



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Решите уравнение

$$6 \operatorname{tg} 2x - 1 + \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $13^{180} \cdot 17^{180}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x-1) - (x-2) \ln(3x-3) + (\ln 3) \ln(x-1) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -\frac{2x^3}{3} + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{23}}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{11}{y^3} = y^3 + \frac{11}{z^3} = z^3 + \frac{11}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения xyz .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{15}$, $AD = DC = \sqrt{6}$, $AC = 2\sqrt{3}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{\cos\left(x - \frac{\sqrt{5}}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\sqrt{5}}{4}\right)} = \frac{\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}$$

$$6 \operatorname{tg} 2x - 1 + \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\sqrt{5}}{4}\right) = 0$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$$

$$\frac{12 \sin x \cdot \cos x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} + \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} = 1 \Rightarrow 12 \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos x + \sin x)^2 =$$

$$= (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$12 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$-2 \cos^2 x + 10 \sin x \cdot \cos x = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 5 \sin x \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 1) \cos x = 0 \\ x = \frac{\sqrt{5}}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2) \cos x = 5 \sin x \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{5} \end{array}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

a, b и c в указанном порядке образуют геом. прогрессию.

По свойству геом. прогрессии $b^2 = ac$.

$$a \cdot b \cdot c = (a-c) \cdot b = b^3 = 13^{180} \cdot 17^{180} \Rightarrow b = 13^{60} \cdot 17^{60}$$

Пусть $a = 13^d \cdot 17^\beta$ где $d, \beta \in \mathbb{Z}$, $d, \beta \in [0; 120]$.

$$\text{Тогда } c = \frac{13^{180} \cdot 17^{180}}{a \cdot b} = 13^{120-d} \cdot 17^{120-\beta}$$

Шаг такой прогрессии равен $q = 13^{60-d} \cdot 17^{60-\beta}$.

Каждому a соответствует лишь одно c . Количество

способов выбрать a равно $121 \cdot 121 = 14641$.

Заметим, что a и c могут быть отрицательными.

Тогда $a = -13^d \cdot 17^\beta$, $d, \beta \in \mathbb{Z}$, $d, \beta \in [0; 120]$ и $c = -13^{120-d} \cdot 17^{120-\beta}$.

Тогда шаг неслезвателности равен $q = -13^{60-d} \cdot 17^{60-\beta}$.

В таком случае мы получаем еще $121 \cdot 121 = 14641$ вариантов.

$$N = N_1 + N_2 = 2 \cdot 14641 = 29282$$

Ответ: $N = 29282$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$\ln^2(x-1) - (x-2)\ln(3x-3) + (\ln 3) \ln(x-1) \geq 0$$

$$\ln(3x-3) = \ln(3 \cdot (x-1)) = \ln 3 + \ln(x-1)$$

$$\ln^2(x-1) + (2-x)(\ln 3 + \ln(x-1)) + (\ln 3) \ln(x-1) \geq 0$$

$$\ln^2(x-1) + (1-x)(\ln 3 + \ln(x-1)) + \ln 3 + \ln(x-1) + (\ln 3) \ln(x-1) \geq 0$$

$$(\ln(x-1) + 1)(\ln(x-1) + \ln 3) + (1-x)(\ln(x-1) + \ln 3) \geq 0$$

$$(\ln(x-1) + \ln 3)(\ln(x-1) + 1 + 1 - x) \geq 0$$

$$\ln(3x-3) \cdot (\ln(x-1) + 2 - x) \geq 0$$

Рассмотрим ~~неравенство~~ $\ln(x-1) + 2 - x \geq 0$.

Заметим, что $\ln(2-1) = \ln 1 = 0$ и $(2-2) = 0$.

Главной касательной к $f(x) = \ln(x-1)$ в точке $x_0 = 2$:

$$y = f(x_0) + (x-x_0) \cdot f'(x) = \ln(2-1) + (x-2) \cdot \frac{1}{x-1}$$

То есть $y = x - 2$ это касательная к $f(x) = \ln(x-1)$

Значит при $x = 2$, $\ln(x-1) + 2 - x = 0$, при $x \neq 2$ ~~$\ln(x-1) + 2 - x < 0$~~

Неравенство $\ln(3x-3) \geq 0 = \ln e^1 \Rightarrow \frac{3x-3-1}{e-1} \geq 0$. $\ln(x-1) + 2 - x < 0$

$$3x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{4}{3}$$

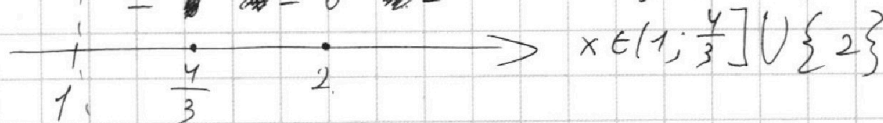
При $x \geq \frac{4}{3}$, $\ln(3x-3) \geq 0$, при $x < \frac{4}{3}$, $\ln(3x-3) < 0$.

