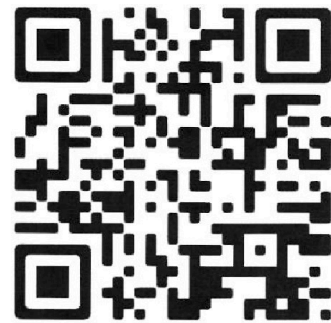




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Решите уравнение

$$6 \operatorname{tg} 2x - 1 + \operatorname{ctg} \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $13^{180} \cdot 17^{180}$ ?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x-1) - (x-2) \ln(3x-3) + (\ln 3) \ln(x-1) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = -\frac{2x^3}{3} + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = 3x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AC$  и  $AB$  соответственно,  $CF$  – биссектриса треугольника  $ABC$ . Лучи  $DE$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что  $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{23}}$ .

6. [5 баллов] Числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{11}{y^3} = y^3 + \frac{11}{z^3} = z^3 + \frac{11}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения  $xyz$ .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит четырёхугольник  $ABCD$ , в котором  $AB = BC = \sqrt{15}$ ,  $AD = DC = \sqrt{6}$ ,  $AC = 2\sqrt{3}$ . Ребро  $SD$  – высота пирамиды. Известно, что  $SA + SB = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$ . Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней  $ABCD$ ,  $SAB$ ,  $SBC$  и ребра  $SD$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{\cos\left(x - \frac{\sqrt{5}}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\sqrt{5}}{4}\right)} = \frac{\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}$$

$$6 \operatorname{tg} 2x - 1 + \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\sqrt{5}}{4}\right) = 0$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$$

$$\frac{12 \sin x \cdot \cos x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} + \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} = 1 \Rightarrow 12 \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos x + \sin x)^2 =$$

$$= (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$12 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$-2 \cos^2 x + 10 \sin x \cdot \cos x = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 5 \sin x \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 1) \cos x = 0 \\ x = \frac{\sqrt{5}}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2) \cos x = 5 \sin x \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{5} \end{array}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$a, b$  и  $c$  в указанном порядке образуют геом. прогрессию.

По свойству геом. прогрессии  $b^2 = ac$ .

$$a \cdot b \cdot c = (a-c) \cdot b = b^3 = 13^{180} \cdot 17^{180} \Rightarrow b = 13^{60} \cdot 17^{60}$$

Пусть  $a = 13^d \cdot 17^\beta$  где  $d, \beta \in \mathbb{Z}$ ,  $d, \beta \in [0; 120]$ .

$$\text{Тогда } c = \frac{13^{180} \cdot 17^{180}}{a \cdot b} = 13^{120-d} \cdot 17^{120-\beta}$$

Шаг такой прогрессии равен  $q = 13^{60-d} \cdot 17^{60-\beta}$ .

Каждому  $a$  соответствует лишь одно  $c$ . Каждому

способу выбрать  $a$  равно  $121 \cdot 121 = 14641$ .

Заметим, что  $a$  и  $c$  могут быть отрицательными.

Тогда  $a = -13^d \cdot 17^\beta$ ,  $d, \beta \in \mathbb{Z}$ ,  $d, \beta \in [0; 120]$  и  $c = -13^{120-d} \cdot 17^{120-\beta}$ .

Тогда шаг неслезвательно равен  $q = -13^{60-d} \cdot 17^{60-\beta}$ .

В таком случае мы получаем еще  $121 \cdot 121 = 14641$  вариантов.

$$N = N_1 + N_2 = 2 \cdot 14641 = 29282$$

Ответ:  $N = 29282$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$\ln^2(x-1) - (x-2)\ln(3x-3) + (\ln 3) \ln(x-1) \geq 0$$

$$\ln(3x-3) = \ln(3 \cdot (x-1)) = \ln 3 + \ln(x-1)$$

$$\ln^2(x-1) + (2-x)(\ln 3 + \ln(x-1)) + (\ln 3) \ln(x-1) \geq 0$$

$$\ln^2(x-1) + (1-x)(\ln 3 + \ln(x-1)) + \ln 3 + \ln(x-1) + (\ln 3) \ln(x-1) \geq 0$$

$$(\ln(x-1) + 1)(\ln(x-1) + \ln 3) + (1-x)(\ln(x-1) + \ln 3) \geq 0$$

$$(\ln(x-1) + \ln 3)(\ln(x-1) + 1 + 1 - x) \geq 0$$

$$\ln(3x-3) \cdot (\ln(x-1) + 2 - x) \geq 0$$

Рассмотрим <sup>неравенство</sup> ~~уравнение~~  $\ln(x-1) + 2 - x \geq 0$ .

Заметим, что  $\ln(2-1) = \ln 1 = 0$  и  $(2-2) = 0$ .

