



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $5^{360} \cdot 7^{90}$ ?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $CF$  – биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $ED$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что площадь треугольника  $BCF$  в 25 раз больше площади треугольника  $DGF$ .
5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = -x^5 + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = 2x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения  $abc$ .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность  $\omega$ , а на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , взяты точки  $E$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . На лучах  $EA$  и  $DC$  отметили точки  $X$  и  $Y$  соответственно таким образом, что  $AX = CF$  и  $CY = AF$ . Найдите площадь четырёхугольника  $BXFY$ , если  $BF = 19$ ,  $XY = 36$ .

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$

Пусть  $x^3 - 9 = a$ ;  $x^2 - 1 = b$ .  $\Rightarrow x^3 - x^2 - 8 = (x^3 - 9) - (x^2 - 1) = a - b$ .

Чтоо:  $|a| + |b| \leq |a - b|$ . Обозначим это выражение (X).

Рассмотрим возможные случаи расположения чисел  $a$  и  $b$  на числовой оси:

1)  $a \geq b \geq 0 \Rightarrow (X): a + b \leq a - b \Rightarrow 2b \leq 0 \Rightarrow b \leq 0 \Rightarrow b = 0, a \geq 0$

2)  $b \geq a \geq 0 \Rightarrow (X): a + b \leq b - a \Rightarrow a \leq 0 \Rightarrow a = 0, b \geq 0$

3)  $a \geq 0, b \leq 0 \Rightarrow (X): a - b \leq a + b \Rightarrow -b \leq b \Rightarrow b \geq 0, a \geq 0$ . Верно при  $a \geq 0, b \leq 0$

4)  $a \leq 0, b \geq 0 \Rightarrow (X): -a + b \leq -a - b \Rightarrow b \leq -b \Rightarrow b \leq 0, a \leq 0$ . Верно при  $a \leq 0, b \geq 0$

5)  $a \leq b \leq 0 \Rightarrow -a - b \leq b - a \Rightarrow 2b \geq 0 \Rightarrow b = 0, a \leq 0$

6)  $b \leq a \leq 0 \Rightarrow -a - b \leq a - b \Rightarrow 2a \geq 0 \Rightarrow a \geq 0, b \leq 0$

Чтоо, разобраны все возможные случаи расположения чисел  $a, b$  на числовой оси.

~~Чтоо~~  $a = 0 \Rightarrow x^3 - 9 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$

$b = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x \in \{-1; 1\}$

$a \geq 0 \Rightarrow x^3 - 9 \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 9 \Rightarrow x \in [\sqrt[3]{9}; +\infty)$

$a < 0 \Rightarrow x^3 - 9 < 0 \Rightarrow x^3 < 9 \Rightarrow x \in (-\infty; \sqrt[3]{9})$

$b > 0 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$b < 0 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow x \in (-1; 1)$

1)  $b = 0 \vee a \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{9} \\ x = 1 \\ x \in [\sqrt[3]{9}; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$

2)  $\begin{cases} a = 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{9} \\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$

3)  $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [\sqrt[3]{9}; +\infty) \\ x \in [-1; 1] \end{cases} \Rightarrow \text{[Diagram showing intervals on a number line]} \Rightarrow x \in \emptyset$

4)  $\begin{cases} a \leq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; \sqrt[3]{9}] \\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow \text{[Diagram showing intervals on a number line]} \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$

5)  $\begin{cases} b = 0 \\ a \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x \in (-\infty; \sqrt[3]{9}) \end{cases} \Rightarrow x \in \{-1; 1\}$

6)  $\begin{cases} a = 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{9} \\ x \in [-1; 1] \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$

Чтоо:  $\begin{cases} x = \sqrt[3]{9} \\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}] \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$

ОТВЕТ:  $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$b = a \cdot q$$

$$c = a \cdot q^2, \text{ где } q \in \mathbb{N}, \text{ т.к. } \frac{a \cdot q \in \mathbb{N}}{\in \mathbb{N}} = \frac{b}{\in \mathbb{N}}.$$

Значит  $a \cdot (aq) \cdot (aq^2) = (aq)^3 = 5^{360} \cdot 7^{90} \Rightarrow a \cdot q = 5^{120} \cdot 7^{30}$ . Получается,  
нужно рассмотреть всевозможные  $a$  и  $q$ . Поскольку  $a \cdot q = 5^{120} \cdot 7^{30}$ , то  
числа  $a$  и  $q$  при разложении на простые множители  
должны иметь вид  $(5^d \cdot 7^p)$ , где  $0 \leq d \leq 120, 0 \leq p \leq 30$ .

$$\text{Пусть } a = 5^{d_1} \cdot 7^{p_1}; q = 5^{d_2} \cdot 7^{p_2} \Rightarrow \begin{cases} d_1 + d_2 = 120 \\ p_1 + p_2 = 30 \end{cases}, \begin{matrix} d_i, p_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ d_i \leq 120, p_j \leq 30 \\ \text{где } \forall i \in \{1, 2\} \\ \text{где } \forall j \in \{1, 2\}. \end{matrix}$$

$$d_2 = -d_1 + 120. \text{ При } d_1 \in [0; 120]: d_2 \in [0; 120]$$
$$p_2 = -p_1 + 30. \text{ При } p_1 \in [0; 30]: p_2 \in [0; 30].$$

Чтоо вариантов  $d_1$  может 121, вариантов  $p_1$  31.