Применим метод интервалов:

$\ln(3x-3)$		-	0	+	+	+
$\ln(x-1) + 2 - x$		-	-	0	-	-

Умножая $0 \cdot 3 \cdot x - 1 > 0$
 $(x > 1)$

Получим:



Ответ: $x \in (1; \frac{4}{3}] \cup \{2\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

$y = -\frac{2x^3}{3} + ax$. Заметим, что $y(0) = 0$.

Точки пересечения графиков $y = -\frac{2x^3}{3} + ax$ и $y = 3x$.

являются ~~точками~~ вершинами квадрата, которые зажимают его диагональ (крюке точки $(0; 0)$, т.к. это центр диагонали).

$-\frac{2x^3}{3} + ax = 3x \Rightarrow -\frac{2x^2}{3} + a = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2}(a-3)$

$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}(a-3)}$ ($a > 3$)

$y_{1,2} = \pm 3 \sqrt{\frac{3}{2}(a-3)}$

Диагонали квадрата перпендикулярны, следовательно остальные 2 точки квадрата лежат на прямой $y = -\frac{1}{3}x$ (т.к. прямые $y = 3x$ и $y = -\frac{1}{3}x$ перпендикулярны).

$-\frac{2x^3}{3} + ax = -\frac{1}{3}x \Rightarrow -\frac{2}{3}x^2 + a = -\frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = (a + \frac{1}{3}) \cdot \frac{3}{2}$

$x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}(a + \frac{1}{3})}$

$y_{3,4} = \mp \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2}(a + \frac{1}{3})}$

Расстояния от каждой точки квадрата до его центра равны между собой, то есть:

~~$(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 = (x_3 - 0)^2 + (y_3 - 0)^2$~~ $(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 = (x_3 - 0)^2 + (y_3 - 0)^2$

т.к. центр квадрата находится в точке $(0; 0)$.

$x_1^2 + y_1^2 = x_3^2 + y_3^2$

$\frac{3}{2}(a-3) + 9(\frac{3}{2}(a-3)) = \frac{3}{2}(a + \frac{1}{3}) + \frac{1}{9}(\frac{3}{2}(a + \frac{1}{3}))$

$(a-3) \cdot 15 = (a + \frac{1}{3}) \cdot \frac{5}{3}$

$9(a-3) = (a + \frac{1}{3})$

$9a - a = 27 + \frac{1}{3}$

$8a = \frac{81+1}{3} = \frac{82}{3}$

$a = \frac{82}{24} = \frac{41}{12}$

длины диагоналей квадрата:

$\frac{d}{2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}(\frac{41}{12}-3) + 9 \cdot \frac{3}{2}(\frac{41}{12}-3)} = \sqrt{15} \cdot \sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{5}{2}$

$d = 5$ - диагональ квадрата.

$S = (\frac{d}{\sqrt{2}})^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{25}{2}$ - площадь квадрата.

Ответ: $a = \frac{41}{12}$,

$S = \frac{25}{2}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

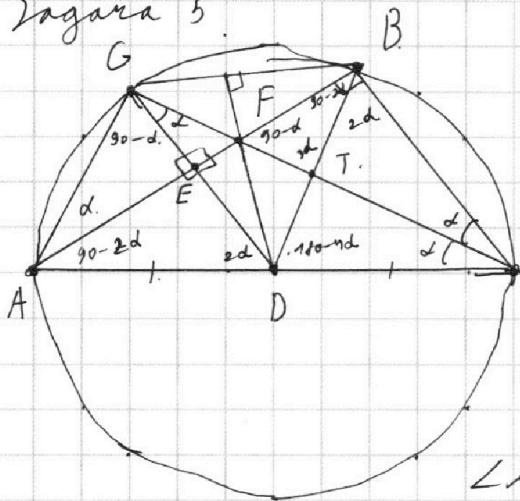
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5



$$\angle ACF = \angle FCB. \text{ (CF - бисс.)}$$

$$DE \parallel BC \text{ (DE - ср. линия)}$$

$$\text{Тогда } \angle ACF = d = \angle FCB.$$

$$\text{Тогда } \angle ADE = \angle ACB = 2d.$$

$$\angle GDC = 180^\circ - \angle ADE = 180^\circ - 2d.$$

$$\angle DGC = 180^\circ - \angle GDC - \angle ACG = d.$$

$$\angle DGC = \angle DCG \Rightarrow GD = DC.$$

$$AD = CD \text{ (D - середина AC)}$$

$$AD = CD = GD \Rightarrow \angle AGC = 90^\circ \text{ (GP - медиана)}$$

$$\angle AGC = 90^\circ \Rightarrow AC - диаметр. (\angle C = 180^\circ)$$

D - середина диаметра AC \Rightarrow D - центр окружности.