Главной касательной к  $f(x) = \ln(x-1)$  в точке  $x_0 = 2$ :

$$y = f(x_0) + (x-x_0) \cdot f'(x) = \ln(2-1) + (x-2) \cdot \frac{1}{x-1}$$

То есть  $y = x - 2$  это касательная к  $f(x) = \ln(x-1)$

Значит при  $x = 2$ ,  $\ln(x-1) + 2 - x = 0$ , при  $x \neq 2$   ~~$\ln(x-1) + 2 - x < 0$~~

Неравенство  $\ln(3x-3) \geq 0 = \ln e^1 \Rightarrow \frac{3x-3-1}{e-1} \geq 0$ .  $\ln(x-1) + 2 - x < 0$

$$3x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{4}{3}$$

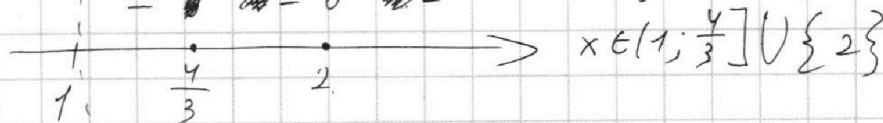
При  $x \geq \frac{4}{3}$ ,  $\ln(3x-3) \geq 0$ , при  $x < \frac{4}{3}$ ,  $\ln(3x-3) < 0$ .

Применим метод интервалов:

$\ln(3x-3)$		-	0	+	+	+
$\ln(x-1) + 2 - x$		-	+	-	0	-

Умножая  $0 \cdot 3 \cdot x - 1 > 0$   
 $(x > 1)$

Получим:



Ответ:  $x \in (1; \frac{4}{3}] \cup \{2\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

$$y = -\frac{2x^3}{3} + ax. \text{ Заметим, что } y(0) = 0.$$

Точки пересечения графиков  $y = -\frac{2x^3}{3} + ax$  и  $y = 3x$ .

являются ~~точками~~ вершинами квадрата, которые зажимают его диагональ (крюке точки  $(0; 0)$ , т.к. это центры диагоналей).

$$-\frac{2x^3}{3} + ax = 3x \Rightarrow -\frac{2x^2}{3} + a = 3 \Rightarrow \cancel{\frac{3}{2}(a-3)} x^2 = \frac{3}{2}(a-3)$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}(a-3)}. \quad (a > 3)$$

$$y_{1,2} = \pm 3 \sqrt{\frac{3}{2}(a-3)}$$

Диагонали ~~кв~~ квадрата перпендикулярны, следовательно остальные 2 точки квадрата лежат на прямой  $y = -\frac{1}{3}x$  (т.к. прямые  $y = 3x$  и  $y = -\frac{1}{3}x$  перпендикулярны).

$$-\frac{2x^3}{3} + ax = -\frac{1}{3}x \Rightarrow -\frac{2}{3}x^2 + a = -\frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = (a + \frac{1}{3}) \cdot \frac{3}{2}$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}(a + \frac{1}{3})}$$

$$y_{3,4} = \mp \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2}(a + \frac{1}{3})}$$

Расстояния от каждой точки квадрата до его центра равны между собой, то есть:

$$\cancel{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \cancel{(x_2 - 0)^2 + (y_2 - 0)^2} = (x_3 - 0)^2 + (y_3 - 0)^2$$

т.к. центры квадрата находятся в точке  $(0; 0)$ .

$$x_1^2 + y_1^2 = x_3^2 + y_3^2$$

$$\frac{3}{2}(a-3) + 9 \left( \frac{3}{2}(a-3) \right) = \frac{3}{2} \left( a + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{9} \left( \frac{3}{2} \left( a + \frac{1}{3} \right) \right)$$

$$(a-3) \cdot 15 = \left( a + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{5}{3}$$

$$9(a-3) = \left( a + \frac{1}{3} \right)$$

$$9a - a = 27 + \frac{1}{3}$$

$$8a = \frac{81+1}{3} = \frac{82}{3}$$

$$a = \frac{82}{24} = \frac{41}{12}$$

длины диагоналей квадрата:

$$\frac{d}{2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{\frac{3}{2} \left( \frac{41}{12} - 3 \right) + 9 \cdot \frac{3}{2} \left( \frac{41}{12} - 3 \right)} = \sqrt{15} \cdot \sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{5}{2}$$

$d = 5$  - диагональ квадрата.

$$S = \left( \frac{d}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{25}{2} \text{ - площадь квадрата.}$$

