABCD$  - квадрат  $\Rightarrow AC \perp BD \Rightarrow BD \in y = \frac{1}{3}x$   
(прямые  $\perp$  если  $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ )

$$4) x^5 + ax = \frac{1}{3}x$$

$$x(x^4 + a - \frac{1}{3}) = 0$$

$$x = 0; x = \pm \sqrt[4]{-a + \frac{1}{3}}$$

$$6) \sqrt[4]{-a + \frac{1}{3}} = -3(-\sqrt[4]{-a - 3})$$

$$-a + \frac{1}{3} = -81a + -243$$

5) Т.к.  $\vec{OA} \perp \vec{OB} \Rightarrow \vec{OA}(x_1; y_1) \cdot \vec{OB}(x_2; y_2) = 0$   
 $\Rightarrow (-\sqrt[4]{-a-3}, \sqrt[4]{-a+\frac{1}{3}})$

$$-240a = 730$$

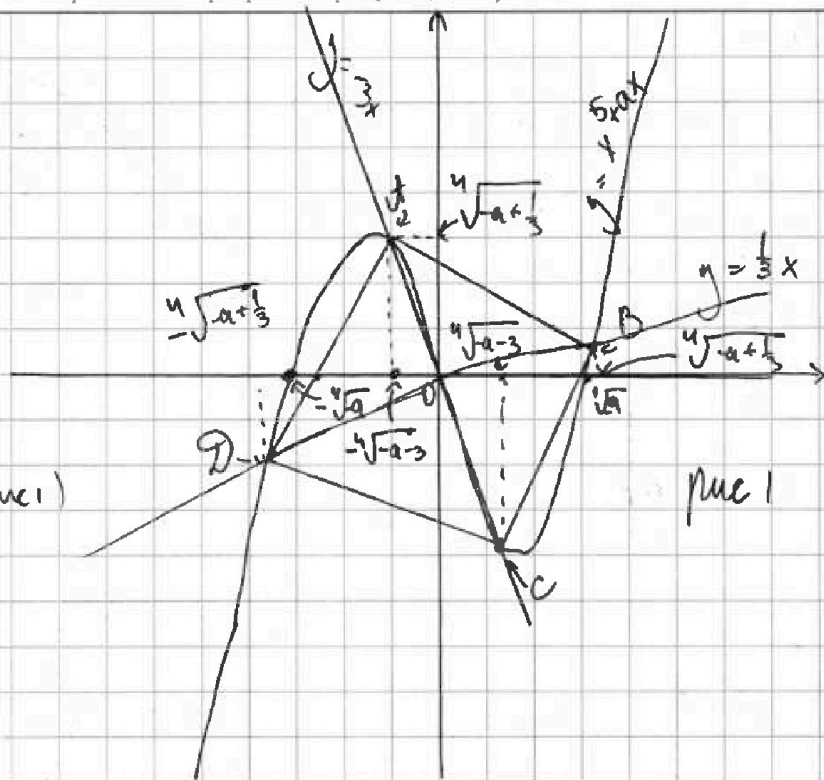
$$a = -\frac{73}{24}$$

$$7) AB = \frac{AC}{\sqrt{2}}$$

$$AC = 2AO = 2\sqrt{\sqrt[4]{-a+\frac{1}{3}} + \sqrt[4]{-a-3}}$$

$$AB = 2\sqrt{\frac{\sqrt[4]{\frac{73}{24}} + \sqrt[4]{\frac{73}{24}}}{2}} = 2\sqrt{\frac{9+1}{2\sqrt{24}}} = 2\sqrt{\frac{10}{4\sqrt{6}}} = \sqrt{\frac{10}{\sqrt{6}}}$$

Отв:  $a = -\frac{73}{24}; AB = \sqrt{\frac{10}{\sqrt{6}}}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

$$b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$c + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{b}$$

$$a - b = \frac{5}{c} - \frac{5}{b}$$

$$b - c = \frac{5}{a} - \frac{5}{c}$$

$$c - a = \frac{5}{b} - \frac{5}{a}$$

$$a - b = \frac{5(b-c)}{bc}$$

$$b - c = \frac{5(c-a)}{ac}$$

$$c - a = \frac{5(a-b)}{ab}$$

$$a - b = \frac{25(c-a)}{abc^2}$$

$$b - c = \frac{25(a-b)}{a^2bc}$$

$$c - a = \frac{25(b-c)}{ab^2c}$$

$$a - b = \frac{125(a-b)}{a^2b^2c^2}$$

$$b - c = \frac{125(b-c)}{a^2b^2c^2}$$

$$c - a = \frac{125(c-a)}{a^2b^2c^2}$$

Т.к. очевидно не все числа равны и/или совпадают  $\Rightarrow$   
минимум одно из чисел:  $(a-b)$ ;  $(b-c)$ ;  $(c-a) \neq 0$

$$\frac{125}{a^2b^2c^2} = 1$$

$$125 = (abc)^2$$

$$abc = \pm 5\sqrt{5}$$

$$abc = -5\sqrt{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c$

$\frac{b^a}{a}, b, b^c$

$$abc = b^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$b = 2^{50} \cdot 3^{100}$$