$$\angle ABC = \angle AGC = 90^\circ = \angle AED.$$

$$DB = CD \Rightarrow \angle BDC = 180^\circ - 4d$$

$$\angle BAC = 90^\circ - 2d \Rightarrow \angle ADE = 2d$$

$$\angle GDB = 180^\circ - 2d - (180^\circ - 4d) = 2d. \quad GD = BD \Rightarrow \angle DGB = \angle DBG = \frac{180^\circ - 2d}{2}$$

$$\angle DGB = 90^\circ - d \Rightarrow \angle CGB = 90^\circ - 2d.$$

$$\angle DBG = 90^\circ - d \Rightarrow \angle ABG = d.$$

$$BD \parallel AG \Rightarrow \angle DTC = 90^\circ = \angle FTB \Rightarrow \angle DTF = \angle FTB.$$

$$d = 30^\circ.$$

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BCA = 60^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

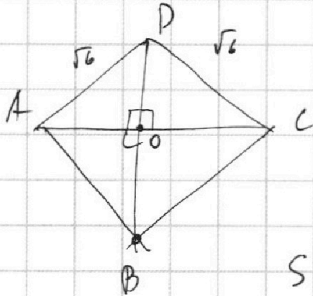
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

Рассмотрим $ABCD$:



$$AD = CD, AB = BC \Rightarrow AC \perp BD, AO = OC = \frac{AC}{2}$$

$$AO = \sqrt{3} \Rightarrow OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{3}$$

$$OB = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$BD = ~~AO~~ OD + OB = 3\sqrt{3}$$

$$SD \perp ABCD \Rightarrow SA^2 = SD^2 + AD^2, SB^2 = SD^2 + BD^2$$

Пусть $SD = h$. Тогда $SA = \sqrt{h^2 + 6}$, $SB = \sqrt{h^2 + 27}$.

Из условия $SA + SB = 2\sqrt{3} + \sqrt{25}$

$$\sqrt{h^2 + 6} + \sqrt{h^2 + 27} = 2\sqrt{3} + \sqrt{25} = \sqrt{3}(2 + \sqrt{5})$$

$$\sqrt{\frac{h^2}{3} + 2} + \sqrt{\frac{h^2}{3} + 9} = (2 + \sqrt{5}) \quad \text{Пусть } \frac{h^2}{3} = t$$

$$t + 2 + t + 9 + 2\sqrt{(t+2)(t+9)} = (2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$$

$$t + \sqrt{(t+2)(t+9)} = 2\sqrt{5} - 1$$

$$(t+2)(t+9) = (2\sqrt{5} - 1 - t)^2$$

$$t^2 + 11t + 18 = t^2 - 2t(2\sqrt{5} - 1) + (2\sqrt{5} - 1)^2 = t^2 - 4t\sqrt{5} + 2t + 20 - 4\sqrt{5} + 1$$

$$9t + 4t\sqrt{5} = 3 - 4\sqrt{5}$$

$$t = \frac{3 - 4\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}} \Rightarrow h^2 = \frac{9 - 12\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}} = (9 - 12\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5}) = 81 + 240 - 4\sqrt{5}(27 + 9)$$

$$h^2 = 321 - 36 \cdot 4\sqrt{5}$$

$$h = SD = \sqrt{321 - 144\sqrt{5}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{321 - 144\sqrt{5}}}{3} \cdot \frac{AC \cdot BD}{2} = 3\sqrt{321 - 144\sqrt{5}} - \text{объем пирамиды}$$

Ответ: $V = 3\sqrt{321 - 144\sqrt{5}}$ - объем пирамиды

Пусть O' - проекция центра сферы на $ABCD$.

