



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{300}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 17$, $XY = 31$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$3) x \in [a; -1):$$

$$4) x \in [-1; 1]:$$

$$x^3 + 4 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 + 5$$

$$x^3 + 4 + x^2 + 1 \leq x^3 - x^2 + 5$$

$$2x^2 \leq 2$$

$$5 \leq 5$$

$$x^2 \leq 1$$

верно
↓

$$x \in [-1; 1]$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$\text{и}$$
$$[a; -1)$$

$$5) x \in (1; \infty):$$

$$x^3 + 4 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 + 5$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$\text{и}$$
$$(1; \infty)$$

$$\text{Об: } x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [1; 1]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

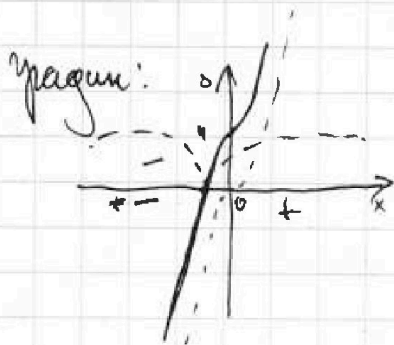
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

Решение:

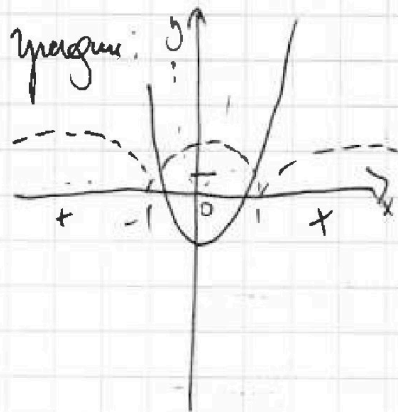
$$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2+5|$$

(1) (2) (3)

(1) $y = x^3 + 4$
 $y = 0$:
 $x^3 + 4 = 0$
 $x = -\sqrt[3]{4}$



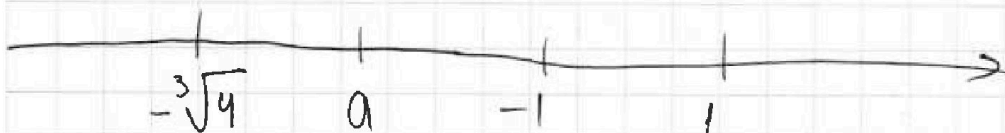
(2) $y = x^2 - 1$
 $y = 0$:
 $x = \pm 1$



(3) $y = x^3 - x^2 + 5$ график $y = x^3 - x^2$ со смещ. вверх на 5

$y = 0$:
 $x = a$

$x = -1$:
 $y = -1 + 1 + 5 = 3 > 0$
 $x = -\sqrt[3]{4}$:
 $y = -4 - (\sqrt[3]{4})^2 + 5 = 1 - (\sqrt[3]{4})^2 < 0$
 \Downarrow
 $a \in (-\sqrt[3]{4}, -1)$



1) $x \in (-\infty, -\sqrt[3]{4}]$

2) $x \in (-\sqrt[3]{4}, a)$

$-x^3 - 4 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 - 5$ $x^3 + 4 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 - 5$

$-5 \leq -5$
 \Downarrow верно

$x \in (-\infty, -\sqrt[3]{4}]$

$2x^3 \leq -8$

$x^3 \leq -4$

$x \leq -\sqrt[3]{4}$

решения по условию нет

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

Т.к. a, b, c - геом. прогрессия

$$a \cdot b \cdot c = b^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$b = 2^{50} \cdot 3^{100}$$

Если прогрессия возрастающая:

$$\text{Т.к. } a \in \mathbb{N} \Rightarrow a = \frac{b}{q} \Rightarrow b : q \quad \text{и т.к. } c \in \mathbb{N} \Rightarrow c = bq \Rightarrow q \in \mathbb{N}$$

