МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12

1. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|x^3-9\right|+\left|x^2-1\right| \leqslant \left|x^3-x^2-8\right|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360}\cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y-3)-x(11y-34)+32y-101=0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC. Прямые ED и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF.

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y=-x^5+ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y=2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом

$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC $(AB=BC)$ вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX=CF$ и $CY=AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF=19$, $XY=36$.

$|x^3-9|+|x^2-1| \leq |x^3-x^2-8|$

Пусть $x^3-9=a$; $x^2-1=b \Rightarrow x^3-x^2-8=(x^3-9)-(x^2-1)=a-b$.

Итого: $|a|+|b| \leq |a-b|$. Обозначим это выражение (Ж).

Рассмотрим возможные случаи расположения чисел a и b на числовой оси:

1) $a \geq b \geq 0 \Rightarrow$ (Ж): $a+b \leq a-b \Rightarrow 2b \leq 0 \Rightarrow b \leq 0 \Rightarrow b=0$, $a \geq 0$

2) $b \geq a \geq 0 \Rightarrow$ (Ж): $a+b \leq b-a \Rightarrow a \leq 0 \Rightarrow a=0$, $b \geq 0$.

3) $a \geq 0$, $b \leq 0 \Rightarrow$ (Ж): $a-b \leq a+b \Rightarrow$ ~~...~~ верно при $a \geq 0$, $b \leq 0$

4) $a \leq 0$, $b \geq 0 \Rightarrow$ (Ж): $-a+b \leq -a+b \Rightarrow$ ~~...~~ (верно при $a \leq 0$; $b \geq 0$.)

5) $a \leq b \leq 0 \Rightarrow -a-b \leq b-a \Rightarrow 2b \geq 0 \Rightarrow b=0$, $a \leq 0$

6) $b \leq a \leq 0 \Rightarrow -a-b \leq a-b \Rightarrow 2a \geq 0 \Rightarrow a \geq 0 \Rightarrow a=0$, $b \leq 0$

Итого, разобраны все возможные случаи расположения чисел a, b и 0 на числовой оси.

$a=0 \Rightarrow x^3-9=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{9}$

$b=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x \in \{-1;1\}$.

$a \geq 0 \Rightarrow x^3-9 \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 9 \Rightarrow x \in (\sqrt[3]{9};+\infty)$

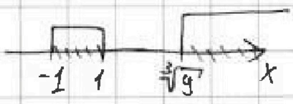
$a<0 \Rightarrow x^3-9<0 \Rightarrow x^3<9 \Rightarrow x \in (-\infty;\sqrt[3]{9})$

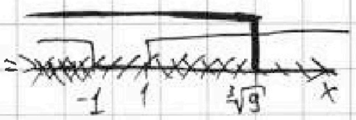
$b>0 \Rightarrow x^2-1>0 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$

$b<0 \Rightarrow x^2-1<0 \Rightarrow x^2<1 \Rightarrow x \in (-1;1)$.

1) $b=0$ и $a \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right. \\ x \in [\sqrt[3]{9};+\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$

2) $\begin{cases} a=0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt[3]{9} \\ x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty) \end{cases} \Rightarrow x=\sqrt[3]{9}$.

3) $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [\sqrt[3]{9};+\infty) \\ x \in [-1;1] \end{cases} \Rightarrow$  $\Rightarrow x \in \varnothing$.

4) $\begin{cases} a \leq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\sqrt[3]{9}] \\ x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty) \end{cases} \Rightarrow$  $\Rightarrow x \in (-\infty;-1] \cup [1;\sqrt[3]{9}]$

5) $\begin{cases} b=0 \\ a \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right. \\ x \in (-\infty;\sqrt[3]{9}] \end{cases} \Rightarrow x \in \{-1;1\}$.

6) $\begin{cases} a=0 \\ b \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt[3]{9} \\ x \in [-1;1] \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$.

Итого: $\left[\begin{array}{l} x=\sqrt[3]{9} \\ x \in (-\infty;-1] \cup [1;\sqrt[3]{9}] \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow x \in (-\infty,-1] \cup [1;\sqrt[3]{9}]$.

ОТВЕТ: $x \in (-\infty;-1] \cup [1;\sqrt[3]{9}]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$b = a \cdot q$

$c = a \cdot q^2$, где $q \in \mathbb{N}$, т.к $\underset{\in N}{a} \cdot q = \underset{\in N}{b}$.