Сфера касается сторон SAB и SBC , поэтому



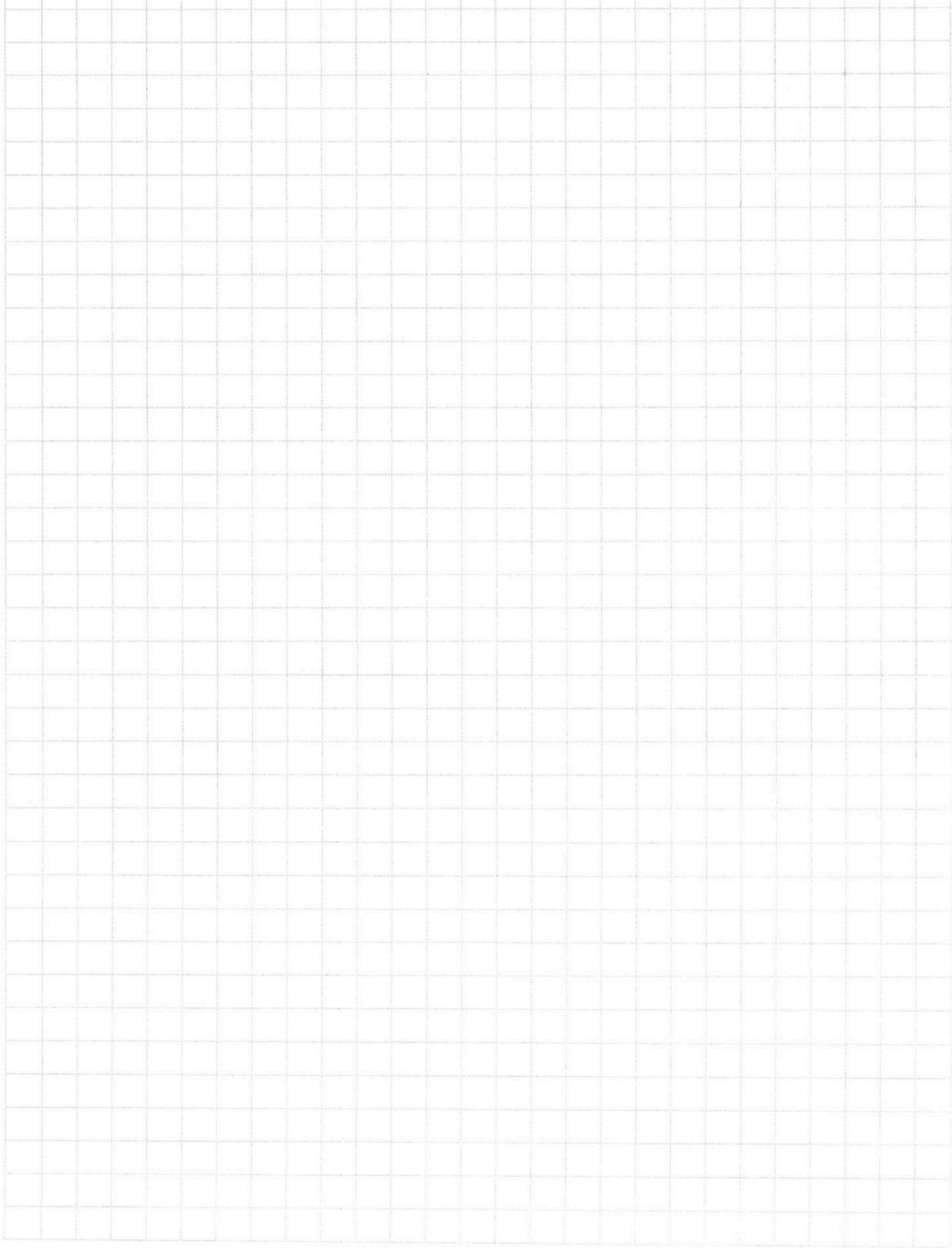
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$b^2 = ac$

$abc = b^3 = 13 \cdot 180 \cdot 73 \cdot 780$

$b = 13 \cdot 60 \cdot 174$

$ac = 13 \cdot 120 \cdot 74$

$a = 13 \cdot d \cdot 74$

$c = 13 \cdot (120 - d) \cdot 114$

$d, \beta \in [0; 120]$

$d = 13 \cdot 60 - d \cdot 74$

$a = -13 \cdot d \cdot 74$

$c = -13 \cdot (120 - d) \cdot 114$

$14 \cdot 120 \cdot 120 = 14400$

$14400 \cdot 2 = 28800$

$\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{23}}$

$\angle DGC = d$

$CF = x\sqrt{2}$

$DF = x\sqrt{23}$

$\triangle CEF \sim \triangle BCF$

$360 = 180 - d + 180 - \beta + \varphi$

$(\varphi = d + \beta)$

$\angle EFC = d + \beta$

$\angle AGL = 90^\circ$

$\angle C = 180^\circ$

AC - диаметр

D - центр

$\angle ABC = 90^\circ$

B - окружность

$\frac{AG}{2R} = \frac{FB}{x\sqrt{2}}$

$23x^2 = 2x^2 + R^2 - 2 \cdot x\sqrt{2} \cdot R \cdot \cos d$

$(R^2 - 21x^2)y = x\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2} \cdot R = 2x^2R$