получается, что q - делитель b

$$\text{ка-то делитель } b = 51 \cdot 101 = 5151$$

Отв: 5151 Если прогрессия убывающая:

$$\text{Т.к. } c \in \mathbb{N} \Rightarrow b : q ; a \in \mathbb{N} \Rightarrow q \in \mathbb{N}$$

получается, что q - делитель b

$$\text{ка-то делитель } 5151.$$

Тогда всего 1 вариант:

$$5151 \cdot 2 - 3 = 10301$$

Итак, т.к. для обеих случаев есть значение $a = b = c$

$$\text{Отв: } 10301$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$x^2(y-2) - x(13(y-2)-1) + 44(y-2) - 6 = 0$$

$$x^2(y-2) - 13x(y-2) + x + 44(y-2) - 6 = 0$$

$$(y-2)(x^2 - 13x + 44) = 6 - x$$

$$x^2 - 13x + 44 =$$

$$D = 169 - 176 < 0$$

$$\downarrow$$
$$x^2 - 13x + 44 > 0$$

$$(y-2) = \frac{6-x}{(x^2-13x+44)}$$

Т.к. $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y-2 \in \mathbb{Z}$

$$(6-x) \downarrow (x^2-13x+44)$$

$$\downarrow$$
$$|6-x| \geq x^2 - 13x + 44$$

1) $6-x \geq x^2 - 13x + 44$

2) $x-6 \geq x^2 - 13x + 44$

$$0 \geq x^2 - 12x + 38$$

решений
нет

$$x^2 - 12x + 38$$

$$D = 144 - 152 < 0$$

$$x^2 - 12x + 38 > 0$$

$$x^2 - 14x + 50 \leq 0$$

решений
нет

$$x^2 - 14x + 50$$

$$D = 196 - 200 < 0$$

$$x^2 - 14x + 50 > 0$$

Т.к. $|6-x| < x^2 - 13x + 44$

\downarrow
 $y-2 \notin \mathbb{Z}$
 \downarrow ур-ия
в \mathbb{Z} нет решений

Ответ: решений нет

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

$$x^5 + ax = 0$$

$$x(x^4 + a) = 0$$

$$x = 0; x^4 + a \neq 0$$

$$x^4 = -a$$

$$x = \pm \sqrt[4]{-a}$$

$y = ax + x^5$ имеет луг (рис 1)

2) Рассмотрим точки A, C

$$x^5 + ax = -3x$$

$$x(x^4 + a + 3) = 0$$

$$x = 0; x^4 = -a - 3$$

$$x = \pm \sqrt[4]{-a - 3}$$

3) Т.к. $\triangle ABC D$ - квадрат $\Rightarrow AC \perp BD \Rightarrow BD \in y = \frac{1}{3}x$
(прямые \perp если $k_1 = -\frac{1}{k_2}$)