$a \cdot b \cdot c = 5^{360} \cdot 7^{90}$

Значит $a \cdot (aq) \cdot (a \cdot q^2) = (aq)^3 = 5^{360} \cdot 7^{90} \Rightarrow a \cdot q = 5^{120} \cdot 7^{30}$. Получается нужно рассмотреть все возможные a и q. Поскольку $a \cdot q = 5^{120} \cdot 7^{30}$, то число a и q при разложении на простые множители должны иметь вид $(5^{\alpha} \cdot 7^{\beta})$, где $0 \le \alpha \le 120$, $0 \le \beta \le 30$.

Пусть $a = 5^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$; $q = 5^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 120 \\ \beta_1 + \beta_2 = 30 \end{cases}$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha_i \le 120$, $\beta_j \le 30$ для $\forall i \in \{1,2\}$ для $\forall j \in \{1,2\}$.

$\alpha_2 = -\alpha_1 + 120$. При $\alpha_1 \in [0; 120]$: $\alpha_2 \in [0; 120]$

$\beta_2 = -\beta_1 + 30$. При $\beta_1 \in [0; 30]$: $\beta_2 \in [0; 30]$.

Итого вариантов α_1 ~~может~~ 121, вариантов β_1 31.

Значит вариантов числа a — $(121 \cdot 31)$ штук, причем каждому a соответствует единственное q, то есть каждому a соответствует лишь одна пара (a, b, c).

$121 \cdot 31 = 3751$.

Ответ: 3751

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x, y \in \mathbb{Z}$.

$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$.

I) $y=3 \Rightarrow 0 + x + 96 - 101 = 0$

$x = 5$.

II) $y \neq 3 \Rightarrow D = (11y-34)^2 - 4(32y-101)(y-3) =$

$= (121y^2 - 748y + 1156) - (128y^2 - 788y + 1212) = -7y^2 + 40y - 56$.

Чтоб существовал x, нужно чтоб $D \geq 0$, $\Rightarrow -7y^2 + 40y - 56 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7y^2 - 40y + 56 \leq 0$.

$7y^2 - 40y + 56 = 0 \Rightarrow D_1 = 20^2 - 7 \cdot 56 = 400 - 392 = 8$

$y_{1,2} = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$. 1) Заметим, что $\frac{20-2\sqrt{2}}{7} > 2$, т.к.

$20 - 2\sqrt{2} > 14$

$6 > 2\sqrt{2}$

$3 > 2\sqrt{2}$ ~~верно~~

$9 > 8$ – верно $\Rightarrow \frac{20-2\sqrt{2}}{7} > 2$.

2) $\frac{20+2\sqrt{2}}{7} < 4$, т.к. $20 + 2\sqrt{2} < 28$

$2\sqrt{2} < 8$

$\sqrt{2} < 4$

$2 < 16$ – верно $\Rightarrow \frac{20+2\sqrt{2}}{7} < 4$.

$7y^2 - 40y + 56 \leq 0 \Rightarrow y \in \left[\frac{20-2\sqrt{2}}{7}; \frac{20+2\sqrt{2}}{7}\right]$, причем по доказанному (II):

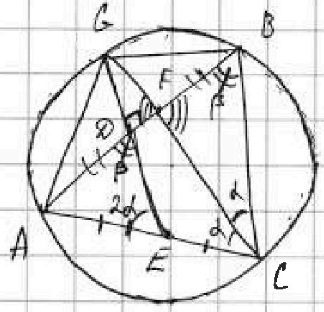
$2 < y < 4$. $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = 3$, но вначале мы сказали, что $y \neq 3$.
Противоречие.

Ответ: $(5; 3)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$

$\omega(O;R)$; $A, B, C \in \omega$.

$D \in AB$, $DA = DB$

$E \in AC$, $EA = EC$.

CF - бисс $\angle BCA$, $F \in AB$

$CF \cap \omega = G$.

$ED \cap \omega = G$.

$S_{BCF} = 25 \cdot S_{GFD}$.

Найти: $\angle A, \angle B, \angle C$.