$\exists k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\frac{b}{a} \in \mathbb{N} \Rightarrow b : a$$

$$a = 51 \cdot 100$$

$$2(22y - 47)$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ \times 51 \\ \hline 5151 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2^2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 38 \\ 4 \\ \hline 152 \end{array}$$

$$\textcircled{N3} x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$x^2y - 2x^2 - 13xy + 27x + 44y - 94 = 0$$

$$\textcircled{D} = y^2 - 4y + 4 - 4(13y - 27) +$$

$$16y^2 - 2 \cdot 27 \cdot 13y + 27^2 + (y-2)(44y - 94) =$$

$$= 16y^2 - 2 \cdot 13y^2 - 2 \cdot 3 \cdot 13y + 3^6 + 2 \cdot 11y^2 - 2^5 \cdot 11y - 2 \cdot 47 + 2 \cdot 47 =$$

$$= y^2(13 + 2 \cdot 11) - y(2 \cdot 3 \cdot 13 + 2 \cdot 11 + 2 \cdot 47) + 3^6 + 2 \cdot 47 \geq 0$$

$$x^2(y-2) - x(13(y-2)-1) + 44(y-2) - 8 = 0$$

$$x^2(y-2) - 13x(y-2) + x + 44(y-2) - 8 = 0$$

$$(y-2)(x^2 - 13x + 44) + y - 8 = 0$$

$$(y-2)(x^2 - 13x + 44) = 8 - y$$

$$(y-2) = \frac{8-y}{x^2 - 13x + 44}$$

$$x^2 - 13x + 44 > 0 \Rightarrow x < 5 \text{ or } x > 8$$

$$y(13x + 44) = 8 - y$$

$$144 = 6$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{22}$$

$$6 - x = 5^2$$

$$8 - x = y \Rightarrow x > 6$$

$$y - 2 < 0$$

$$y < 2$$

$$x^2 - 13x + 44 = 6 - x$$

$$x^2 - 12x + 38 = 0$$

$$\frac{13}{2} = 6,5$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b + 5 + 4 + 5 + 5 + 4 + 4$$

10    10

$$28 + 5 = 33$$

$$18$$

$$27$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 8 \\ 11 \\ 33 \end{array}$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

$$a - b = \frac{5}{c} - \frac{5}{b} = \frac{5(b-c)}{bc}$$

$$b - c = \frac{5(c-a)}{ab}$$

$$c - a = \frac{5(a-b)}{ab} = \frac{25(b-c)}{abc^2} = \frac{125(c-a)}{a^2b^2c^2}$$

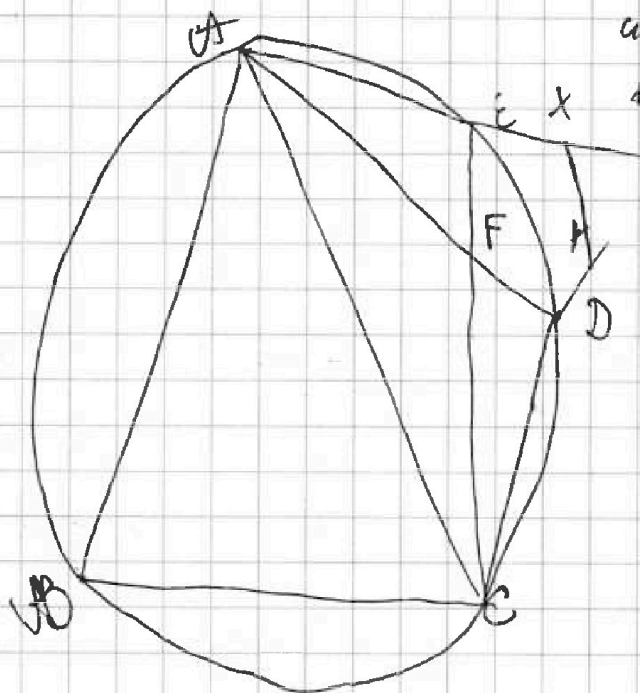
$$c - a = \frac{125(c-a)}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{125}{a^2b^2c^2} = 1$$

$$125 = (abc)^2$$

$$abc = \pm 5\sqrt{5}$$

$$abc = -5\sqrt{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^3 - x^2 + 5 = 0$$