$$4) x^5 + ax = \frac{1}{3}x$$

$$x(x^4 + a - \frac{1}{3}) = 0$$

$$x = 0; x = \pm \sqrt[4]{-a + \frac{1}{3}}$$

$$6) \sqrt[4]{-a + \frac{1}{3}} = -3(-\sqrt[4]{-a - 3})$$

$$-a + \frac{1}{3} = -8|a + -24|^{1/3}$$

$$-240a = 730$$

$$a = -\frac{73}{24}$$

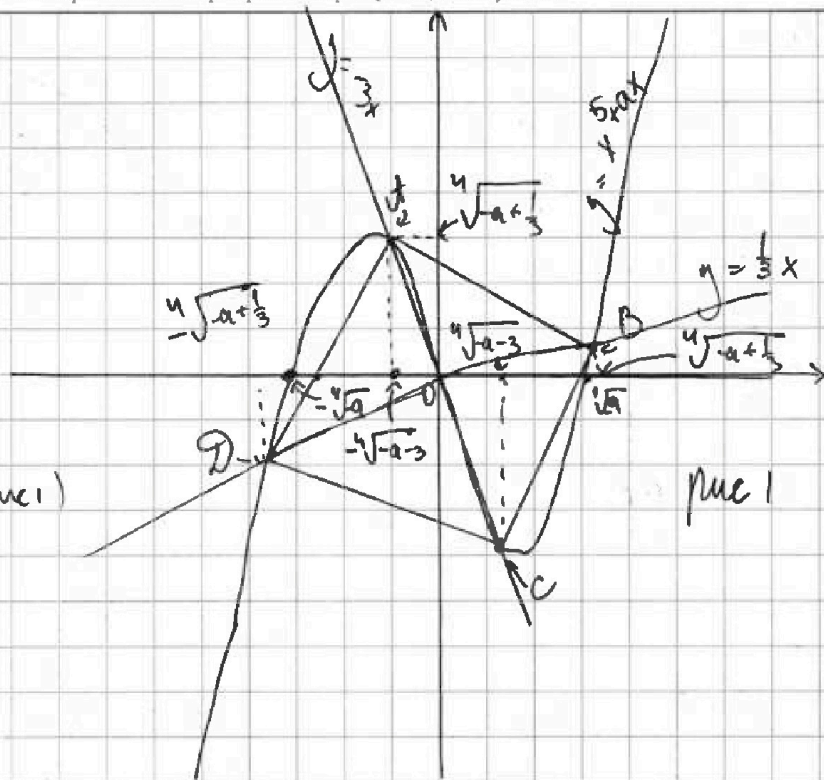
5) Т.к. $\vec{OA} \perp \vec{OB} \Rightarrow \vec{OA}(x_1; y_1) \cdot \vec{OB}(x_2; y_2) = 0$
 $\Rightarrow (-\sqrt[4]{-a-3}, \sqrt[4]{-a+\frac{1}{3}})$

$$7) AB = \frac{AC}{\sqrt{2}}$$

$$AC = 2AO = 2\sqrt{\sqrt[4]{-a+\frac{1}{3}} + \sqrt[4]{-a-3}}$$

$$AB = 2\sqrt{\frac{\sqrt[4]{\frac{73}{24}} + \sqrt[4]{\frac{73}{24}}}{2}} = 2\sqrt{\frac{9+1}{2\sqrt{24}}} = 2\sqrt{\frac{10}{4\sqrt{6}}} = \sqrt{\frac{10}{\sqrt{6}}}$$

$$\text{Ans: } a = -\frac{73}{24}; AB = \sqrt{\frac{10}{\sqrt{6}}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

$$b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$c + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{b}$$

$$a - b = \frac{5}{c} - \frac{5}{b}$$

$$b - c = \frac{5}{a} - \frac{5}{c}$$

$$c - a = \frac{5}{b} - \frac{5}{a}$$

$$a - b = \frac{5(b-c)}{bc}$$

$$b - c = \frac{5(c-a)}{ac}$$

$$c - a = \frac{5(a-b)}{ab}$$

$$a - b = \frac{25(c-a)}{abc^2}$$

$$b - c = \frac{25(a-b)}{a^2bc}$$

$$c - a = \frac{25(b-c)}{ab^2c}$$

$$a - b = \frac{125(a-b)}{a^2b^2c^2}$$

$$b - c = \frac{125(b-c)}{a^2b^2c^2}$$

$$c - a = \frac{125(c-a)}{a^2b^2c^2}$$

Т.к. очевидно не все числа равны и/или совпадают \Rightarrow
минимум одно из чисел: $(a-b)$; $(b-c)$; $(c-a) \neq 0$

$$\frac{125}{a^2b^2c^2} = 1$$

$$125 = (abc)^2$$

$$abc = \pm 5\sqrt{5}$$

$$abc = -5\sqrt{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c

$\frac{b^a}{a}, b, b^c$

$$abc = b^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$b = 2^{50} \cdot 3^{100}$$