Значит вариантов числа  $a$  - (121 \* 31) штук, причем  
каждому  $a$  соответствует единств. значение  $q$ , то есть  
каждому  $a$  соответствует лишь одна пара  $(a, b, c)$ .

$$121 \cdot 31 = 3751.$$

Ответ: 3751

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y \in \mathbb{Z}.$$

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0.$$

$$\text{I) } y=3 \Rightarrow 0 + x + 96 - 101 = 0 \\ x = 5.$$

$$\text{II) } y \neq 3 \Rightarrow D = (11y-34)^2 - 4(32y-101)(y-3) =$$

$$= (121y^2 - 748y + 1156) - (128y^2 - 788y + 1212) = -7y^2 + 40y - 56.$$

$$\text{Чтоб существовал } x, \text{ нужно чтоб } D \geq 0, \Rightarrow -7y^2 + 40y - 56 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7y^2 - 40y + 56 \leq 0.$$

$$7y^2 - 40y + 56 = 0 \Rightarrow D_1 = 20^2 - 7 \cdot 56 = 400 - 392 = 8$$

$$y_{1,2} = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}. \quad 1) \text{ Заметим, что } \frac{20-2\sqrt{2}}{7} < 2, \text{ т.к.}$$

$$20 - 2\sqrt{2} > 14$$

$$\text{и } 6 > 2\sqrt{2}$$

$$3 > 2\sqrt{2} \text{ — верно}$$

$$9 > 8 \text{ — верно} \Rightarrow \frac{20-2\sqrt{2}}{7} > 2.$$

$$2) \frac{20+2\sqrt{2}}{7} < 4, \text{ т.к. } 20+2\sqrt{2} < 28$$

$$2\sqrt{2} < 8$$

$$\sqrt{2} < 4$$

$$2 < 16 \text{ — верно} \Rightarrow \frac{20+2\sqrt{2}}{7} < 4.$$

$$7y^2 - 40y + 56 \leq 0 \Rightarrow y \in \left[ \frac{20-2\sqrt{2}}{7}; \frac{20+2\sqrt{2}}{7} \right], \text{ причём по доказательству:}$$

(II)

$$2 < y < 4. \quad y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = 3, \text{ но вначале мы показали, что } y \neq 3. \\ \text{Противоречие.}$$

$$\text{Ответ: } (5; 3).$$



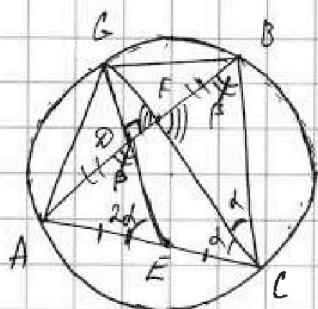
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Доано:  $\triangle ABC$

$\omega(O, R)$ ;  $A, B, C \in \omega$ .

$D \in AB$ ,  $E \in AC$

$EA = EC$ .

$CF$  — медиана  $\triangle ABC$ ,  $F \in AB$

$CF \cap \omega = G$ .

$ED \cap \omega = G$ .

$S_{BCF} = 25 \cdot S_{GFD}$ .

Найти:  $\angle A, \angle B, \angle C$ .

Решение:

$\angle ACB = \angle BCG$  — по угл.  $\Rightarrow AG = GB \Rightarrow AG = BG$ .

$C, A, B, G \in \omega$  — по угл.

$\triangle ABG$ :  $AG = BG \Rightarrow \triangle ABG$  — равноб.  $\Rightarrow GD$  — высота  $\triangle ABG \Rightarrow \angle GDF = 90^\circ$ .

$AD = DB \Rightarrow GD$  — медиана.

$\triangle ABC$ :  $DA = DB$ ,  $EA = EC$   $\Rightarrow DE$  — средняя линия  $\Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow \angle ADE = \angle ABC$  — соответств.  
 $DE = \frac{1}{2} BC$ .

$\angle ADE = \angle GDF$  — верт  $\Rightarrow \angle ADE = 90^\circ \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$ .

$\triangle GDF$  и  $\triangle CBF$ :  $\angle BFC = \angle GFD$  — верт  $\Rightarrow \triangle GDF \sim \triangle CBF$  — по 2-м углам  $\Rightarrow$   
 $\angle GDF = \angle FBC = 90^\circ$   
 $\Rightarrow \left(\frac{GD}{BC}\right)^2 = \left(\frac{GF}{CF}\right)^2 = \left(\frac{FD}{BF}\right)^2 = \frac{S_{GDF}}{S_{BCF}} = \frac{1}{25} \Rightarrow \frac{BF}{FD} = \frac{5}{1} \Rightarrow BF = 5FD$ ;  $\frac{GD}{CB} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5GD = BC$ .

Пусть:  $FD = x \Rightarrow FB = 5x$ ;  $GD = y \Rightarrow BC = 5y$ .

$DB = FD + FB = 6x$ ;  $DB + DA = 2DB = AB \Rightarrow AB = 12x$ ;  $FA = FD + DA = x + 6x = 7x$ .

$DE = \frac{1}{2} BC = \frac{5y}{2} \Rightarrow GE = GD + DE = \frac{7y}{2}$ .

$\triangle ABC$ :  $\frac{BC}{AC} = \frac{BF}{FA}$  — по сб-ты Сим. (CF)  $\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$ .

$AC = \frac{7}{5} BC \Rightarrow AC = \frac{7}{5} \cdot 5y = 7y$ .