$$x^3 - x^2 = 0$$

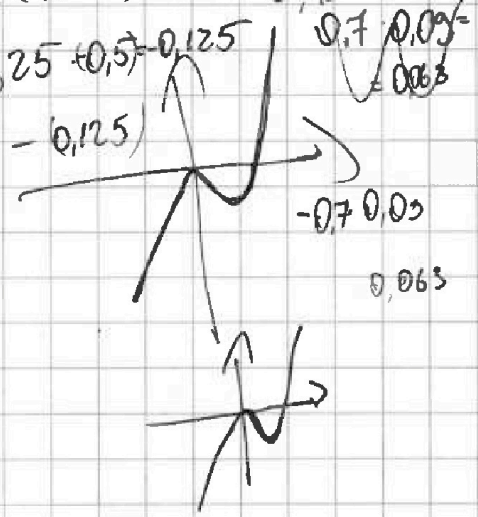
$$x^2(x-1) = 0$$

$$0,25 + 0,5 = 0,75$$

$$-0,125$$

$$-0,7$$

$$0,063$$





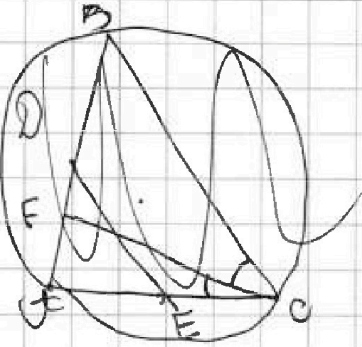
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

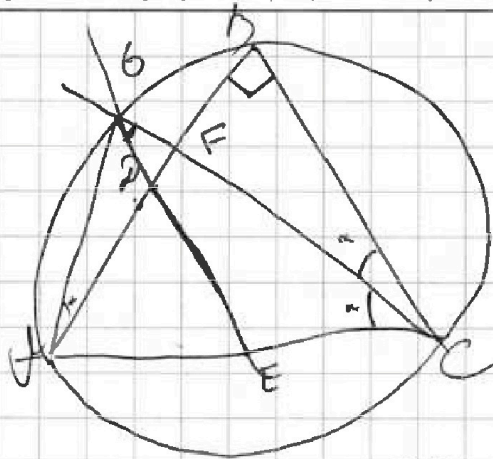
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{S_{BCF}}{S_{BCE}} = 16$$