$\exists k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\frac{b}{a} \in \mathbb{N} \Rightarrow b : a$$

$$a = 51 \cdot 100$$

$$2(22y - 47)$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ \times 101 \\ \hline 5151 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2^2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 38 \\ 4 \\ \hline 152 \end{array}$$

W3 $x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$

$$x^2y - 2x^2 - 13xy + 27x + 44y - 94 = 0$$

$$D = y^2 - 4y + 4 - 4(13y - 27) +$$

$$16y^2 - 2 \cdot 2 \cdot 13y + 27^2 + (y-2)(44y-94) =$$

$$= 16y^2 - 2 \cdot 13y^2 - 2 \cdot 3 \cdot 13y + 3^6 + 2 \cdot 11y^2 - 2^5 \cdot 11y - 2 \cdot 47 + 2 \cdot 47 =$$

$$= y^2(13 + 2 \cdot 11) - y(2 \cdot 3 \cdot 13 + 2 \cdot 11 + 2 \cdot 47) + 3^6 + 2 \cdot 47 \geq 0$$

$$x^2(y-2) - x(13(y-2)-1) + 44(y-2) - 8 = 0$$

$$x^2(y-2) - 13x(y-2) + x + 44(y-2) - 8 = 0$$

$$(y-2)(x^2 - 13x + 44) + y - 8 = 0$$

$$(y-2)(x^2 - 13x + 44) = 8 - y$$

$$(y-2) = \frac{8-y}{x^2 - 13x + 44}$$

$$x^2 - 13x + 44 > 0 \Rightarrow 6 - x < 0 \Rightarrow x > 6$$

$$\begin{array}{l} -y(13x+44) \\ 144 = 6 \\ \frac{2}{44} \\ \frac{3}{22} \\ 6-x < 9 \\ 8-x-y < 9 \\ y-2 < 0 \\ y < 2 \\ x^2 - 13x + 44 = 6-x \\ x^2 - 12x + 38 \\ 375x^2 - 12x + 38 \\ 81 - 90 - 27 + 44 \\ 125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ 47 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} y-2 \\ \times 6 \\ x^2 - 13x + 44 \\ x^2 - 14x + 50 \\ \hline 64 - 80 - 2x + 44 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 159 - 126 \\ 159 - 176 \\ 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 47 \\ 16 \end{array}$$

$$\frac{13}{2} = 6,5$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b + 5 + 4 + 5 + 5 + 4 + 4$$

10 10

$$28 + 5 = 33$$

18

27

$$\begin{array}{r} 24 \\ 8 \\ \hline 11 \end{array} \begin{array}{r} 33 \\ \\ \hline \end{array}$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

$$a - b = \frac{5}{c} - \frac{5}{b} = \frac{5(b-c)}{bc}$$

$$b - c = \frac{5(c-a)}{ab}$$

$$c - a = \frac{5(a-b)}{ab} = \frac{25(b-c)}{abc^2} = \frac{125(c-a)}{a^2b^2c^2}$$

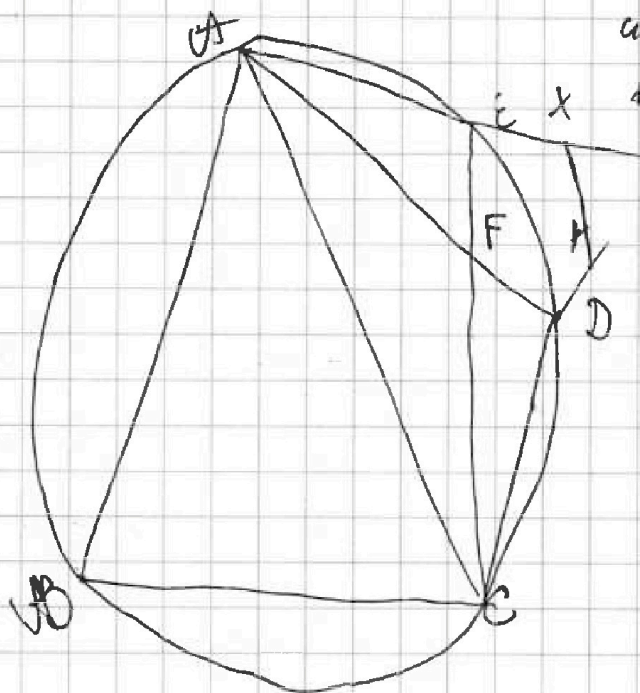
$$c - a = \frac{125(c-a)}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{125}{a^2b^2c^2} = 1$$