Решение:

$\left.\begin{array}{l}\angle ACG = \angle BCG \text{ - по усл.} \\ C, A, B, G \in \omega \text{ - по усл}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AG} = \overset{\frown}{GB} \Rightarrow AG = BG.$

$\left.\begin{array}{l}\triangle ABG: AG = BG \Rightarrow \triangle ABG \text{ - равноб.} \\ AD = DB \Rightarrow GD \text{ - медиана}\end{array}\right\} \Rightarrow GD$ - высота $\triangle AGB \Rightarrow \angle GDF = 90°$.

$\triangle ABC$: $\left.\begin{array}{l}DA = DB \\ EA = EC\end{array}\right\} \Rightarrow DE$ - средняя линия $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}DE \parallel BC \Rightarrow \angle ADE = \angle ABC \text{ - соответств.} \\ DE = \frac{1}{2}BC.\end{array}\right.$

$\angle ADE = \angle GDF$ - верт $\Rightarrow \angle ADE = 90° \Rightarrow \angle ABC = 90°$.

$\triangle GDF$ и $\triangle CBF$: $\left.\begin{array}{l}\angle BFC = \angle GFD \text{ - вертик} \\ \angle GDF = \angle FBC = 90°\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle GDF \sim \triangle CBF$ - по 2-м углам $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{GD}{BC}\right)^2 = \left(\frac{GF}{CF}\right)^2 = \left(\frac{FD}{BF}\right)^2 = \frac{S_{GDF}}{S_{BFC}} = \frac{1}{25} \Rightarrow \frac{BF}{FD} = \frac{5}{1} \Rightarrow BF = 5FD$; $\frac{GD}{CB} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5GD = BC$.

Пусть: $FD = x \Rightarrow FB = 5x$; $GD = y \Rightarrow BC = 5y$!

~~ВG~~ $DB = FD + FB = 6x$; $DB + DA = 2DB = AB \Rightarrow AB = 12x$, $FA = FD + DA = 7x$.

$DE = \frac{1}{2}BC = \frac{5y}{2} \Rightarrow GE = GD + DE = \frac{7y}{2}$.

$\triangle ABC$: $\frac{BC}{AC} = \frac{BF}{FA}$ - по св-ву бисс. $(CF) \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$.

$AC = \frac{7}{5}BC \Rightarrow AC = \frac{7}{5} \cdot 5y = 7y$.

~~Пусть~~ $\cos\angle BCA = \frac{BC}{CA} = \frac{5}{7} \Rightarrow \angle BCA = \arccos\left(\frac{5}{7}\right)$.

$\angle BAC = 180° - \angle BCA - \angle CBA = 90° - \arccos\left(\frac{5}{7}\right) \Rightarrow \angle BAC = \arcsin\left(\frac{5}{7}\right)$

Ответ: $\angle ABC = 90°$; $\angle BAC = \arcsin\left(\frac{5}{7}\right)$; $\angle BCA = \arccos\left(\frac{5}{7}\right)$.

$y = -x^5 + ax$
$y = 2x.$

Заметим, что диагонали квадрата перпендикулярны =>

=> ~~…~~ прямая, содержащая в себе II диагональ должна быть $\perp y = 2x$

=> эта прямая задается функцией $y = -\frac{1}{2}x$, т.к ~~…~~ по условию проходит через $O(0;0)$.

Пусть $ABCD$ – искомый квадрат => $A, B, C, D \in y = -x^5 + ax$;

$A, C \in y = 2x$; $B, D \in y = -\frac{1}{2}x$.

1) $-x^5 + ax = 2x \Rightarrow x^5 + x(2-a) = 0$
$x(x^4 + 2 - a) = 0.$

x имеет хотя бы 2 значения => $2 - a \le 0 \Rightarrow a \ge 2. \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \{0; \sqrt[4]{a-2}; -\sqrt[4]{a-2}\}$, но $x \ne 0$, т.к $A \ne C.$ =>

$\Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{a-2}.$

2) $-x^5 + ax = -\frac{1}{2}x \Rightarrow 2x^5 - 2ax - x = 0$
$2x(x^4 - (a + \frac{1}{2})) = 0$

x имеет хотя бы 2 значения => $a + \frac{1}{2} \ge 0 \Rightarrow a \ge -\frac{1}{2}. \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \{0; \sqrt[4]{a+\frac{1}{2}}; -\sqrt[4]{a+\frac{1}{2}}\}$, но $x \ne 0$, т.к $B \ne D$.