$\cos d = \frac{R^2 - 21x^2}{2x\sqrt{2}R} = \frac{x\sqrt{2}}{24}$

$180 - 90 + d - 90 + 2d + \varphi = 180$

$\varphi = 180 - 3d$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 + \frac{11}{y^3} = y^3 + \frac{11}{z^3} = z^3 + \frac{11}{x^3}$$

$$\begin{cases} x^3 + \frac{11}{y^3} = t \\ y^3 + \frac{11}{z^3} = t \\ z^3 + \frac{11}{x^3} = t \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 3t \\ x^3 y^3 z^3 + 11x^3 = t x^3 z^3 \\ x^3 y^3 z^3 + 11y^3 = t y^3 z^3 \\ x^3 y^3 z^3 + 11z^3 = t z^3 x^3 \end{cases}$$

$$x^6 y^3 z^3 + 11x^3 z^3 = x^3 y^6 z^3 + 11x^3 y^3 = x^3 y^3 z^6 + 11y^3 z^3$$

$$x^6 y^3 z^3 + 11x^3 z^3 = x^3 y^6 z^3 + 11x^3 y^3$$

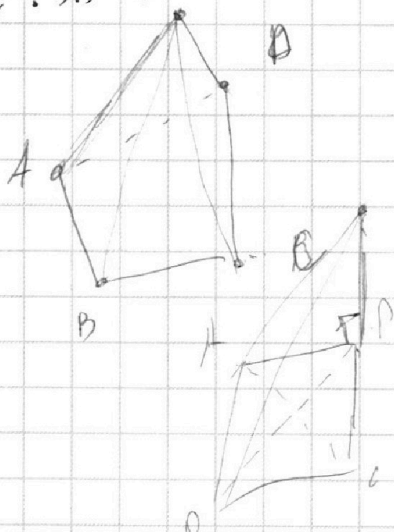
$$x^3(x^3 y^3 z^3) + x^3 \cdot 11z^3 - x^3 \cdot y^6 z^3 - 11x^3 \cdot y^3 = 0$$

$$11x^3(z^3 - y^3) + z^3 \cdot x^6 y^3 - z^3 \cdot x^3 y^6 = 0$$

$$11(z^3 - y^3) + z^3 \cdot x^3 y^3 - z^3 \cdot y^6 = 0$$

$$11(z^3 - y^3) = z^3 y^3 (y^3 - x^3)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 9$$

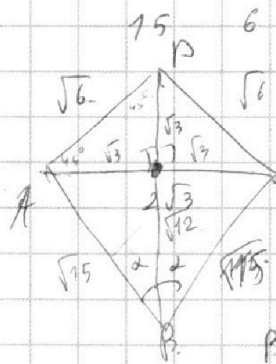
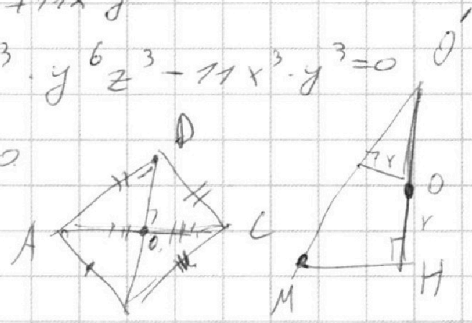


$$AB = BC = \sqrt{15}$$

$$AD = DC = \sqrt{6}$$

$$AC = 2\sqrt{3}$$

$$SO \perp ABCD$$



$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$c \cdot \cos d = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$b \cdot \sin d = \frac{1}{2}$$

$$SO = h$$

$$GA = \sqrt{h^2 + 6}$$

$$SB = \sqrt{h^2 + 24}$$

$$PD = \sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{h^2}{3} + 2} + \sqrt{\frac{h^2}{3} + 9} = 2 + \sqrt{5}$$

$$\sqrt{6+2} + \sqrt{6+9}$$

$$\sqrt{h^2+6} + \sqrt{h^2+24} = 2\sqrt{3} + \sqrt{15} = \sqrt{3}(2 + \sqrt{5})$$

