



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Решите уравнение

$$3 \operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg} \left( x + \frac{3\pi}{4} \right).$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $2^{150} \cdot 3^{150}$ ?
3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2 x - (x - 1) \ln(2x) + (\ln 2) \ln x \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = x^3 - ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = -4x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и площадь квадрата.
5. [6 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AC$  и  $AB$  соответственно,  $CF$  – биссектриса треугольника  $ABC$ . Лучи  $DE$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что  $\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$ .
6. [5 баллов] Числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения  $xyz$ .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит четырёхугольник  $ABCD$ , в котором  $AB = BC = \sqrt{5}$ ,  $AD = DC = \sqrt{2}$ ,  $AC = 2$ . Ребро  $SD$  – высота пирамиды. Известно, что  $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$ . Найдите:
- а) объём пирамиды;
- б) радиус шара, касающегося граней  $ABCD$ ,  $SAB$ ,  $SBC$  и ребра  $SD$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3 \operatorname{tg} 2x + 7 = \operatorname{tg} \left( 2x + \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$3 \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\cos 2x} = \operatorname{tg} \left( 2x + \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{\sin \left( 2x + \frac{3\pi}{4} \right)}{\cos \left( 2x + \frac{3\pi}{4} \right)}$$

$$\frac{6 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\sin x \cos \frac{3\pi}{4} + \cos x \sin \frac{3\pi}{4}}{\cos x \cos \frac{3\pi}{4} - \sin x \sin \frac{3\pi}{4}}$$

$$\frac{6 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = - \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$$

$$6 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = - \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \cdot (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$$

$$\cos x + \sin x \neq 0 \quad \text{всегда} \Rightarrow$$

$$6 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = -(\cos x - \sin x)^2$$

$$4 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$$

$$\cos x (2 \sin x + \cos x) = 0$$

$$1) \cos x = 0$$

$$2) 2 \sin x = -\cos x \quad /: \cos x$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x \neq 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$x_2 = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a, b, c$  - геом. прогрессия  $\Rightarrow$

$$b = q \cdot a \quad c = q^2 \cdot a \quad , \quad q - \text{целое, т.к. иначе } b \text{ или } c - \text{не целые.}$$

$$abc = 2^{150} \cdot 3^{150}$$

$$q^3 \cdot a^3 = 2^{150} \cdot 3^{150}$$

$$q \cdot a = 2^{50} \cdot 3^{50}$$

$a$  можно представить как  $\pm 2^n \cdot 3^k$ , то есть

вариантов составления  $a$  так, чтобы

$$q = \frac{2^{50} \cdot 3^{50}}{a} \quad \text{было целым всего } 2 \cdot n_{\max} \cdot k_{\max}$$

(коэф. 2 из-за знака)

$$2 n_{\max} k_{\max} = 2 \cdot 50 \cdot 50 = 5000, \text{ при } n$$

$$\text{при } a = 2^{50} \cdot 3^{50}, \quad q = 1 \text{ и } a = b = c.$$

Ответ: ~~5000~~ Т.к. зная  $a$ , остальные

числа определяются однозначно, всего

троек  $a, b, c$  5000

Ответ: 5000

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\ln^2 x - (x-1) \ln(2x) + (\ln 2) \ln x \geq 0 \quad x > 0$$

$$\ln x (\ln 2 + \ln x) - (x-1) \ln(2x) \geq 0$$

$$\ln x \cdot \ln(2x) - (x-1) \ln(2x) \geq 0$$

$$y = \ln(2x) (\ln x - x + 1) \geq 0$$

Найдем точки  $y(x) = 0$

$$1) \ln 2x = 0$$

$$2x = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$$

$$2) \ln x - x + 1 = 0$$

$$f(x) = \ln x - x + 1 = 0$$

$$f(1) = 0$$

$$x_2 = 1$$

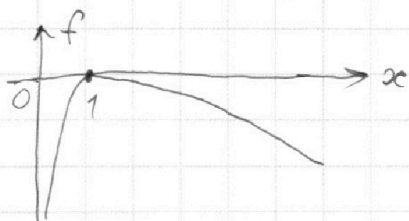
$$f(x) = \ln x - x + 1 \quad \left| \frac{d}{dx} \right.$$

$$f' = \frac{1}{x} - 1$$

$$f' = 0 = \frac{1}{x} - 1$$

$x = 1 \Rightarrow$  м.к. при  $x \rightarrow 0$   $f \rightarrow -\infty$ ,

$$f(1) = f_{\max} = 0 \Rightarrow f \leq 0 \text{ всегда.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left. \begin{array}{l} y = \ln(2x) \cdot f \geq 0 \\ f \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ln(2x) \leq 0$  - решение.