$$\Downarrow$$

$$k = \frac{1}{4}$$



$BC \parallel GE$

$\Downarrow$

$\triangle BFC \sim \triangle GFD$

$$k = \frac{BC}{GE} = \frac{BD}{GD}$$

$$\frac{DF}{FB} = \frac{1}{4}$$

$90 - 2\alpha - 90 - 90 - 2 - 90$

$\angle GBC = 90^\circ$

$\Downarrow$

$\angle ABC = 90^\circ$

$+ DE = \frac{1}{2} BC$

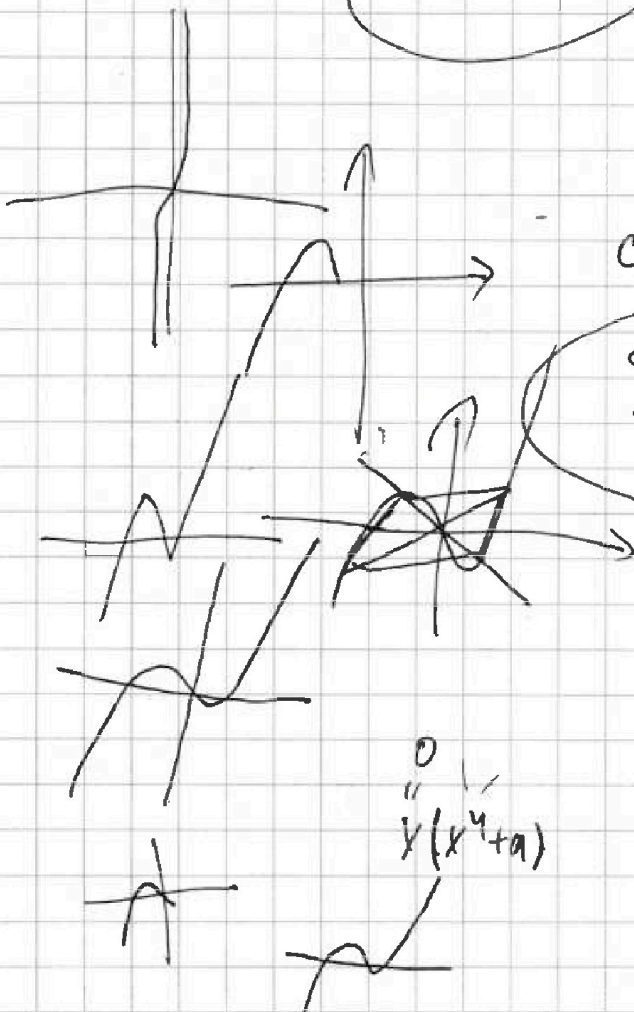
$GD = \frac{1}{4} BC$

---

$GE = \frac{3}{4} BC$

$EC = \frac{3}{4} BC$

$\frac{1}{2} AC = \frac{3}{4} BC$



$\angle C = 1,5 \angle B$

$$\cos 2\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$$

$\angle BCD = \arccos \frac{2}{3}$

$\angle BDC = \arcsin \frac{2}{3}$

$y(x^4 + a)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

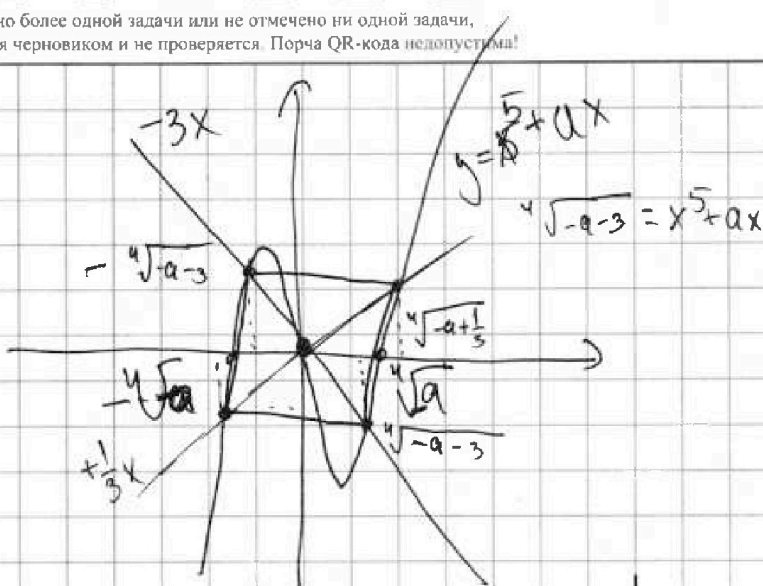
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^5 + ax = -3x$$

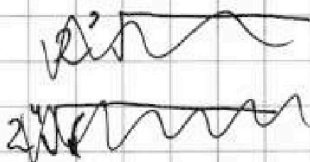
$$x^5 + x(a+3) = 0$$

$$x(x^4 + a + 3) = 0$$

$y=0$        $x = \sqrt[4]{-a-3}$



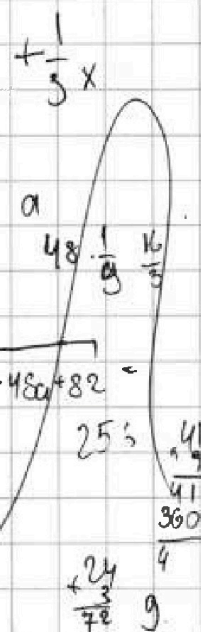
диагональ!



$$x^5 + ax = \frac{1}{3}x$$

$$x(x^4 + a - \frac{1}{3}) = 0$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{1}{3} - a}$$



$$2 \sqrt{(-a-3)^2 + (-a + \frac{1}{3})^2}$$

$$2 \sqrt{a^2 + 6a + 9 + a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{9}} = 2 \sqrt{2a^2 + \frac{16}{3}a + \frac{82}{9}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{18a^2 + 48a + 82} = \frac{2}{3} \sqrt{18a^2 + 48a + 82}$$

$$\text{свойства} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{18a^2 + 48a + 82}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10} \sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{5 \cdot 6}{3}} = \sqrt{10}$$

$$2 \frac{\sqrt{|-a-3|} + \sqrt{-a + \frac{1}{3}}}{2} = \sqrt{|-a-3|} + \sqrt{-a + \frac{1}{3}}$$

$$2 \sqrt{\frac{1}{24} + \frac{\sqrt{82}}{24}}$$

$$2 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{82}}{2 \cdot 24}} = 2 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{82}}{48}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{82}}{12}}$$

$$\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$+ \frac{73}{24} - 3$$

$$3 \frac{1}{24} - 3$$

$$\frac{73+5}{24} = \frac{82}{24} = \frac{3 \frac{1}{24} + \frac{8}{24}}{3 + \frac{9}{24}}$$

$$+ \sqrt[4]{\frac{1}{3} - a} = \sqrt[4]{-a-3}$$

$$(-a + \frac{1}{3}) = 81(-a-3)$$

$$-a + \frac{1}{3} = -81a - 243$$

$$\frac{41}{72} + \frac{8}{24} - 80a = 243 \frac{1}{3}$$

$$-240a = 729 + 1$$

$$-240a = 730$$

$$a = \frac{73}{24}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