$$h^2+6 + h^2+24 + 2\sqrt{(h^2+6)(h^2+24)} = 3 \cdot (4+5+4\sqrt{5}) = 3(9+4\sqrt{5}) = 27 + 12\sqrt{5}$$

$$2t + 2\sqrt{(t+6)(t+24)} = 12\sqrt{5} - 6$$

$$(t+6)(t+24) = (6\sqrt{5}-3-t)^2$$

$$t^2 + 33t + 24 \cdot 6 = (6\sqrt{5}-3)^2 + t^2 - 2t(6\sqrt{5}-3)$$

$$t(33+6\sqrt{5}-3) = (6\sqrt{5}-3)^2 - 24 \cdot 6 = 9(2\sqrt{5}-1)^2 - 9 \cdot 3 \cdot 6$$

$$t(30+6\sqrt{5}) = 9(20+1-4\sqrt{5}-18) = 9(3-4\sqrt{5})$$

$$t = \frac{9(3-4\sqrt{5})}{3(10+2\sqrt{5})} = \frac{9-12\sqrt{5}}{25+2\sqrt{5}} = \frac{(9-12\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})}{100-20} = \frac{90-120\sqrt{5}-18\sqrt{5}+24 \cdot 5}{80}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{t+2} + \sqrt{t+9} = 2 + \sqrt{5}$$

$$(\sqrt{t+2} + 2\sqrt{(t+2)(t+9)} + \sqrt{t+9}) = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$$

$$2t + 2\sqrt{(t+2)(t+9)} = 4\sqrt{5} - 2$$

$$\sqrt{(t+2)(t+9)} = 2\sqrt{5} - 1 - t$$

$$t^2 + 11t + 18 = (t - (2\sqrt{5} - 1))^2 = t^2 - 2t(2\sqrt{5} - 1) + (2\sqrt{5} - 1)^2$$

$$11t + 4t\sqrt{5} + 2t = (20 - 4\sqrt{5} + 1) - 4t\sqrt{5} + 4t$$

$$t(9 + 4\sqrt{5}) = 3 - 4\sqrt{5} \quad \frac{h^2}{3} = \frac{3 - 4\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}}$$

$$\frac{9 - 12\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}} = \frac{9 + 4\sqrt{5} - 16\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}} = 1 - \frac{12\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}}$$

$$h^2 = \frac{9 - 12\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}} = \frac{(9 - 12\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5})}{(9 + 4\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5})} = \frac{81 - 160}{81 - 160} = \frac{(9 - 12\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5})}{11}$$

$$h^2 = 81 - 9(12\sqrt{5} + 4\sqrt{5}) + 48 \cdot 5 = 321 - 9 \cdot 16 \cdot \sqrt{5} \quad 81 - 12 \cdot 9\sqrt{5} + 4\sqrt{5} \cdot 9 + 48 \cdot 5$$

$$9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 8\sqrt{5} + 48 \cdot 5 - 1 + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 0 \\ \tan 2x &= 0 \\ \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \times 121 \\ \times 121 \\ + 121 \\ \hline + 242 \\ 121 \\ \hline 1.4641 \end{array}$$

$$\frac{x-2}{x-1}$$

$$\begin{array}{r} \times 74641 \\ \times 74641 \\ + 74641 \\ \hline + 149282 \\ 74641 \\ \hline 29282 \end{array}$$

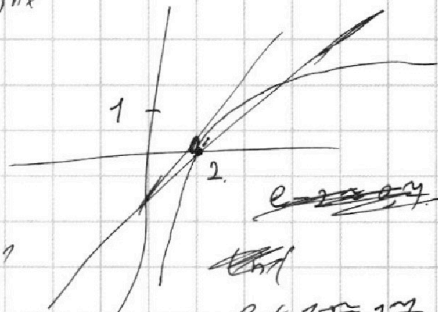
$$\ln(2-x) = 0$$

$$\ln(x-1) = 1$$

$$\ln(x-1) + 2 - x \geq 0$$

$$\ln(x-1) \geq x-2$$

$$\frac{y-ay}{x-1} \quad (\ln(x-1))' = \frac{1}{x-1}$$



$$e + 1 = 37$$

$$\ln e = 1$$

$$y(2) \quad y = f(x) + (x-x_0) \cdot f'(x) =$$

$$(\ln(x-1))' = \frac{1}{x-1} \quad y = 0 + (x-2) \cdot \frac{1}{x-1}$$

$$x-2 \geq \ln(x-1)$$

$$\ln(x-1) + 2 - x \leq 0$$

$$20x_1^2 = \frac{20}{9}x_3^2$$

$$9x_1^2 = x_3^2$$

$$9 \cdot \frac{3}{2}(a-3) = \frac{3}{2}(a + \frac{1}{3})$$

$$9a - 27 = a + \frac{1}{3} \quad 8a = 27 + \frac{1}{3} = \frac{27 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{82}{3}$$