$$125 = (abc)^2$$

$$abc = \pm 5\sqrt{5}$$

$$abc = -5\sqrt{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^3 - x^2 + 5 = 0$$

$$x^3 - x^2 = 0$$

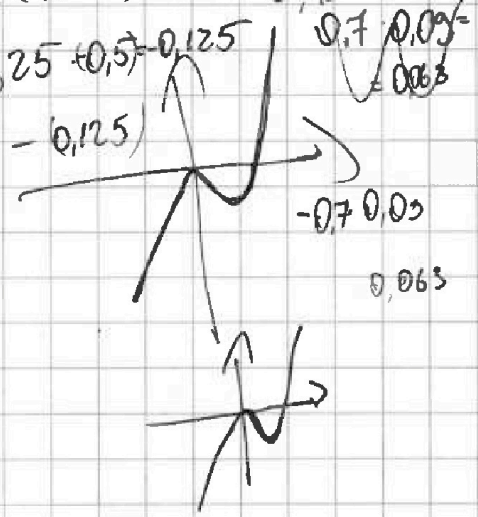
$$x^2(x-1) = 0$$

$$0,25 + 0,5 = 0,75$$

$$-0,125$$

$$-0,7$$

$$0,063$$



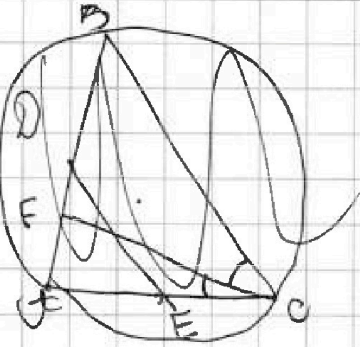
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

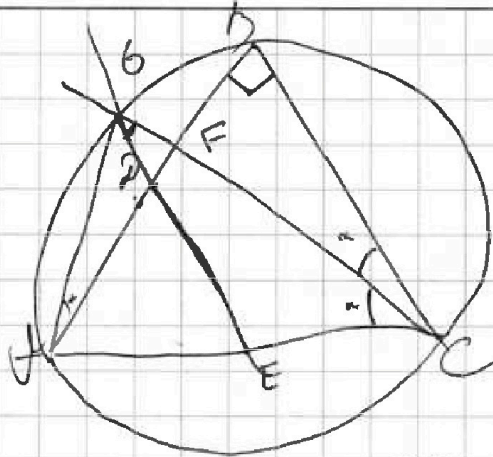
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{S_{BCF}}{S_{BCE}} = 1/6$$