$\cos \angle BCA = \frac{BC}{CA} = \frac{5}{7} \Rightarrow \angle BCA = \arccos\left(\frac{5}{7}\right)$ .

$\angle BAC = 180^\circ - \angle BCA - \angle CBA = 90^\circ - \arccos\left(\frac{5}{7}\right) \Rightarrow \angle BAC = \arcsin\left(\frac{5}{7}\right)$ .

Ответ:  $\angle ABC = 90^\circ$ ;  $\angle BAC = \arcsin\left(\frac{5}{7}\right)$ ;  $\angle BCA = \arccos\left(\frac{5}{7}\right)$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = -x^5 + ax$$

$$y = 2x$$

Заметим, что диагонали квадрата перпендикулярны  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  прямая, содержащая в себе и диагональ должна быть  $l: y = 2x$

$\Rightarrow$  эта прямая задается функцией  $y = -\frac{1}{2}x$ , т.к. ~~еще~~ но очевидно проходит через  $O(0; 0)$ .

Пусть  $ABCD$  - искомым квадрат  $\Rightarrow A, B, C, D \in y = -x^5 + ax$ ;

$$A, C \in y = 2x; \quad B, D \in y = -\frac{1}{2}x$$

$$1) -x^5 + ax = 2x \Rightarrow x^5 + x(2-a) = 0$$

$$x(x^4 + 2 - a) = 0$$

$x$  имеет хотя бы 2 значения  $\Rightarrow 2 - a \leq 0 \Rightarrow a \geq 2, \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \in \{0; \sqrt[4]{a-2}; -\sqrt[4]{a-2}\}, \text{ но } x \neq 0, \text{ т.к. } A \neq C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{a-2}$$

$$2) -x^5 + ax = -\frac{1}{2}x \Rightarrow 2x^5 - 2ax - x = 0$$

$$2x(x^4 - (a + \frac{1}{2})) = 0$$

$x$  имеет хотя бы 2 значения  $\Rightarrow a + \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow a \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \in \{0; \sqrt[4]{a+\frac{1}{2}}; -\sqrt[4]{a+\frac{1}{2}}\}, \text{ но } x \neq 0, \text{ т.к. } B \neq D$$

Итого: ~~а  $\in [2; +\infty)$~~   $a \in [2; +\infty)$

$$\text{Пусть } A(\sqrt[4]{a-2}; y_A) \Rightarrow AB = \sqrt{(\sqrt[4]{a-2} - \sqrt[4]{a+\frac{1}{2}})^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$B(\sqrt[4]{a+\frac{1}{2}}; y_B)$$

$$y_A = 2\sqrt[4]{a-2}$$

$$y_B = -\frac{1}{2}\sqrt[4]{a+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \text{Пусть } \sqrt[4]{a-2} = t; \sqrt[4]{a+\frac{1}{2}} = d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(t-d)^2 + (2t - \frac{1}{2}d)^2} = \sqrt{5t^2 - 3td + \frac{5}{4}d^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{5\sqrt{a-2} - 3\sqrt{a^2 - \frac{3}{2}a - 1} + \frac{5}{4}\sqrt{a+\frac{1}{2}}}$$

Ответ: сторона квадрата:  $\sqrt{5\sqrt{a-2} - 3\sqrt{a^2 - \frac{3}{2}a - 1} + \frac{5}{4}\sqrt{a+\frac{1}{2}}}$ ; при  $a \in [2; +\infty)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} \quad \Rightarrow \quad a, b, c \neq 0$$

$$\begin{cases} a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} & | \cdot (bc) \\ a + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} & | \cdot (ac) \\ b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} & | \cdot (ac) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} abc + 7c = b^2c + 7b & (1) \\ a^2b + 7a = abc + 7b & (2) \\ abc + 7a = ac^2 + 7c & (3) \end{cases}$$

$$(1) - (2) + (3) : 3abc + 7a + 7b + 7c = a^2b + b^2c + c^2a + 7a + 7b + 7c$$

$$3abc = a^2b + b^2c + c^2a$$

или  $a > 0, b > 0, c > 0$ , то  $\sqrt[3]{a^2b + b^2c + c^2a} \geq \sqrt[3]{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a} = abc \Rightarrow$   
 $\Rightarrow a^2b + b^2c + c^2a \geq 3abc$ . Равенство достигается, когда  $a=b=c$ , но это  
противоречит условию.

Значит  $\exists$  число, которое ~~меньше~~ <sup>не больше</sup> 0, но  $a, b, c \neq 0 \Rightarrow \exists$  число  
меньше 0.

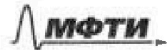
Почему мы хотим, чтоб  $abc$  было максимумом,  
нужно, чтоб: 2 числа были  $< 0$  и одно  $> 0$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{|x^2-9|} + \sqrt{|x^2-1|} \leq \sqrt{|x^2-x^2-8|}$$

$$-3+1=-2 \quad \frac{-1}{a} \frac{1}{b} \frac{1}{0} \rightarrow x=2$$

$$|a|+|b| \leq |a-b|$$

$$|8-9|+|1-1| \leq |8-4-9|$$

$$1+3 \leq 4$$

$$1+3 \leq 4$$

2)  $b > a > 0 \Rightarrow a-b \leq b-a \rightarrow 2a \leq 0 \Rightarrow \emptyset$