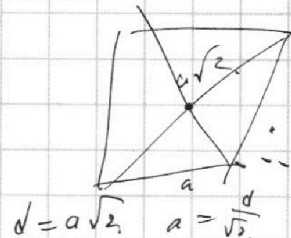
$$8a = \frac{82}{3} \quad a = \frac{82}{3 \cdot 8} = \frac{41}{12}$$

$$x_1^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{41}{12} - \frac{36}{12} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{12}$$

$$x_3^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{41}{12} + \frac{4}{12} \right) = \frac{3 \cdot 45}{2 \cdot 12}$$

$$\sqrt{\frac{15 \cdot 5}{12}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 5}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$S = a^2 = \left(\frac{d}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{d^2}{2}$$



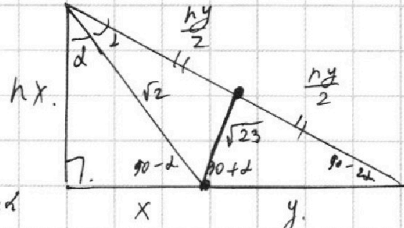
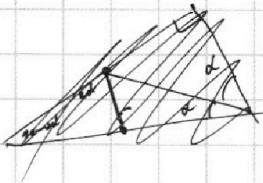
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~cos d~~

$$x^2 = n^2 x^2 + 2 - 2\sqrt{2} \cdot nx \cdot \cos d$$

$$\cos d = \frac{n^2 x^2 + 2 - x^2}{2\sqrt{2} \cdot nx}$$

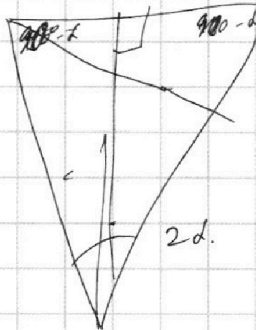
$$2 \cdot 3 = \frac{n^2 y^2}{4} + 2 - \frac{ny}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos d$$

$$\cos d = \frac{\frac{n^2 y^2}{4} - 21}{ny \sqrt{2}}$$

$$90 - 2d \quad d$$

$$(n^2 x^2 + 2 - x^2)y = \frac{n^2 y^2}{2} - 42$$

$$-4 \quad -4 \quad -5$$



$$4 + 4 + 5 + 4 + 2 + 2 =$$

$$27 / 34$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1. $6 \operatorname{ctg} 2x - 1 + \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) = 0$

$$\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\cos(x - \frac{\pi}{4})}{\sin(x - \frac{\pi}{4})} = \frac{\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$$

$$\frac{12 \sin x \cdot \cos x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} + \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} = 1$$

$$12 \sin x \cdot \cos x - (\cos x + \sin x)^2 = \cos 2x$$

$$12 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x - 2 \cos x \cdot \sin x - \sin^2 x = \cos 2x$$

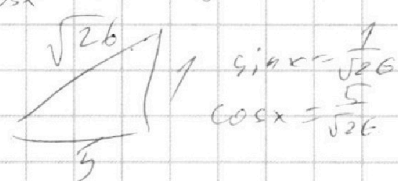
$$-2 \cos^2 x + 10 \cos x \cdot \sin x = 0$$

$$\cos x (\cos x - 5 \sin x) = 0$$

$\cos x = 0$ or $\cos x = 5 \sin x$

2) $\cos x = 5 \sin x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{5} \Rightarrow \operatorname{ctg} x = \frac{1}{5} \Rightarrow \operatorname{ctg} 2x = \frac{1 - \frac{1}{25}}{2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{24}{25}} = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$$



$$\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$\frac{\frac{1}{5} - 1}{\frac{24}{25} + 1} = -\frac{4}{29}$$

$$\ln^2(x-1) - (x-2) \ln(3x-3) + (\ln 3) \cdot \ln(x-1) \geq 0$$

$$\ln(3x-3) = \ln(3(x-1)) = \ln 3 + \ln(x-1)$$

$$\ln^2(x-1) - (x-2)(\ln 3 + \ln(x-1)) + (\ln 3)(\ln(x-1)) \geq 0$$

$$t^2 - (e^t - 1)(\ln 3 + t) + (\ln 3) \cdot t \geq 0$$

$$(\ln(x-1) + 1)(\ln(x-1) + \ln 3) - (x-1)(\ln 3 + \ln(x-1)) + \ln 3(\ln(x-1) + 1) \geq 0$$