Итого: $a \in [2; +\infty)$

Пусть $A(\sqrt[4]{a-2}; y_A)$, $B(\sqrt[4]{a+\frac{1}{2}}; y_B)$ => $AB = \sqrt{(\sqrt[4]{a-2} - \sqrt[4]{a+\frac{1}{2}}) + (y_A - y_B)^2}$.

$y_A = 2\sqrt[4]{a-2}$
$y_B = -\frac{1}{2}\sqrt[4]{a+\frac{1}{2}}$ => Пусть $\sqrt[4]{a-2} = t$; $\sqrt[4]{a+\frac{1}{2}} = d$ =>

$\Rightarrow AB = \sqrt{(t-d)^2 + (2t - \frac{1}{2}d)^2} = \sqrt{5t^2 - 3td + \frac{5}{4}d^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \sqrt{5\sqrt{a-2} - 3\sqrt[4]{a^2 - \frac{3}{2}a - 1} + \frac{5}{4}\sqrt{a+\frac{1}{2}}}$

Ответ: сторона равна: $\sqrt{5 + \sqrt{a-2} - 3\sqrt[4]{a^2 - \frac{3}{2}a - 1} + \frac{5}{4}\sqrt{a+1}}$; при $a \in [2; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a} \Rightarrow a,b,c\neq 0$

$$\begin{cases} a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c} & |\cdot(bc) \\ a+\frac{7}{b}=c+\frac{7}{a} & |\cdot(ab) \\ b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a} & |\cdot(ac) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} abc+7c=b^2c+7b & (1) \\ a^2b+7a=abc+7b. & (2) \\ abc+7a=ac^2+7c. & (3) \end{cases}$$

$(1)-(2)+(3):\ 3abc+7a+7b+7c=a^2b+b^2c+c^2a+7a+7b+7c$

$$3abc=a^2b+b^2c+c^2a.$$

Если $a>0,\ b>0,\ c>0$, то $\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3}\geqslant\sqrt[3]{a^2b\cdot b^2c\cdot c^2a}=abc \Rightarrow a^2b+b^2c+c^2a\geqslant 3abc$. Равенство достигается, когда $a=b=c$, но это противоречит условию.

Значит $\exists$ число, которое ~~меньше~~ не больше 0, но $a,b,c\neq 0 \Rightarrow \exists$ число меньше 0.

Поскольку мы хотим, чтоб abc было максимальным, нужно, чтоб: 2 числа были <0 и одно >0.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1 $\underbrace{|x^3-9|}_{a}+\underbrace{|x^2-1|}_{b}\le\underbrace{|x^3-x^2-8|}_{a-b}$

$-2-3+1=-7$ $\quad$ $x=2$.

$|a|+|b|\le|a-b|$. $\qquad$ $|8-9|+|4-1|\le|8-4-8|$

1) $a\ge b\ge 0 \Rightarrow a+b\le a-b$. $\qquad$ $\underline{1+3\le 4}$

$2b\le 0$ $\varnothing$.

2) $b\ge a\ge 0 \Rightarrow a+b\le b-a \Rightarrow 2a\le 0 \Rightarrow \varnothing$

$\boxed{3)}$ $a\ge 0,\ b\le 0 \Rightarrow a-b\le a-b$. – верно $\qquad$ $x=-2$

$\boxed{4)}$ $a\le 0,\ b\ge 0 \Rightarrow -a+b\le b-a \Rightarrow 0\le 0$ – верно $\qquad$ $|-8-9|+|4-1|\le$

5) $a\le b\le 0 \Rightarrow -a-b\le b-a \Rightarrow -2b\le 0 \Rightarrow b\ge 0$ $\varnothing$ $\qquad$ $\le|-8-4-8|$

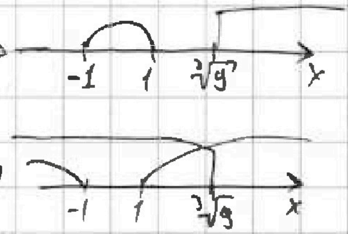
6) $b\le a\le 0 \Rightarrow$ $-a+b\le a-b \Rightarrow -2a\le 0 \Rightarrow a\ge 0$ $\varnothing$ $\qquad$ $+17+3\le 20$ – верно.

b a 0
(-3) (-1)

Итого: 3 и 4, т.е.
$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} x^3-9\ge 0 \Rightarrow x\ge\sqrt[3]{9}\ge 1\\ x^2-1\le 0 \Rightarrow x\in[-1;1]\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} x^3-9\le 0 \Rightarrow x\in(-\infty;\sqrt[3]{9}]\\ x^2-1\ge 0 \Rightarrow x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$125-9+24\le 125-25-8$

$121-9=~~112~~$ 92 $\quad$ 100



Итого: $x\in(-\infty;-1]\cup[1;\sqrt[3]{9}]$.