Ответ:  $a = \frac{41}{12}$ ,

$$S = \frac{25}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

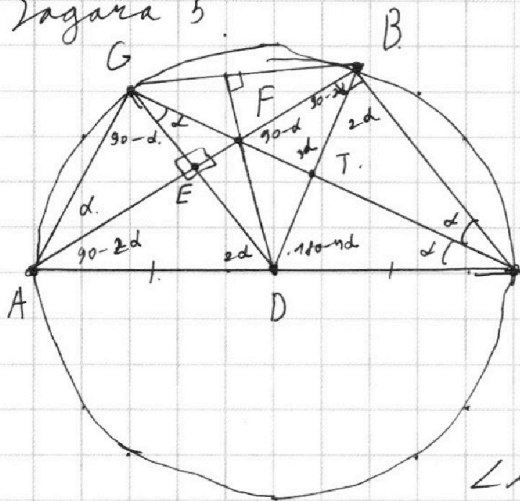
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5



$$\angle ACF = \angle FCB. \text{ (CF - бисс.)}$$

$$DE \parallel BC \text{ (DE - ср. линия)}$$

$$\text{Тогда } \angle ACF = d = \angle FCB.$$

$$\text{Тогда } \angle ADE = \angle ACB = 2d.$$

$$\angle GDC = 180^\circ - \angle ADE = 180^\circ - 2d.$$

$$\angle DGC = 180^\circ - \angle GDC - \angle ACG = d.$$

$$\angle DGC = \angle DCG \Rightarrow GD = DC.$$

$$AD = CD \text{ (D - середина AC)}$$

$$AD = CD = GD \Rightarrow \angle AGC = 90^\circ \text{ (GP - медиана)}$$

$$\angle AGC = 90^\circ \Rightarrow AC - диаметр. (\angle C = 180^\circ)$$

D - середина диаметра AC  $\Rightarrow$  D - центр окружности.

$$\angle ABC = \angle AGC = 90^\circ = \angle AED.$$

$$DB = CD \Rightarrow \angle BDC = 180^\circ - 4d$$

$$\angle BAC = 90^\circ - 2d \Rightarrow \angle ADE = 2d$$

$$\angle GDB = 180^\circ - 2d - (180^\circ - 4d) = 2d. \quad GD = BD \Rightarrow \angle DGB = \angle DBG = \frac{180^\circ - 2d}{2}$$

$$\angle DGB = 90^\circ - d \Rightarrow \angle CGB = 90^\circ - 2d.$$

$$\angle DBG = 90^\circ - d \Rightarrow \angle ABG = d.$$

$$BD \parallel AG \Rightarrow \angle DTC = 90^\circ = \angle FTB \Rightarrow \angle DFE = \angle FTB.$$

$$d = 30^\circ.$$

Ответ:  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $\angle BCA = 60^\circ$ ,  $\angle BAC = 30^\circ$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

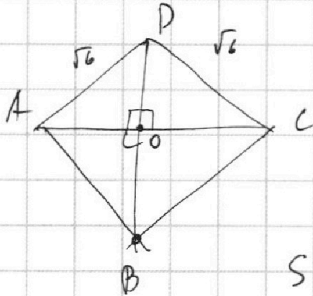
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

Рассмотрим  $ABCD$ :



$$AD = CD, AB = BC \Rightarrow AC \perp BD, AO = OC = \frac{AC}{2}$$

$$AO = \sqrt{3} \Rightarrow OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{3}$$

$$OB = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$BD = OD + OB = 3\sqrt{3}$$

$$SD \perp ABCD \Rightarrow SA^2 = SO^2 + AD^2, SB^2 = SO^2 + BD^2$$

Пусть  $SD = h$ . Тогда  $SA = \sqrt{h^2 + 6}$ ,  $SB = \sqrt{h^2 + 27}$ .

По условию  $SA + SB = 2\sqrt{3} + \sqrt{25}$

$$\sqrt{h^2 + 6} + \sqrt{h^2 + 27} = 2\sqrt{3} + \sqrt{25} = \sqrt{3}(2 + \sqrt{5})$$

$$\sqrt{\frac{h^2}{3} + 2} + \sqrt{\frac{h^2}{3} + 9} = (2 + \sqrt{5}) \quad \text{Пусть } \frac{h^2}{3} = t$$

$$t + 2 + t + 9 + 2\sqrt{(t+2)(t+9)} = (2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$$

$$t + \sqrt{(t+2)(t+9)} = 2\sqrt{5} - 1$$

$$(t+2)(t+9) = (2\sqrt{5} - 1 - t)^2$$

$$t^2 + 11t + 18 = t^2 - 2t(2\sqrt{5} - 1) + (2\sqrt{5} - 1)^2 = t^2 - 4t\sqrt{5} + 2t + 20 - 4\sqrt{5} + 1$$

$$9t + 4t\sqrt{5} = 3 - 4\sqrt{5}$$

$$t = \frac{3 - 4\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}} \Rightarrow h^2 = \frac{9 - 12\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}} = (9 - 12\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5}) = 81 + 240 - 4\sqrt{5}(27 + 9)$$

$$h^2 = 321 - 36 \cdot 4\sqrt{5}$$

$$h = SD = \sqrt{321 - 144\sqrt{5}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{321 - 144\sqrt{5}}}{3} \cdot \frac{AC \cdot BD}{2} = 3\sqrt{321 - 144\sqrt{5}} - \text{объем пирамиды}$$

Ответ:  $V = 3\sqrt{321 - 144\sqrt{5}}$  - объем пирамиды

Пусть  $O'$  - проекция центра сферы на  $ABCD$ .