$$(\ln(x-1) + 1)(\ln(x-1) + \ln 3) - (x-1)(\ln 3 + \ln(x-1)) \geq 0$$

$$(\ln(x-1) + 1)(\ln(x-1) + \ln 3) - (x-1)(\ln 3 + \ln(x-1)) \geq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\ln^2(x-1) + (1-x)(\ln 3 + \ln(x-1)) + \ln 3 + \ln(x-1) + (\ln 3) \cdot \ln(x-1) \geq 0$$

$$(\ln(x-1) + 1)(\ln(x-1) + \ln 3) + (\ln 3 + \ln(x-1)) \cdot (1-x) \geq 0$$

$$(\ln 3 + \ln(x-1))(\ln(x-1) + 1 + 1-x) \geq 0$$

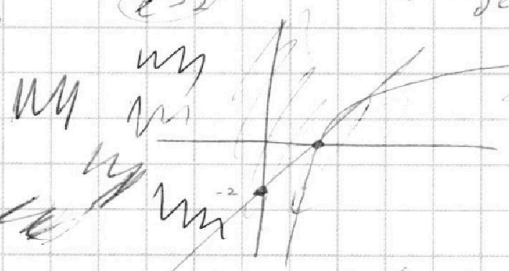
$$\ln(3x-3) \cdot (\ln(x-1) + 2-x) \geq 0$$

$(90-20) + (90-2) \cdot 2 - x \geq 0$
 $\ln(x-1) \geq x-2$
 $2 = \log_e e^2$
 $x = \log_e e^x$

① ④ ③+

$$\ln(x-1) + \ln e^2 - \ln e^x \geq 0$$

$$\ln(e^2 \cdot (x-1)) \geq \ln e^x$$



$$e^2 \cdot (x-1) \geq e^x$$

$$(x-1) \geq \frac{e^x}{e^2} = e^{x-2}$$

$f(x) = \ln(x-1)$	$x=2$	$x=3$	$e+1$
$g(x) = x-2$	0	1	1
$f(x)$	1	1	1
$g(x)$	0	1	1

$$\ln(x-1) = x-2 = (x-1) - 1$$

$$\ln a = a-1$$

$$\ln a \cdot e = a$$

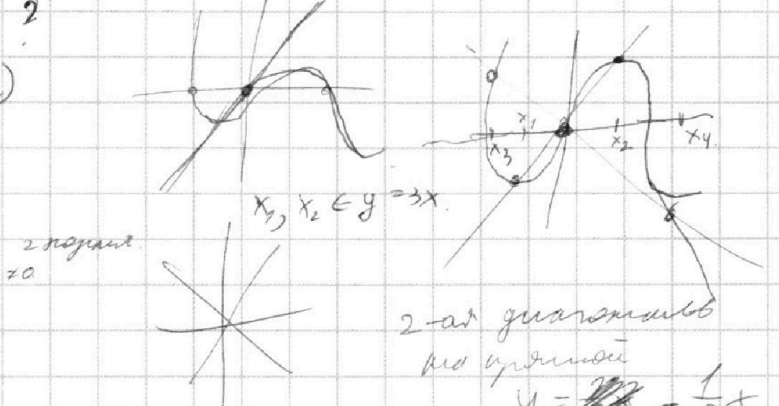
$$\ln' x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{x+\Delta x - x} = \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$y = -\frac{2x^3}{3} + ax = x(-\frac{2x^2}{3} + a)$$

$$y(0) = 0$$

$$x(a - \frac{2x^2}{3}) = 0$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}a}$$



$$-\frac{2x^3}{3} + ax = 3x$$

$$-\frac{2x^2}{3} + a = 3$$

$$a-3 = \frac{2x^2}{3}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}(a-3)}$$

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

$$x_1^2 + \frac{1}{9}x_1^2 = \frac{-2x_1^3}{3} + ax_1 = -\frac{1}{3}x_1$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{2(a-3)}{3}}$$

$$y_1 = 3x_1 = \sqrt{6(a-3)}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{2(a-3)}{3}}$$

$$y_2 = \sqrt{6(a-3)}$$

$$x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}}$$

$$y_3 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}}$$

$$x_4 = \sqrt{\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}}$$

$$y_4 = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$$

$$3a+1 = 12a-36$$

$$37 = 9a$$

$$a = \frac{37}{9}$$

$$\frac{5}{13} - 1 = \frac{3}{2} = \frac{5+1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{12}$$