$$2b \leq 0 \Rightarrow \emptyset$$

3)  $a > 0, b \leq 0 \Rightarrow a-b \leq a-b$  - верно

$$x=2$$

4)  $a \leq 0, b > 0 \Rightarrow -a+b \leq b-a \Rightarrow 0 \leq 0$  - верно

$$|8-9|+|4-1| \leq |8-4-9|$$

$$\leq |8-4-9|$$

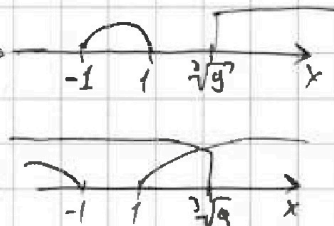
5)  $a \leq b \leq 0 \Rightarrow -a-b \leq b-a \Rightarrow -2b \leq 0 \Rightarrow b \geq 0 \Rightarrow \emptyset$

$$|1+3| \leq |20|$$
 - верно.

6)  $b \leq a \leq 0 \Rightarrow -a+b \leq a-b \Rightarrow -2a \leq 0 \Rightarrow a \geq 0 \Rightarrow \emptyset$

Уточ: 3 и 4, 7. E  
 $125-9+24 < 125-25$   
 $121-9-24 < 100$

$$\left\{ \begin{aligned} x^2-9 > 0 &\Rightarrow x > \sqrt[3]{9} \geq 1 \\ x^2-1 < 0 &\Rightarrow x \in [-1; 1] \\ x^2-9 < 0 &\Rightarrow x \in (-\infty; \sqrt[3]{9}] \\ x^2-1 > 0 &\Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



н.р. a, b, c ∈ N.

Уточ:  $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$ .

a; aq; aq^2

$$abc = a^3 q^3 = 5^{360} \cdot 7^{90} \Rightarrow aq = 5^{120} \cdot 7^{30}$$

$$q \geq 1$$

$$27+27+8 \leq 27+9+8$$

гла a:  $5^{120} \cdot 7^{30}$  возможности.  
 $0,5, 5^2, \dots, 5^6, 4, 4^2, \dots$

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times 31 \\ \hline 121 \\ 363 \\ \hline 3751 \end{array}$$

Пример:  $5^3 \cdot 7^2 = aq^2 \Rightarrow aq^2 = 121 = 11^2 = 5^0 \cdot 7^0$

a	q
$5^0 \cdot 7^2 \Rightarrow 5^0 \cdot 7^2$	$5^0 \cdot 7^0 \Rightarrow 5^3 \cdot 7^1$
$5^1 \cdot 7^2 \Rightarrow 5^2 \cdot 7^2$	$5^1 \cdot 7^1 \Rightarrow 5^2 \cdot 7^1$
$5^2 \cdot 7^2 \Rightarrow 5^1 \cdot 7^2$	$5^2 \cdot 7^1 \Rightarrow 5^1 \cdot 7^2$
$5^3 \cdot 7^2 \Rightarrow 5^0 \cdot 7^2$	$5^3 \cdot 7^1 \Rightarrow 5^0 \cdot 7^2$

q	q
$5^0 \cdot 7^0 \Rightarrow 5^3 \cdot 7^1$	$5^0 \cdot 7^0$
$5^1 \cdot 7^0 \Rightarrow 5^2 \cdot 7^1$	$5^1 \cdot 7^0$
$5^2 \cdot 7^0 \Rightarrow 5^1 \cdot 7^1$	$5^2 \cdot 7^0$
$5^3 \cdot 7^0 \Rightarrow 5^0 \cdot 7^1$	$5^3 \cdot 7^0$

$$ab = 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^2 \cdot 7^4 = 5^{13} \cdot 7^4$$

$$5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^{12}$$

$$5^4 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^8$$

$$5^4 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^8$$

aq^2
$5^3 \cdot 7^3$
$5^5 \cdot 7^3$
$5^7 \cdot 7^3$
$5^9 \cdot 7^3$
$5^{11} \cdot 7^3$

aq^2
$5^6 \cdot 7^2$
$5^5 \cdot 7^2$
$5^4 \cdot 7^2$
$5^3 \cdot 7^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a}$  |  $a, b, c$  не все равны |  $\max(abc)$

$\left\{ \begin{aligned} a + \frac{4}{b} &= b + \frac{4}{c} \\ b + \frac{4}{c} &= c + \frac{4}{a} \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} |b| \Rightarrow abc + 4c &= bc^2 + 4b \\ |ac| \Rightarrow abc + 4a &= 4c + ac^2 \end{aligned} \right. \Rightarrow 4(c-a) = 4(b-c) + c(b^2-ac)$

$4(2c-a-b) = c(b^2-ac)$

$\frac{abc+4}{b} = \frac{bc+4}{c} = \frac{ac+4}{a}$

$abc + 4ac = ab^2c + 4ab = abc^2 + 4bc$

$abc + 4c = bc^2 + 4b$

$a^2b + 4a = abc + 4b$

$abc + 4c - 4a - bc^2 = b^2c - abc$

$2abc = 4(a-c) + b^2c + a^2b$

$1 + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} = c + 1$

$c = \frac{4}{b} \Rightarrow \dots$

$2 > b + \frac{4}{b} = 1 + \frac{4}{b} \Rightarrow \dots$

Уточн:  $a, b, c > 0$   $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$

1.  $abc + 4c = bc^2 + 4b \Rightarrow babc = (b^2c + a^2b) + (b^2c + a^2b) + (a^2b + ca) =$

2.  $abc + 4a = c^2a + 4c = b(a^2 + bc) + c(b^2 + ac) + a(a^2 + bc) =$

3.  $abc + 4b = a^2b + 4a = b(a^2 + bc) + c(b^2 + ac) + a(a^2 + bc) =$

$3abc + 4(a+b+c) = 4a(b+c) + b^2c + a^2b + c^2a$

$3abc = b^2c + a^2b + c^2a \Rightarrow (b^2c - ab^2) + (a^2b - abc) + (c^2a - ac^2) = 0$

$(b^2c - ab^2) + (a^2b - abc) + (c^2a - ac^2) = 0$

Велор: Значит  $a^2b + b^2c + c^2a = \max \Rightarrow \min abc \Rightarrow$  не макс.