Сфера касается сторон  $SAB$  и  $SBC$ , поэтому



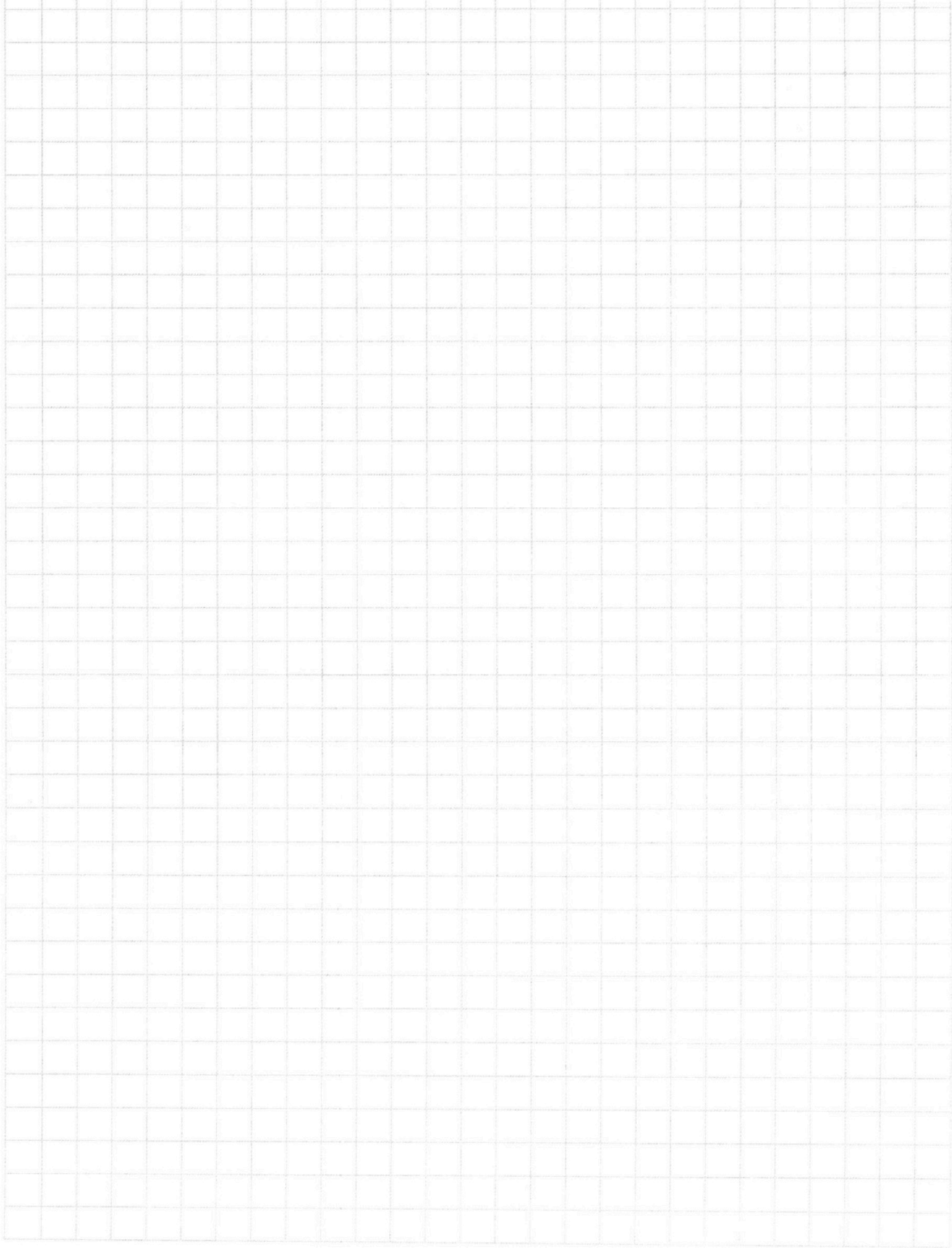
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$b^2 = ac$

$a, b, c = 13$   $180 - \beta$   $720$

$b = 13 \cdot 14$

$a, c = 13$   $120 - \beta$   $120$   $13 \cdot 14$   $13 \cdot 14$   $13 \cdot 14$   $120 - \beta$   $120 - \beta$