№2.

$a, b, c\in\mathbb{N}$.

$a;\ aq;\ aq^2$
b $\quad$ c.

$abc=a^3q^3=5^{360}\cdot 7^{90} \Rightarrow aq=5^{120}\cdot 7^{30}$.

$q\ge 1$

$\underline{27+4+8\le +27+9+8}$

для a: $5^{121}\cdot 7^{31}$ возможностей.

$5^0, 5^1, 5^2\ldots$ $\quad$ $7^0, 7^1, 7^2\ldots$

$$\begin{array}{r} \times\ 121\\ 31\\ \hline 121\\ 363\\ \hline 3751\end{array}$$

$5^3\cdot 7^2=aq \Rightarrow abc=(aq)^3=5^9\cdot 7^6$.

Пример:

a		q
$a=5^0 7^0$	$\to$	$5^3 7^2$
$5^1 7^0$	$\to$	$5^2 7^2$
$5^2 7^0$	$\to$	$5^1 7^2$
$5^3 7^0$	$\to$	$5^0 7^2$

a		q
$5^0 7^1$	$\to$	$5^3 7^1$
$5^1 7^1$	$\to$	$5^2 7^1$
$5^2 7^1$	$\to$	$5^1 7^1$
$5^3 7^1$	$\to$	$5^0 7^1$

a		q
$5^0 7^2$	$\to$	$5^3 7^0$
$5^1 7^2$	$\to$	$5^2 7^0$
$5^2 7^2$	$\to$	$5^1 7^0$
$5^3 7^2$	$\to$	$5^0 7^0$

aq^2
$5^6 7^4$
$5^5 7^4$
$5^4 7^4$
$5^3 7^4$

aq^2
$5^6 7^3$
$5^5 7^3$
$5^4 7^3$
$5^3 7^3$

aq^2
$5^6 7^2$
$5^5 7^2$
$5^4 7^2$
$5^3 7^2$

$abc=5^0 7^0\cdot 5^3 7^2\cdot 5^6 7^4=5^9 7^6$
$5^1 7^0\cdot 5^3 7^2\cdot 5^5 7^4=5^9 7^6$
$5^2 7^0\cdot 5^3 7^2\cdot 5^4 7^4=5^9 7^6$
$5^3 7^0\cdot 5^3 7^2\cdot 5^3 7^4=5^9 7^6$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}$ | abc не все равны м/у собой. найти $\max(abc)$

$$\begin{cases} a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c} & |bc \Rightarrow abc+7c=bc^2+7b \\ b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a} & |ac \Rightarrow abc+7a=7c+ac^2 \end{cases} \Rightarrow 7(c-a)=7(b-c)+c(b^2-ac)$$

$7(2c-a-b)=c(b^2-ac)$.

$\frac{ab+7}{b}=\frac{bc+7}{c}=\frac{ac+7}{a}$

$a^2bc+7ac=ab^2c+7ab=abc^2+7bc$.

$abc+7c=b^2c+7b$.
$a^2b+7a=abc+7b$.
$abc+7c-7a-a^2b=b^2c-abc$
$2abc=7(a-c)+b^2c+a^2b$

$$\begin{cases} abc(a-b)=7a(b-c) \\ abc(a-c)=7c(a-b) \end{cases}$$

$abc(2a-b-c)=7(ab-bc+ac-bc)=7b(a-c)$.

$1+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+1$.

Чтоб: б.о.о. $a\geq b\geq c \Rightarrow ab\geq ac\geq bc$. $ab+7\geq ac+7\geq bc+7$. $a\geq b\geq c \Rightarrow \frac{1}{a}\leq\frac{1}{b}\leq\frac{1}{c}$.