$$g(x) = \ln(2x)$$

$$g(x) \uparrow$$

$$x \leq x_1$$

$$x \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Ответ: } x \leq \frac{1}{2}$$

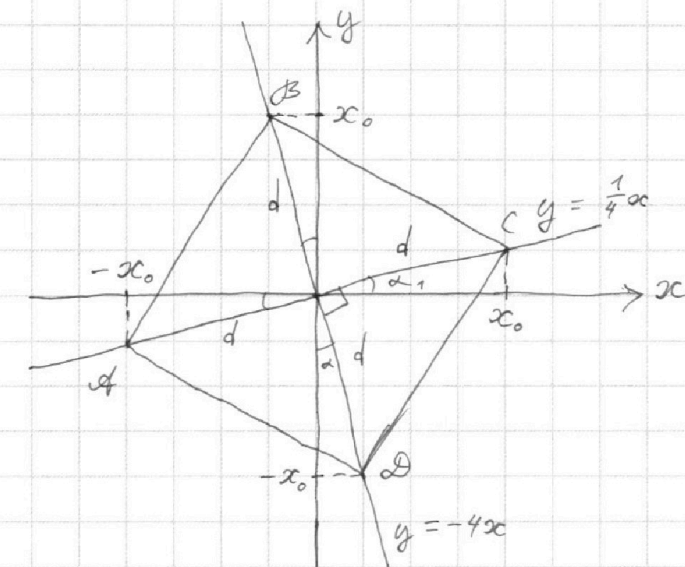
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\alpha_1 = \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

вторая четверть

лежит на прямой

$$y = \frac{1}{4}x$$

Для A и C:

$$y = \frac{x}{4} = x^3 - ax$$

$$x^3 - x\left(a + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$x = 0$  - не подходит

$$x = \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}}$$

$$x_0 = \sqrt{a + \frac{1}{4}} \text{ - в м. C.}$$

Для B и D:

$$y = -4x = x^3 - ax$$

$x = 0$  - не подходит

$$x = \pm \sqrt{a - 4}$$

$$y = -x_0 = -4\sqrt{a - 4} \text{ - в м. D.}$$

$$x_0 = 4\sqrt{a - 4}$$

$$\sqrt{a + \frac{1}{4}} = 4\sqrt{a - 4}$$

$$a = \frac{257}{60}$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{257}{60} = 4 \frac{17}{60}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S = (d \cdot \sqrt{2})^2 = 2d^2$$

По т. Пифагора:

$$d^2 = x_0^2 + \left(\frac{1}{4}x_0\right)^2$$

$$S = 2d^2 = \frac{17}{8}x_0^2 = \frac{17}{8} \cdot \left(\frac{257}{60} + \frac{1}{4}\right) = \frac{34}{3} = 11\frac{1}{3}$$

Ответ:  $S = 11\frac{1}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

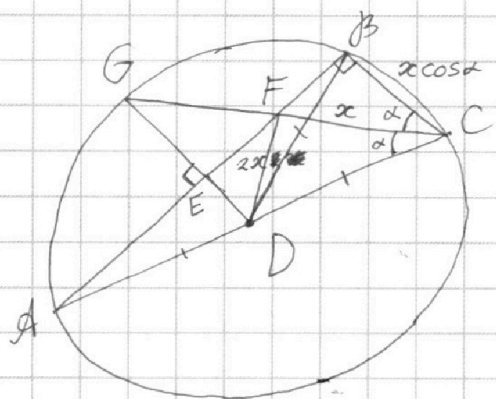
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2) D совп. с O;



$$\frac{FC}{DF} = \frac{1}{2}$$

$$FC = x; FD = 2x$$

$\angle BCF = \angle ABC$  опирается

на диаметр  $\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$

$$BC = x \cos \alpha$$

BD - радиус;  $BD = CD$

$CD \cos 2\alpha = \frac{x \cos \alpha}{2}$ , т.к.  $\triangle BCD$  - равнобедренный.