$a = 13 \cdot 14$   $\beta$   $d, \beta \in [0; 120]$

$c = 13 \cdot 14$   $(120 - \beta)$

$d, \beta$

$a = -13 \cdot 14$   $\beta$

$c = -13 \cdot 14$   $(120 - \beta)$

$14 \cdot 120 - 120 = 14400$

Answer:  $14400 \cdot 2 = 28800$

$\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{23}}$

$\angle DGC = d$

$CF = x\sqrt{2}$

$DF = x\sqrt{23}$

$\triangle CEF \sim \triangle BCF$

$360 = 180 - d + 180 - \beta + \varphi$

$(\varphi = d + \beta)$

$\angle EFC = d + \beta$

$\angle AGL = 90^\circ$

$\angle C = 180^\circ$

$AC$  - диаметр

$D$  - центр

$\angle ABC = 90^\circ$

$B$  - окружность

$\frac{AG}{2R} = \frac{FB}{x\sqrt{2}}$

$23x^2 = 2x^2 + R^2 - 2 \cdot x\sqrt{2} \cdot R \cdot \cos d$

$(R^2 - 21x^2)y = x\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2} \cdot R = 2x^2R$

$\cos d = \frac{R^2 - 21x^2}{2x\sqrt{2}R} = \frac{x\sqrt{2}}{24}$

$180 - 90 + d - 90 + 2d + \varphi = 180$

$\varphi = 180 - 3d$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 + \frac{11}{y^3} = y^3 + \frac{11}{z^3} = z^3 + \frac{11}{x^3}$$

$$\begin{cases} x^3 + \frac{11}{y^3} = t \\ y^3 + \frac{11}{z^3} = t \\ z^3 + \frac{11}{x^3} = t \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 3t \\ x^3 y^3 z^3 + 11x^3 = t x^3 z^3 \\ x^3 y^3 z^3 + 11y^3 = t y^3 x^3 \\ x^3 y^3 z^3 + 11z^3 = t z^3 y^3 \end{cases}$$

$$x^6 y^3 z^3 + 11x^3 z^3 = x^3 y^6 z^3 + 11x^3 y^3 = x^3 y^3 z^6 + 11y^3 z^3$$

$$x^6 y^3 z^3 + 11x^3 z^3 = x^3 y^6 z^3 + 11x^3 y^3$$

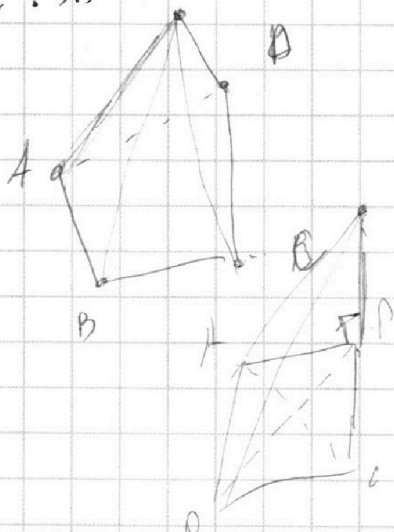
$$x^3(x^3 y^3 z^3) + x^3 \cdot 11z^3 - x^3 \cdot y^6 z^3 - 11x^3 \cdot y^3 = 0$$

$$11x^3(z^3 - y^3) + z^3 \cdot x^6 y^3 - z^3 \cdot x^3 y^6 = 0$$

$$11(z^3 - y^3) + z^3 \cdot x^3 y^3 - z^3 \cdot y^6 = 0$$

$$11(z^3 - y^3) = z^3 y^3 (y^3 - x^3)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 9$$

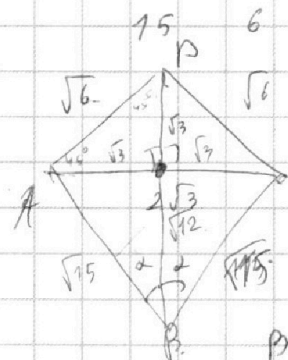
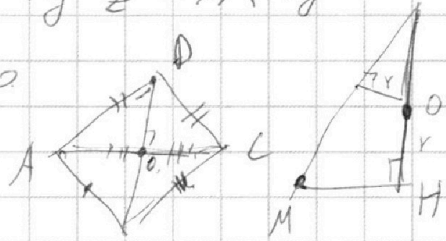


$$AB = BC = \sqrt{15}$$

$$AD = DC = \sqrt{6}$$

$$AC = 2\sqrt{3}$$

$$SO \perp ABCD$$



$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$c \cdot \cos d = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$b \cdot \sin d = \frac{1}{2}$$

$$SO = h$$

$$GA = \sqrt{h^2 + 6}$$

$$SB = \sqrt{h^2 + 24}$$

$$PD = \sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{h^2}{3} + 2} + \sqrt{\frac{h^2}{3} + 9} = 2 + \sqrt{5}$$