$z = \frac{abc}{a^2b} = \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b}$

$a^2b + b^2c + c^2a \geq 3\sqrt{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a} = 3 \cdot abc$

Но они равны  $\Rightarrow a=b=c$ , либо:

$a=b \Rightarrow a=b=c$

$3abc = a^2b + b^2c + c^2a$

$2+8 = \frac{2+8+2+8}{2+8} = 2$

$\frac{2+8}{2+8+2+8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0$

Handwritten scribbles and calculations at the bottom of the page.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-3) + y(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$x^2y - 3x^2 + 11xy - 34x + 32y - 101 = 0$$

1)  $y=3 \Rightarrow x-101=0$   
 ~~$x=101$~~   
 $0 - x + 32 \cdot 3 - 101 = 0$   
 $x = -5$

$$(y+30) = (11y-34)^2 - 4(32y-101)(y-3) = 0$$

$$121y^2 - 34 \cdot 11 \cdot 2y - 4(32y^2 - 32 \cdot 3y - 101(y+30)) = 0$$

$$= 121y^2 - 34 \cdot 11 \cdot 2y - 128y^2 + 4 \cdot 192y - 403 \cdot 4 = -7y^2 + 748y + 788y + 1156 - 1212 = 0$$

$$200 \cdot 4 - 3 \cdot 4 - 101 = 788$$

$$= -7y^2 + 40y + 56 = 0$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 34 \\ \hline 88 \\ 66 \\ \hline 748 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \quad 34 \\ \times 34 \quad \times 34 \\ \hline 138 \\ 102 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 303 \\ \times 4 \\ \hline 1212 \\ -1156 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$7y^2 - 40y + 56 = 0$$

$$D = 40^2 - 4 \cdot 56 = 1600 - 224 = 1376$$

$$20 \pm 2\sqrt{344} = 20 \pm 2 \cdot 18.546 = 20 \pm 37.092$$

$$y_{1/2} = \frac{20 \pm 2\sqrt{344}}{14}$$

$$y_1 = \frac{20 + 2\sqrt{344}}{14} \approx 3.36$$

$$y_2 = \frac{20 - 2\sqrt{344}}{14} \approx -0.76$$

$$y_1 \in [1; 5]$$

$$y_2 \notin [1; 5]$$

$$D \in \left\{ \frac{20-2\sqrt{344}}{14}, 0, 1 \right\} \subset [1; 5]$$

$y=1 \Rightarrow -2x^2 + x(34-11) + 32 - 101 = 0$

$$-2x^2 + 23x - 69 = 0$$

$$2x^2 - 23x + 69 = 0$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 2 \cdot 69 = 529 - 552 = -23 < 0$$

$$20 + 2\sqrt{344} < 42$$

$$2\sqrt{344} < 22$$

$$\sqrt{344} < 11$$

$y=2 \Rightarrow -x^2 + x(34-22) + 64 - 101 = 0$

$$-x^2 + 12x - 37 = 0$$

$$x^2 - 12x + 37 = 0 = (x-6)^2 + 1 > 0$$

$$D = 12^2 - 4 \cdot 37 = 144 - 148 = -4 < 0$$

$y=4 \Rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$(x-5) \pm 1 = 0$$

$y=5 \Rightarrow 2x^2 - 21x + 160 - 101 = 0$

$$2x^2 - 21x + 59 = 0$$

$$D = 21^2 - 4 \cdot 2 \cdot 59 = 441 - 472 = -31 < 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$D = (11y - 34)^2 - 4(y - 3)(32y - 10)$$

$$(11y - 34)^2 = 121y^2 - 22 \cdot 34y + 34^2 = 121y^2 - 748y + 1156$$

$$4(y - 3)(32y - 10) = 4(32y^2 - 101y - 36y + 30) = 4(32y^2 - 137y + 30) = 128y^2 - 548y + 120$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 4 \\ \hline 128 \end{array} \quad \begin{array}{r} 34 \\ \times 34 \\ \hline 136 \\ 68 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$\text{Уравнение: } D = 121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 548y - 120 = -7y^2 + 40y - 56 \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 2 \\ 156 \\ - 2 \\ \hline 56 \\ \hline 4 \\ \times 7 \\ \hline 28 \\ \hline 392 \end{array}$$

$$4y^2 - 40y + 56 \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow 2 < 2\sqrt{2} < 4 \Rightarrow 22 < 20 + (2\sqrt{2}) < 24 \Rightarrow 21 < \frac{20 + 2\sqrt{2}}{2} < \frac{28}{2} = 14$$

$$D_1 = 20^2 - 56 \cdot 4 = 400 - 224 = 176$$

$$y = \frac{20 \pm 2\sqrt{22}}{4}$$

$$\text{② } 4 < 2\sqrt{2} < 6$$

$$\text{Уравнение } 4y$$

$$\text{③ } 16 < 20 + 2\sqrt{2} < 18$$

$$\frac{14}{4} < \frac{20 + 2\sqrt{2}}{4} < \frac{21}{4}$$

$$\text{Уравнение: } \boxed{y=3}$$

$y = -x^5 + 2a$  - координаты вершин.