$c=\frac{7}{b} \Rightarrow$

$\Rightarrow b+\frac{7}{b}=1+\frac{7}{b}\Rightarrow$

---

1 и 2: $abc+7c=b^2c+7b$.
2 и 3: $abc+7a=c^2a+7c$
1 и 3: $abc+7b=a^2b+7a$
$3abc+7(a+b+c)=7(a+b+c)+b^2c+a^2b+c^2a$.
$3abc=b^2c+a^2b+c^2a$ $\Rightarrow (b^2c-abc)+(a^2b-abc)+c^2a-abc=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6abc=(b^2c+a^2b)+(b^2c+c^2a)+(a^2b+c^2a)=$
$=b(a^2+bc)+c(b^2+ac)+a(c^2+ab)$
$0=b(a^2+bc-2ac)+c(b^2+ac-2ab)+a(c^2+ab-2bc)$

Значит $a^2b+b^2c+c^2a$ — max. $\Rightarrow$ если $a<0 \Rightarrow$ не max.

$a,b,c\geq 0$

$3=\frac{abc}{abc}$ $3=\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}$ $\Rightarrow\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$

$a^2b+b^2c+c^2a\geq 3\sqrt[3]{a^2b\cdot b^2c\cdot c^2a}=3\cdot abc$

Но они равны $\Rightarrow a=b=c$, либо:

$a+\frac{7}{a}=a+\frac{7}{c}\neq c+\frac{7}{a}$

$a=b\Rightarrow a=b=c$

$3abc=a^2b+b^2c+c^2a$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x^2(y-3)+x(11y-34)+32y-101=0$

$x^2y-3x^2+11xy-34x+32y-101=0$

$\cancel{y(x^2+11x+32)}-(3x^2+34x+101)=0$

2) $y\neq 3$: $D=(11y-34)^2-4(32y-101)(y-3)=0$

1) $y-3=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow 0-x+32\cdot 3-101=0$

$\boxed{x=-5}$

$121y^2-34\cdot 11\cdot 2y-4(32y^2-32\cdot 3y-101y+303)=$

$=121y^2-34\cdot 11\cdot 2y-128y^2+4\cdot 197y-303\cdot 4=-7y^2-748y+788y+1156-1212=$

$200\cdot 4-3\cdot 4=800-12=788$

$=-7y^2+40y-56$

$7y^2-40y+56\leq 0$

$D_1 = 20^2-56\cdot 7=4(100-14)$ 86

$y_{1/2}=\dfrac{20\pm 2\sqrt{86}}{7}$

$1<\dfrac{20-2\sqrt{86}}{7}$

$7<20-2\sqrt{86}$

$2\sqrt{86}<13$

$86<\dfrac{169}{4}=42{,}25$

$\leq \dfrac{20+2\sqrt{86}}{7}<7$

$21<20+2\sqrt{86}<49$

$1<2\sqrt{86}<29$

$20+2\sqrt{86}<42$

$2\sqrt{86}<22$

$\sqrt{86}<11$ — верно

$0<\dfrac{20-2\sqrt{86}}{7}\in(0;1)<1$

$20+2\sqrt{86}<35$

$y\in[1;5]$

$y=1 \Rightarrow -2x^2+x(34-11)+32-101=0$

$-2x^2+23x-69=0$

$2x^2-23x+69=0$

$D=23^2-69\cdot 2\cdot 4=23(23-3\cdot 2\cdot 4)=-23$ $\varnothing$

$y=2 \Rightarrow -x^2+x(\underbrace{34-22}_{12})+64-101=0$

$-x^2+12x-37=0$

$x^2-12x+37=0 = (x-6)^2+1>0$

$D=36-37=-1<0$ $\varnothing$

$y=5 \Rightarrow 2x^2-21x+160-101=0$

$2x^2-21x+59=0$

$D=21^2-4\cdot 2\cdot 59=441-472<0$

$55-34=21$

$y=4 \Rightarrow x^2-10x+128-101=0$

$x^2-10x+27=0$

$(x-5)^2+2=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$D = (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101)$

$(11y-34)^2 = 121y^2 - 22\cdot 34y + 34^2 = 121y^2 - 748y + 1156.$

$34 \times 22 = 68,\ 68 \to 748$; $34 \times 34 = 136,\ 102 \to 1156$; $197 \times 4 = 788$

$4(y-3)(32y-101) = 4(32y^2 - 101y - 96y + 303) = 4(32y^2 - 197y + 303) =$
$= 128y^2 - 788y + 1212$

Итого: $D = 121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 788y - 1212 = -7y^2 + 40y - 56 \geq 0.$