$$\sqrt{6+2} + \sqrt{6+9}$$

$$\sqrt{h^2+6} + \sqrt{h^2+24} = 2\sqrt{3} + \sqrt{15} = \sqrt{3}(2 + \sqrt{5})$$

$$h^2+6 + h^2+24 + 2\sqrt{(h^2+6)(h^2+24)} = 3 \cdot (4+5+4\sqrt{5}) = 3(9+4\sqrt{5}) = 27 + 12\sqrt{5}$$

$$2t + 2\sqrt{(t+6)(t+24)} = 12\sqrt{5} - 6$$

$$(t+6)(t+24) = (6\sqrt{5}-3-t)^2$$

$$t^2 + 33t + 24 \cdot 6 = (6\sqrt{5}-3)^2 + t^2 - 2t(6\sqrt{5}-3)$$

$$t(33 + 6\sqrt{5} - 3) = (6\sqrt{5}-3)^2 - 24 \cdot 6 = 9(2\sqrt{5}-1)^2 - 9 \cdot 3 \cdot 6$$

$$t(30 + 6\sqrt{5}) = 9(20 + 1 - 4\sqrt{5} - 18) = 9(3 - 4\sqrt{5})$$

$$t = \frac{9(3-4\sqrt{5})}{3(10+2\sqrt{5})} = \frac{9-12\sqrt{5}}{25+2\sqrt{5}} \cdot \frac{10-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}} = \frac{90-120\sqrt{5}-18\sqrt{5}+24 \cdot 5}{100-20} = \frac{90-148\sqrt{5}+120}{80}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{t+2} + \sqrt{t+9} = 2 + \sqrt{5}$$

$$(t+2) + 2\sqrt{(t+2)(t+9)} + (t+9) = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$$

$$2t + 2\sqrt{(t+2)(t+9)} = 4\sqrt{5} - 2$$

$$\sqrt{(t+2)(t+9)} = 2\sqrt{5} - 1 - t$$

$$(t+2)(t+9) = (2\sqrt{5} - 1 - t)^2 = 20 - 4\sqrt{5} + 1 - 2t(2\sqrt{5} - 1) + (2\sqrt{5} - 1)^2$$

$$11t + 4t\sqrt{5} + 2t = (20 - 4\sqrt{5} + 1) - 2t(2\sqrt{5} - 1) + (2\sqrt{5} - 1)^2$$

$$t(9 + 4\sqrt{5}) = 3 - 4\sqrt{5} \quad \frac{h^2}{3} = \frac{3 - 4\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}}$$

$$\frac{9 - 12\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}} = \frac{9 + 4\sqrt{5} - 16\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}} = 1 - \frac{16\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}}$$

$$h^2 = \frac{9 - 12\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}} = \frac{(9 - 12\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5})}{(9 + 4\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5})} = \frac{(9 - 12\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5})}{81 - 160} = \frac{(9 - 12\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5})}{-79}$$

$$h^2 = 81 - 9(12\sqrt{5} + 4\sqrt{5}) + 48 \cdot 5 = 321 - 9 \cdot 16 \cdot \sqrt{5} \quad 81 - 12 \cdot 9\sqrt{5} + 4\sqrt{5} \cdot 9 + 48 \cdot 5$$

$$9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 8\sqrt{5} + 48 \cdot 5 - 1 + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 0 \\ \tan 2x &= 0 \\ \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \end{aligned}$$

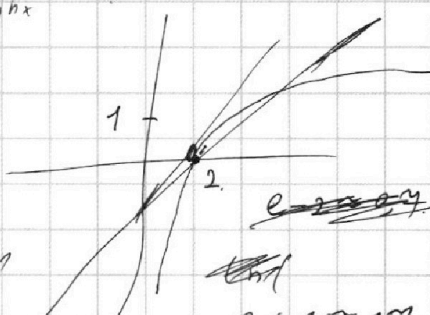
$$\begin{array}{r} \times 121 \\ \times 121 \\ + 121 \\ \hline + 242 \\ 121 \\ \hline 1.4641 \end{array}$$

$$\frac{x-2}{x-1}$$

$$\begin{array}{r} \times 74641 \\ \times 74641 \\ + 74641 \\ \hline + 149282 \\ 74641 \\ \hline 2.9282 \end{array}$$

$$\ln(2-x) = 0$$

$$\ln(x-1) = 1$$



$$\ln(x-1) + 2 - x \geq 0$$

$$\ln(x-1) \geq x-2$$

$$\frac{y-ay}{x-1} \quad (\ln(x-1))' = \frac{1}{x-1}$$

$$y(2) \quad y = f(x) + (x-x_0) \cdot f'(x) = y = 0 + (x-2) \cdot \frac{1}{x-1}$$

$$(\ln(x-1))' = \frac{1}{x-1} \quad \frac{x-2}{x-1}$$

$$x-2 \geq \ln(x-1) \quad (\ln(x-1) + 2 - x \leq 0)$$

$$20x_1^2 = \frac{20}{9}x_3^2$$

$$9x_1^2 = x_3^2$$

$$9 \cdot \frac{3}{2}(a-3) = \frac{3}{2}(a + \frac{1}{3})$$

$$9a - 27 = a + \frac{1}{3} \quad 8a = 27 + \frac{1}{3} = \frac{27 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{82}{3}$$