$y = 2x$  - диагональ  $\Rightarrow$   $\frac{1}{2}$  диагональ:  $y = -\frac{1}{2}x$

Пересечение:  $2x = -x^5 + 2a$  и  $-\frac{1}{2}x = -x^5 + 2a$ .

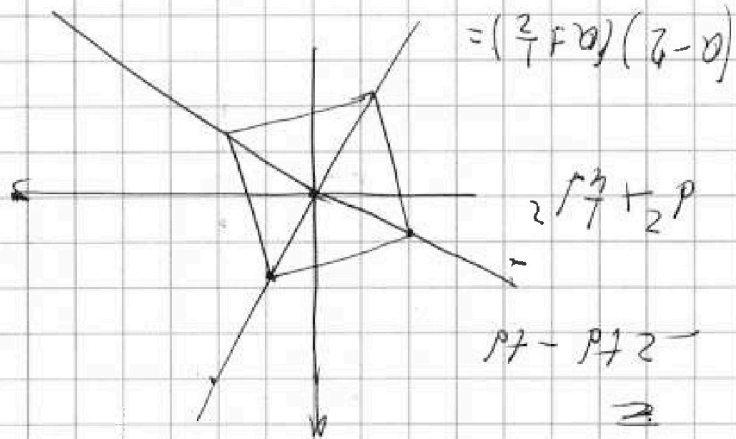
$$\begin{array}{l} x^5 \geq x^4 + 2ax \\ \Rightarrow 0 \leq x^4 + 2ax \end{array}$$

$$1 - \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}a = 1 + 2a - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}a = a^2 + 1 - 2a + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}a =$$

$$0 = (a - 2 + \frac{2}{3}x) \cdot x$$

$$0 = x(a - 2) + \frac{2}{3}x^2$$

$$\begin{array}{l} 2x - x^5 + ax \\ x^5 - 2x - ax \end{array}$$





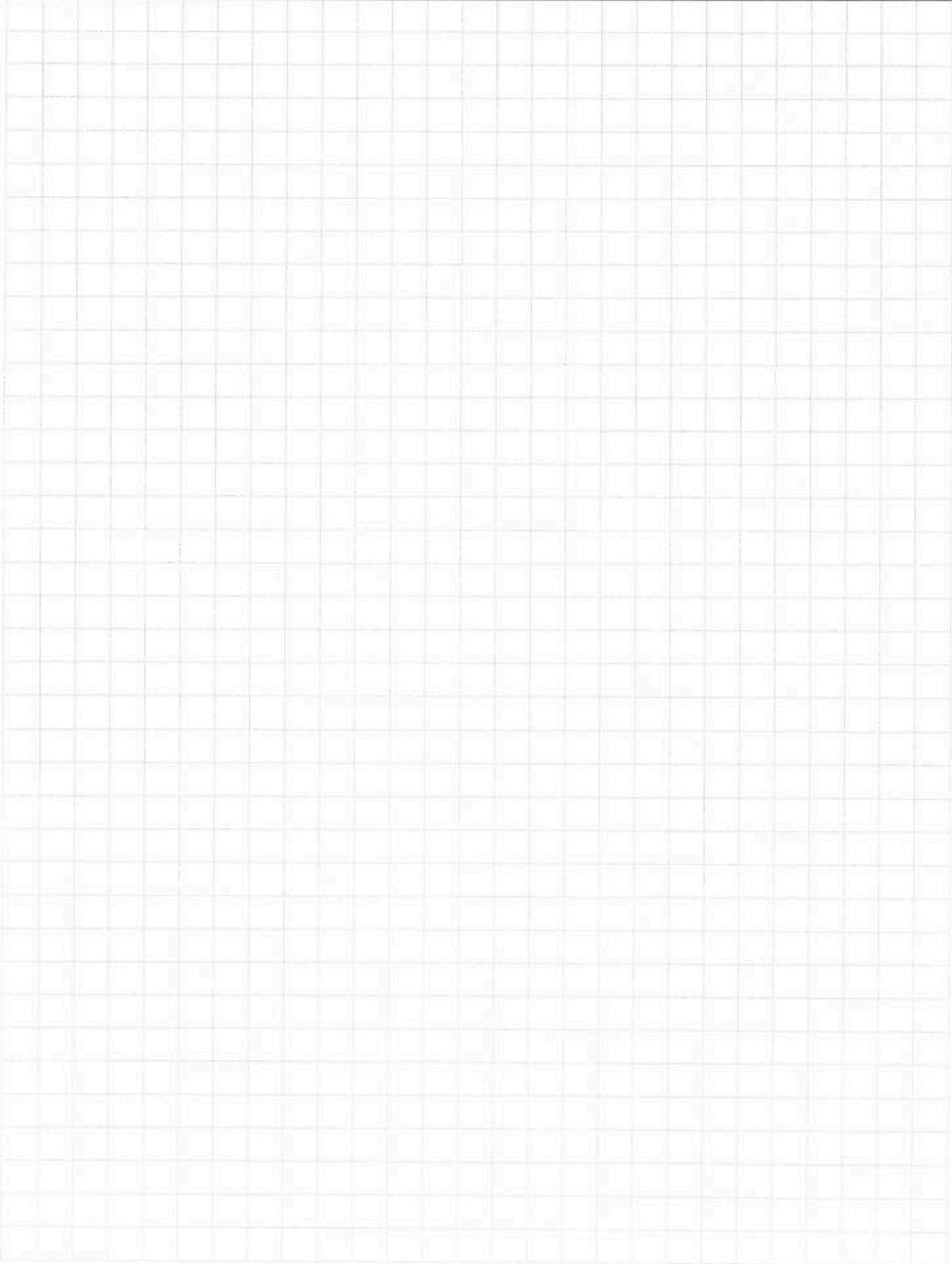
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