$1212 - 1156 = 56$

$7y^2 - 40y + 56 \leq 0.$

$D_1 = 20^2 - 56\cdot 7 = 400 - 392 = 8.$

$56 \times 7 = 392$

$y = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$

(+) $1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow 2 < 2\sqrt{2} < 4 \Rightarrow 22 < 20 + 2\sqrt{2} < 24 \Rightarrow 3 = \frac{21}{7} < \frac{20+2\sqrt{2}}{7} < \frac{28}{7} = 4$

Итого <4

(−) $-4 < -2\sqrt{2} < -2$

$16 < 20 - 2\sqrt{2} < 18$

$2 = \frac{14}{7} < \frac{20-2\sqrt{2}}{7} < \frac{21}{7}$

Итого: $\boxed{y=3}$

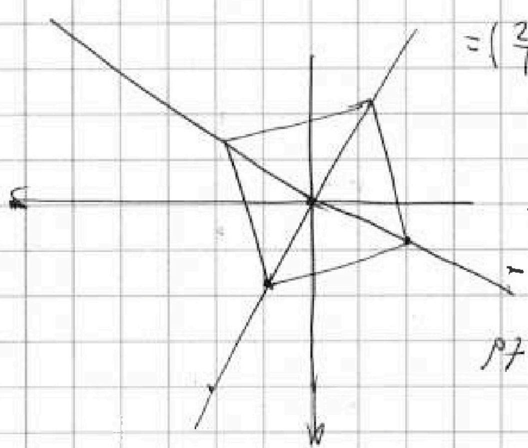
$y = -x^5 + 2ax$ — координаты вершин.

$y = 2x$ — диагональ $\Rightarrow$ II диагональ: $y = -\frac{1}{2}x$

Пересечения: $2x = -x^5 + 2a$ и $-\frac{1}{2}x = -x^5 + 2a$.

$x^5 = x(x^4 \ldots x)$

$a: \ldots > 0, \geq 0, \geq 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

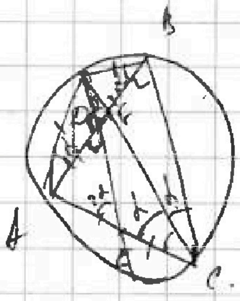
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

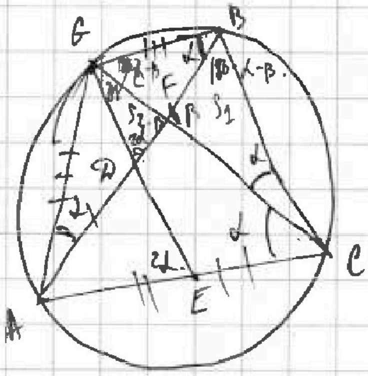
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

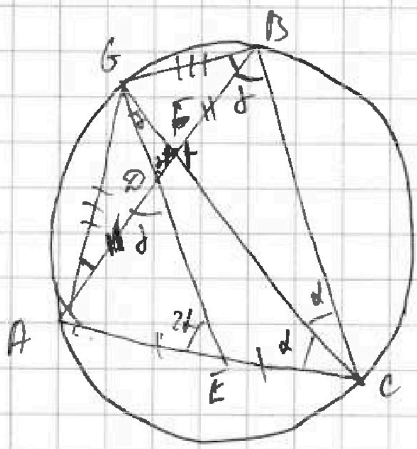
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено **ни одной** задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$S_{BFC} = 25 S_{DGF}$



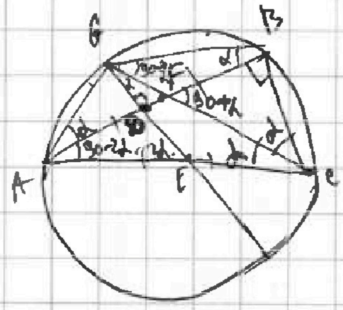


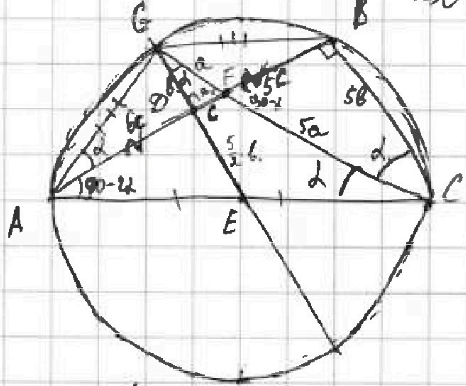
$\triangle GFD \sim \triangle BCF$

$\cancel{\frac{DF}{AC}}$ $\frac{DF}{CF} = \frac{DG}{BF} = \frac{GF}{BC} = \frac{1}{5}$