$$\Downarrow$$

$$k = \frac{1}{4}$$



$BC \parallel GE$

$\Delta BFC \sim \Delta GFD$

$$k = \frac{BC}{GE} = \frac{BD}{GD}$$

$$\frac{DF}{FB} = \frac{1}{4}$$

$90 - 2\alpha - 90 - 90 - 2 - 90$

$$DE = \frac{1}{2} BC$$

$$GD = \frac{1}{4} BC$$

$$GE = \frac{3}{4} BC$$

$$EC = \frac{3}{4} BC$$

$$\frac{1}{2} AC = \frac{3}{4} BC$$

$\angle GBC = 90^\circ$

\Downarrow

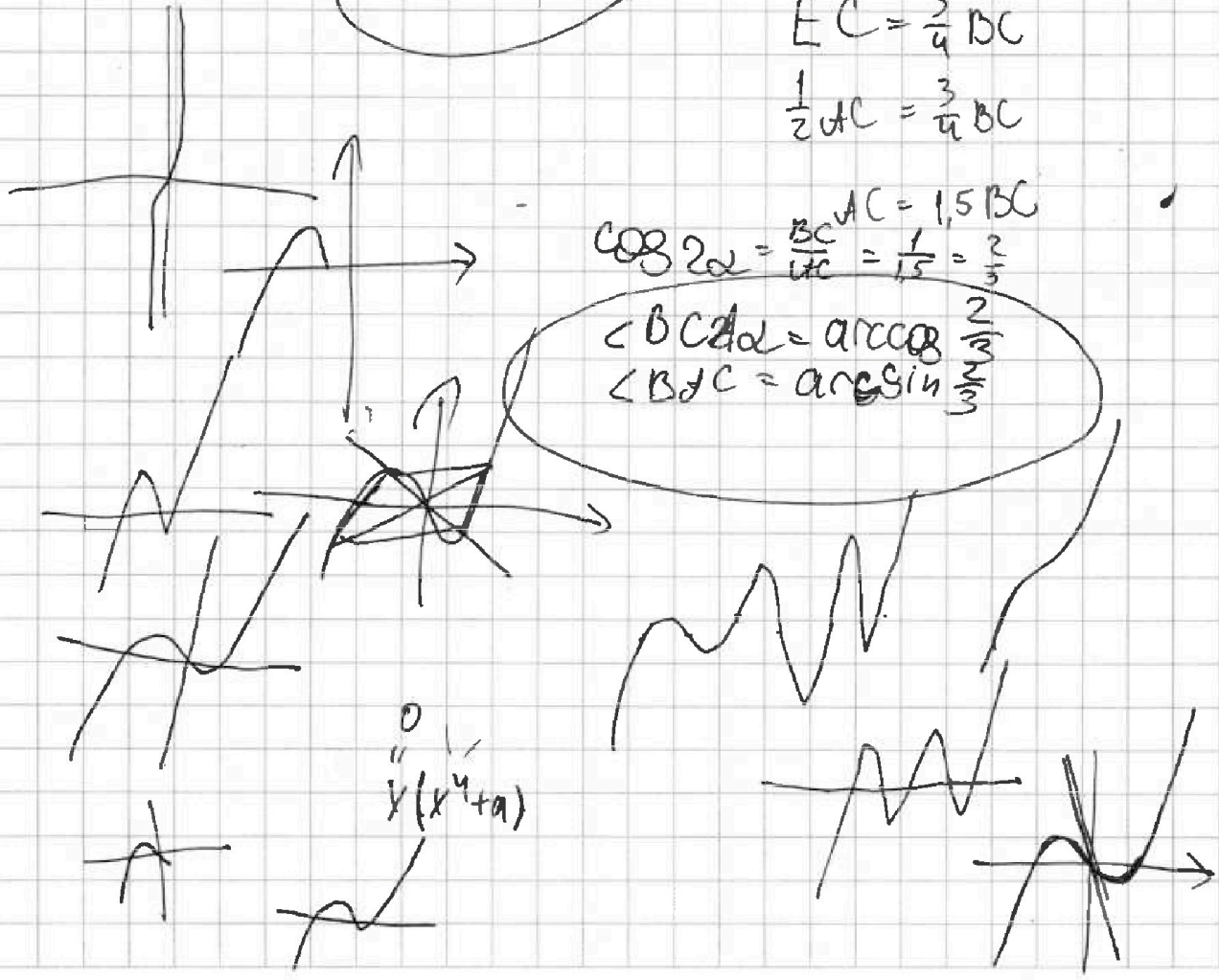
$\angle ABC = 90^\circ$

$AC = 1,5 BC$

$$\cos 2\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$$

$\angle BCD = \arccos \frac{2}{3}$

$\angle BDC = \arcsin \frac{2}{3}$



$y(x^4 + a)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

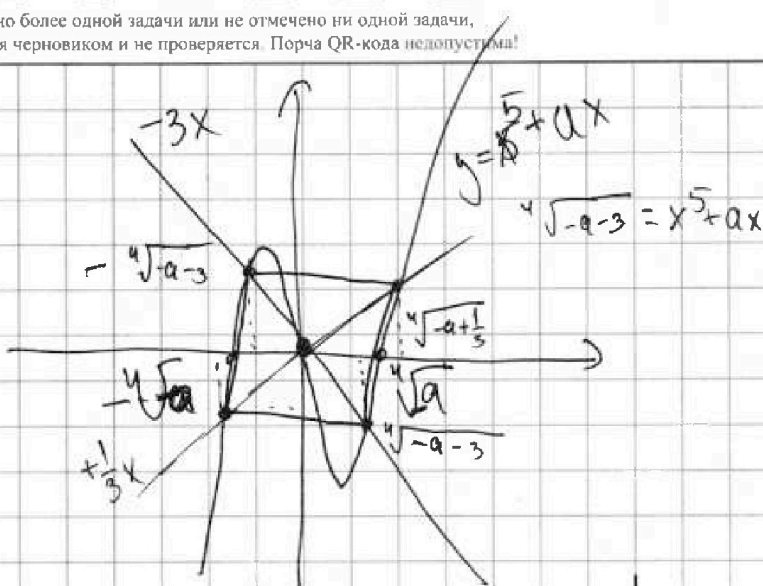
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^5 + ax = -3x$$

$$x^5 + x(a+3) = 0$$

$$x(x^4 + a + 3) = 0$$

$y=0$ $x = \sqrt[4]{-a-3}$



диагональ!



$$x^5 + ax = \frac{1}{3}x$$

$$x(x^4 + a - \frac{1}{3}) = 0$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{1}{3} - a}$$

$$+ \frac{1}{3}x$$

$$a$$

$$48 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{16}{3}$$

$$25 \cdot \frac{41}{360}$$

$$\frac{24}{72} \cdot 9$$

$$2 \sqrt{(-a-3)^2 + (-a + \frac{1}{3})^2}$$