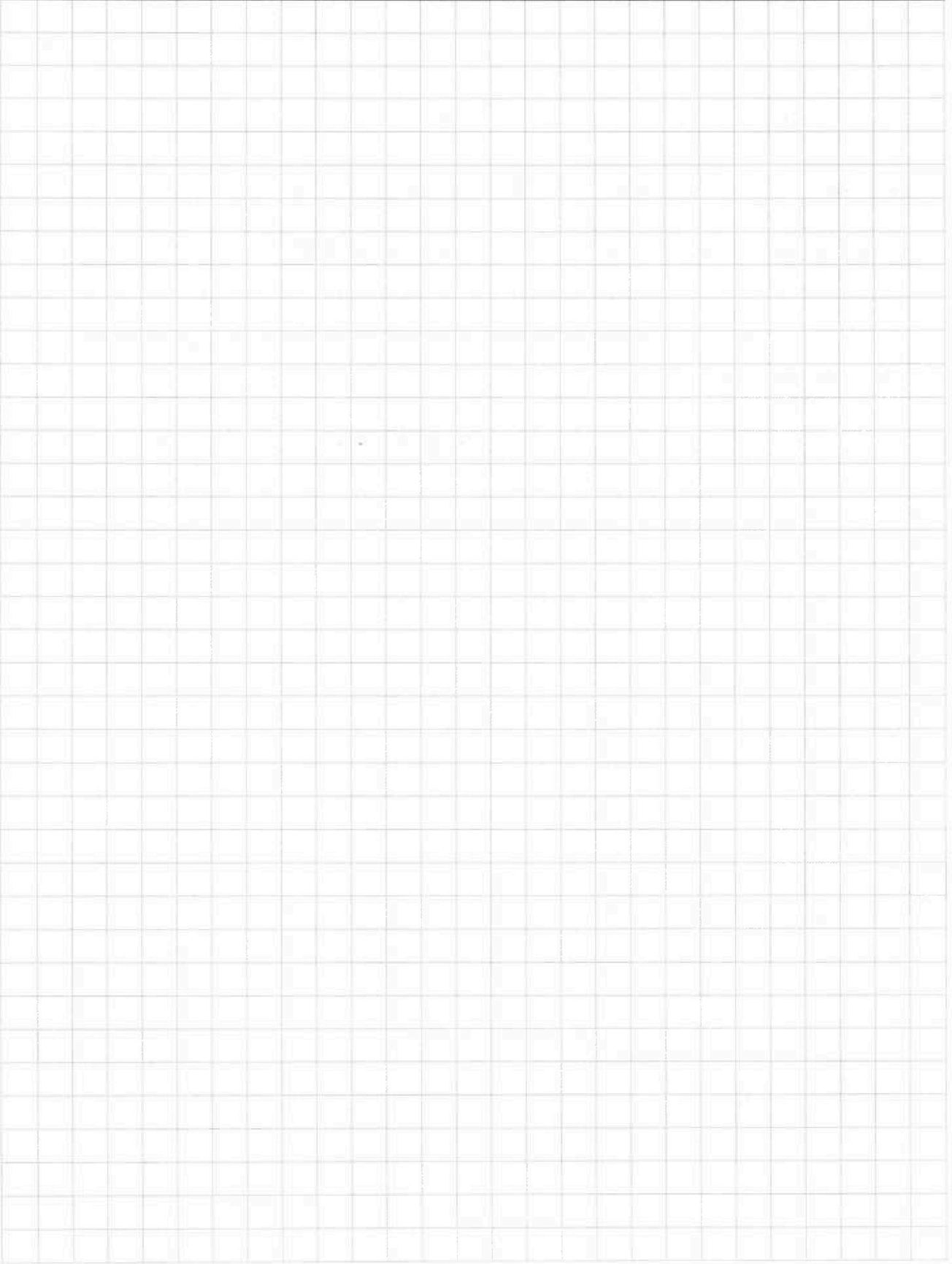
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



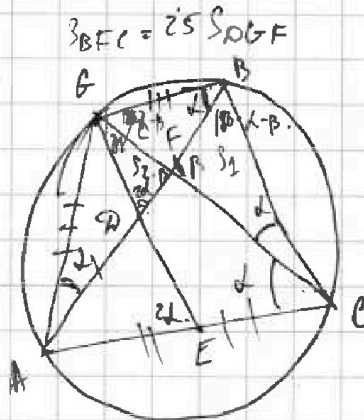
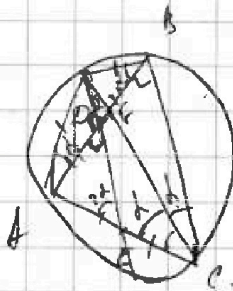
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