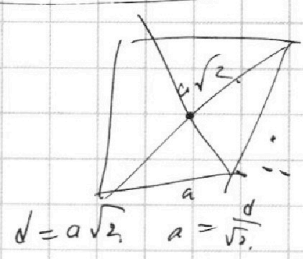
$$8a = \frac{82}{3} \quad a = \frac{82}{3 \cdot 8} = \frac{41}{12}$$

$$x_1^2 = \frac{3}{2} \left( \frac{41}{12} - \frac{36}{12} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{12}$$

$$x_3^2 = \frac{3}{2} \left( \frac{41}{12} + \frac{4}{12} \right) = \frac{3 \cdot 45}{2 \cdot 12}$$

$$\sqrt{\frac{15 \cdot 5}{12}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 5}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$S = a^2 = \left( \frac{d}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{d^2}{2}$$



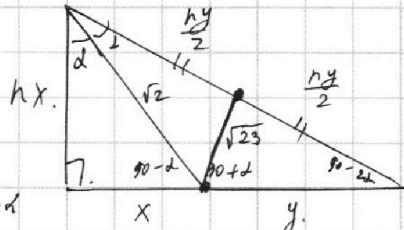
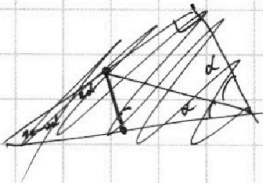
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~cos d~~

$$x^2 = n^2 x^2 + 2 - 2\sqrt{2} \cdot nx \cdot \cos d$$

$$\cos d = \frac{n^2 x^2 + 2 - x^2}{2\sqrt{2} \cdot nx}$$

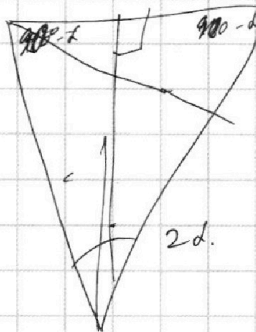
$$2 \cdot 3 = \frac{n^2 y^2}{4} + 2 - \cancel{2} \cdot \frac{ny}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos d$$

$$\cos d = \frac{\frac{n^2 y^2}{4} - 21}{ny \sqrt{2}}$$

$$90 - 2d \quad d$$

$$(n^2 x^2 + 2 - x^2)y = \frac{n^2 y^2}{2} - 42$$

$$-4 \quad -4 \quad -5$$



$$4 + 4 + 5 + 4 + 2 + 2 =$$

$$27 / 34$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$6 \operatorname{ctg} 2x - 1 + \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) = 0$

$\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\cos(x - \frac{\pi}{4})}{\sin(x - \frac{\pi}{4})} = \frac{\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}$

$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$

$\frac{12 \sin x \cdot \cos x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} + \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} = 1$

$12 \sin x \cdot \cos x - (\cos x + \sin x)^2 = \cos 2x$

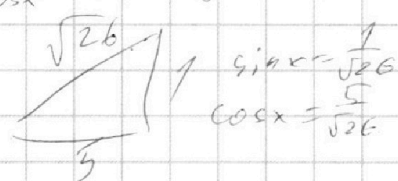
$12 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x - 2 \cos x \cdot \sin x - \sin^2 x = \cos 2x$

$-2 \cos^2 x + 10 \cos x \cdot \sin x = 0$

$\cos x (\cos x - 5 \sin x) = 0$

$2) \cos x = 5 \sin x$

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{5} \Rightarrow \operatorname{ctg} x = \frac{1}{5} \Rightarrow \operatorname{ctg} 2x = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2/5}{24/25} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$



$\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{1 + \operatorname{ctg} x} = \frac{\frac{1}{5} - 1}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{-4/5}{6/5} = -\frac{2}{3}$

$\ln^2(x-1) - (x-2) \ln(3x-3) + (\ln 3) \cdot \ln(x-1) \geq 0$

$\ln(3x-3) = \ln(3(x-1)) = (\ln 3 + \ln(x-1))$

$\ln^2(x-1) - (x-2)(\ln 3 + \ln(x-1)) + (\ln 3)(\ln(x-1)) \geq 0$

$t^2 - (e^t - 1)(\ln 3 + t) + (\ln 3) \cdot t \geq 0$

$(\ln^2(x-1) - (x-1) \cdot (\ln 3 + \ln(x-1)) + (\ln 3 + \ln(x-1)) + \ln 3 \cdot \ln(x-1)) \geq 0$