$AD = DB \Rightarrow \angle \gamma = 90^\circ$

$GD = 6b \Rightarrow GE = \frac{7}{2} b$





$\frac{BF}{FA} = \frac{bc}{AC} = \frac{5}{7} \Rightarrow$ $BC = 5b \Rightarrow \underline{AC = 7b}$

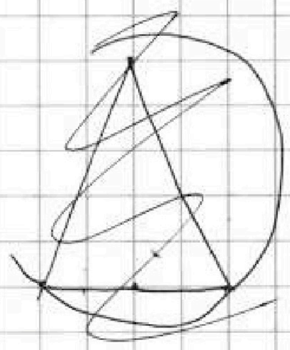
$\cos \angle C = \frac{5}{7}$

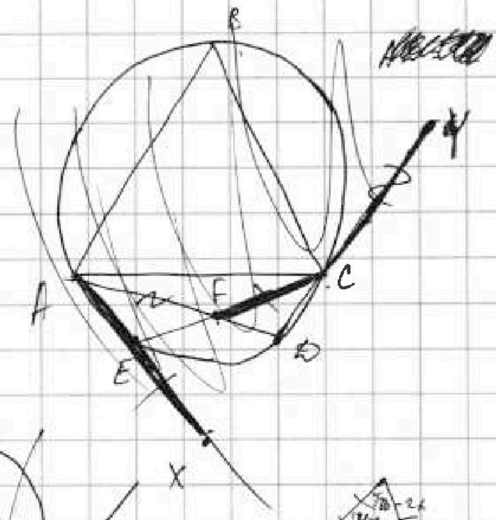
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

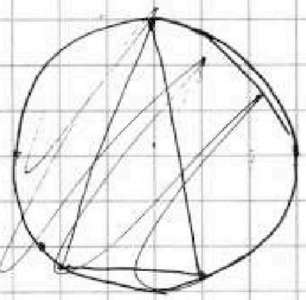
1 2 3 4 5 6 7

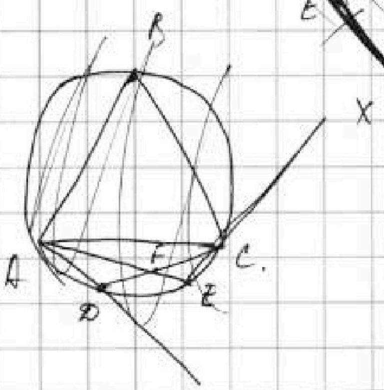
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

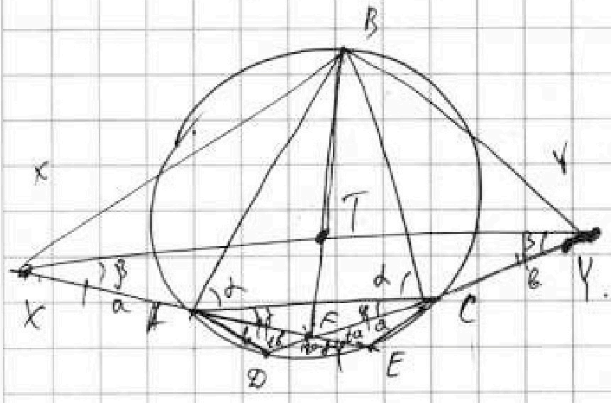
6 7











$\boxed{\int BXFY - ?}$ $XY = 36$

$BF = 14$

$XF = FY$

$\angle AFC = \dfrac{\breve{DE} + \breve{AC}}{2}$

$\breve{DE} = \breve{AC} - \breve{AD} - \breve{EC} =$

$= \cancel{180 - 2\alpha}$

$\angle AFC = \dfrac{180 - 2\alpha - \varphi - \gamma + 180 + 2\alpha}{2} = 180 - \gamma - \varphi$

$FEC \sim \Delta FDA;\ \dfrac{AF}{FC} = \dfrac{FD}{FE} = \dfrac{1}{a}$