$$2 \sqrt{a^2 + 6a + 9 + a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{9}} = 2 \sqrt{2a^2 + \frac{16}{3}a + \frac{82}{9}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{18a^2 + 48a + 82}$$

$$\text{свойства} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{18a^2 + 48a + 82}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10} \sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{5 \cdot 6}{3}}$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{9a^2 + 16a + 41}$$

$$2 \frac{\sqrt{|-a-3|} + \sqrt{-a + \frac{1}{3}}}{2}$$

$$2 \sqrt{\frac{1}{24} + \frac{\sqrt{82}}{24}}$$

$$2 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{82}}{2 \cdot 24}} = 2 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{82}}{48}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \sqrt{82}}}{\sqrt{12}}$$

$$\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$+ \frac{73}{24} - 3$$

$$3 \frac{1}{24} - 3$$

$$\frac{73+5}{24} = \frac{82}{24} = 3 \frac{1}{24} + \frac{8}{24} = 3 + \frac{9}{24}$$

$$+ \sqrt[4]{\frac{1}{3} - a} = \sqrt[4]{-a-3}$$

$$(-a + \frac{1}{3}) = 81(a-3)$$

$$-a + \frac{1}{3} = -81a - 243$$

$$\frac{41}{72} + \frac{8}{24} - 80a = 243 \frac{1}{3}$$

$$-240a = 729 + 1$$

$$-240a = 730$$

$$a = \frac{73}{24}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