$(\ln(x-1) + 1)(\ln(x-1) + \ln 3) - (x-1)(\ln 3 + \ln(x-1)) + \ln 3(\ln(x-1) + 1) \geq 0$

$(\ln(x-1) + 1)(\ln(x-1) + \ln 3) - (x-1)(\ln 3 + \ln(x-1)) \geq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\ln^2(x-1) + (1-x)(\ln 3 + \ln(x-1)) + \ln 3 + \ln(x-1) + (\ln 3) \cdot \ln(x-1) \geq 0$$

$$(\ln(x-1) + 1)(\ln(x-1) + \ln 3) + (\ln 3 + \ln(x-1)) \cdot (1-x) \geq 0$$

$$(\ln 3 + \ln(x-1))(\ln(x-1) + 1 + 1-x) \geq 0$$

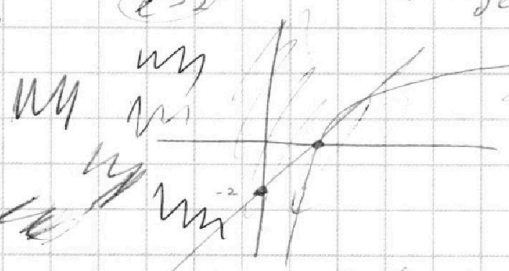
$$\ln(3x-3) \cdot (\ln(x-1) + 2-x) \geq 0$$

$(90-20) + (90-20) \cdot 2 - x \geq 0$   
 $\ln(x-1) \geq x-2$   
 $2 = \log_e e^2$   
 $x = \log_e e^x$

① ④ ③+

$$\ln(x-1) + \ln e^2 - \ln e^x \geq 0$$

$$\ln(e^2 \cdot (x-1)) \geq \ln e^x$$



$$e^2 \cdot (x-1) \geq e^x$$

$$(x-1) \geq \frac{e^x}{e^2} = e^{x-2}$$

$f(x) = \ln(x-1)$	$x=2$	$0$
$g(x) = x-2$	$x=2$	$0$
$f(x)$	$1$	$0.7$
$g(x)$	$0$	$1$

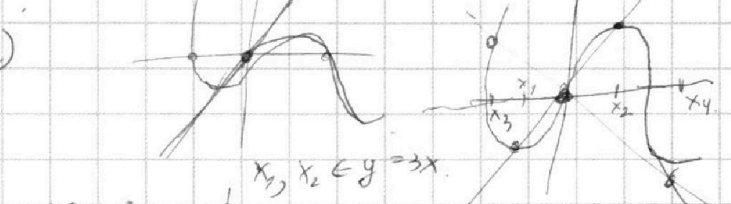
$\ln(x-1) = x-2 = (x-1) - 1$   
 $\ln a = a-1$   
 $\ln a \cdot e = a$   
 $\ln' x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{x+\Delta x - x} = \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}}$

$$y = -\frac{2x^3}{3} + ax = x(-\frac{2x^2}{3} + a)$$

$$y(0) = 0$$

$$x(a - \frac{2x^2}{3}) = 0$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}a}$$

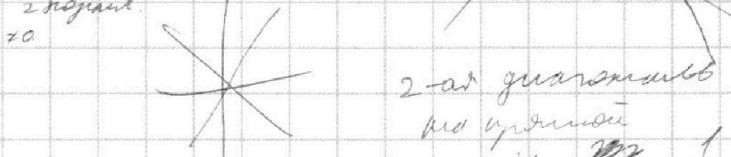


$$-\frac{2x^3}{3} + ax = 3x$$

$$-\frac{2x^2}{3} + a = 3$$

$$a - 3 = \frac{2x^2}{3}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}(a-3)}$$



$$x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}}$$

$$y_3 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}}$$

$$x_4 = \sqrt{\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}}$$

$$y_4 = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}}$$

$x_1 = \sqrt{\frac{2(a-3)}{3}}$   
 $y_1 = 3x_1 = \sqrt{6(a-3)}$   
 $x_2 = \sqrt{\frac{2(a-3)}{3}}$   
 $y_2 = \sqrt{6(a-3)}$

$$x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2$$

$$\frac{3}{2}a + \frac{1}{2} = 2 \cdot 3(a-3) = 6a - 18$$

$$3a + 1 = 12a - 36$$

$$37 = 9a$$

$$a = \frac{37}{9}$$

$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$   
 $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$   
 $\sin 2\alpha = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$   
 $\cos 2\alpha = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$

$$\frac{5}{13} - 1 = \frac{2}{3} = \frac{5}{3} - \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{5+1}{1-1} = -2$$

$\operatorname{ctg} x = \frac{5+1}{1-1} = -2$   
 $\frac{2}{3} \operatorname{ctg} 2x = \frac{5}{12}$