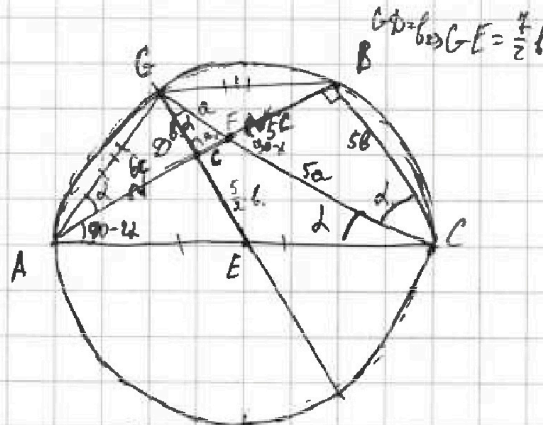
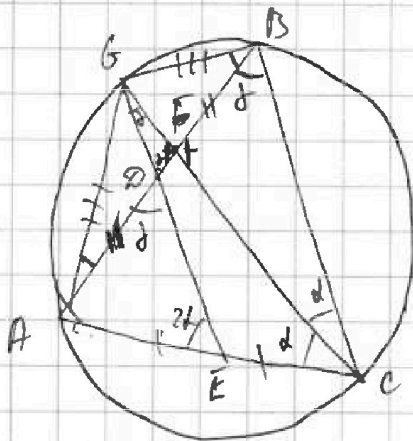
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\triangle GFD \sim \triangle BCF$$

$$\frac{GF}{AC} = \frac{DF}{CF} = \frac{DG}{BF} = \frac{GF}{BC} = \frac{1}{5}$$

$$\angle G = \angle B = \angle \gamma = 90^\circ$$



$$\frac{BF}{FA} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{7} \Rightarrow BC = 5B \Rightarrow AC = 7B$$

$$\cos C = \frac{5}{7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

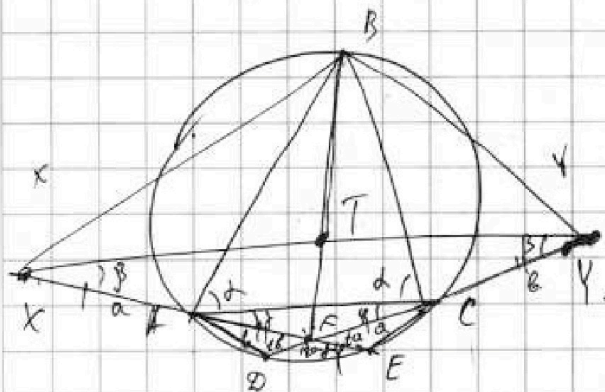
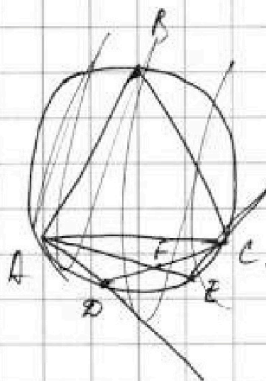
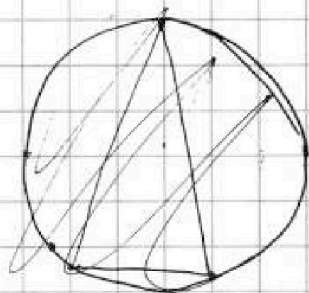
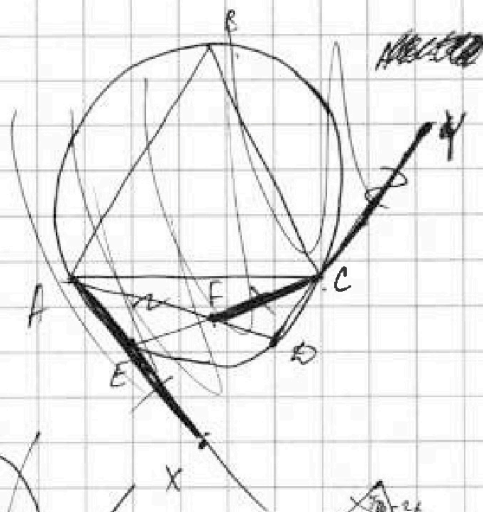
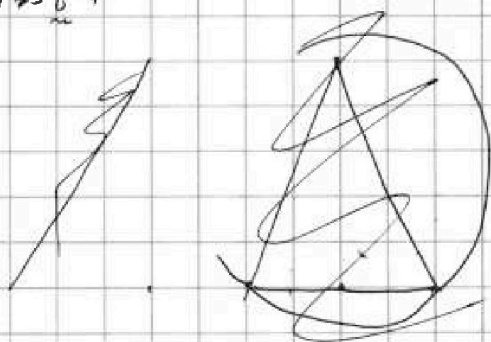
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5 6 7



$$\boxed{\angle BXY?} \quad XY = 36$$

$$XF = FY \quad BF = 14$$

$$\angle AFC = \frac{\widehat{DE} + \widehat{AC}}{2}$$

$$\widehat{DE} = \widehat{AC} - \widehat{AE} - \widehat{EC}$$

$$= 180 - 2\alpha$$

$$\angle AFC = \frac{180 - 2\alpha - \gamma - \delta + 180 + 2\alpha}{2} = 180 - \delta - \gamma$$

$$FEC \sim \triangle FDA \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{FD}{FE} = \frac{1}{a}$$