$$CD = \frac{x \cos \alpha}{2 \cos 2\alpha}$$

По т. косинусов в  $\triangle FDC$ :

$$4x^2 = x^2 + \frac{x^2 \cos^2 \alpha}{4 \cos^2 2\alpha} - 2 \cdot x \cdot \frac{x \cos \alpha}{2 \cos 2\alpha} \cos \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$3 = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - 4 \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \cdot \cos 2\alpha$$

$$4 \cos^2 2\alpha$$

$$28 \cos^2 2\alpha + 3 \cos 2\alpha - 1 = 0$$

$$D = 127$$

$$\cos 2\alpha = \frac{-3 \pm 11}{56} = \frac{1}{7}, \text{ т.к. } \cos 2\alpha > 0, \text{ т.к. } \angle \text{угол остр.}$$

$$\angle BCF = \arccos \frac{1}{7} \quad \frac{1}{7}$$

$$\angle BAC = \arcsin \frac{1}{7}, \text{ т.к. } \triangle ABC \text{ прямоугольный.}$$

Ответ:  $\angle ABC = 90^\circ$ ;  $\angle BCF = \arccos \frac{1}{7}$ ;  $\angle BAC = \arcsin \frac{1}{7}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

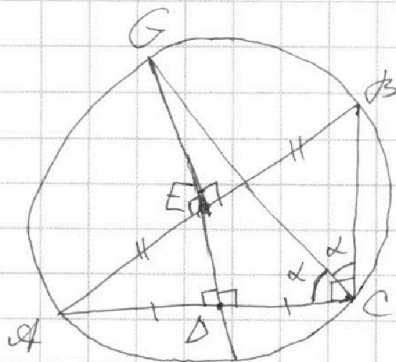
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\angle BCG = \angle GCA \Rightarrow$  хорды  $AG$  и  $GB$   
равны, тогда  $GE$  - медиана и высота  $\triangle ABG$ ,  
значит  $GE \perp AB$ .

Если  $O$  - центр  $\Omega$ , то  $EO \perp AB$ , но  
также  $GE \perp AB \Rightarrow$  значит  $G, E, O, D$   
лежат на одной прямой  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  т.к.  $OD$  и  $EO$  средние перпендикуляры  
 $AC$  и  $AB$  соответственно, либо  $AB \parallel AC$ ,  
чего не может быть, либо точка  $E$  и  $D$   
совпадает с  $O$ :

1)  $E$  совпадает с  $O$ :



$\angle ACB$  ~~опирается~~ <sup>опирается</sup> на диаметр  
 $\Rightarrow \alpha = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \Rightarrow$

дуги  $AG$  и  $BG$  <sup>и</sup> ~~не~~ ~~равны~~

равны  $2\alpha = 90^\circ \Rightarrow$

$GE \perp AB$ , но  $GD \perp AC \Rightarrow$

$AC \parallel BC \Rightarrow$  противоречие,

значит  $E$  не совпадает с  $O \Rightarrow$



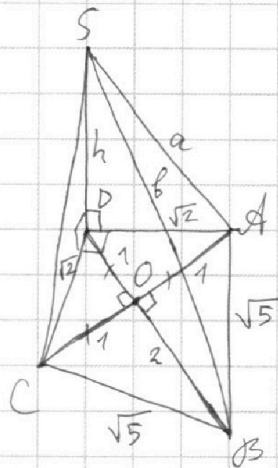
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



т.к.  $DC = \sqrt{2} = AD$ ;  $AC = 2$

$2^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CDA = 90^\circ$

~~$\triangle ADB = \triangle BCD$  по 3 сторонам~~

~~$\Rightarrow$  из симметрии  $AO = OC$~~

$DO$  -  $O$  - середина  $AC$ .

$DO$  - медиана и высота  $\triangle ADC$ ,  
 $OB$  - медиана и высота  $\triangle ABC$ . }  $\Rightarrow$

т.к.  $DO \perp AC$ ;  $OB \perp AC$ ;  $O \in DB$ ;

$DO = AO = OC = 1$ , т.к. прямоугол. тр.

$OB = \sqrt{5-1} = 2$

$\left. \begin{aligned} h^2 + DB^2 &= b^2 \\ h^2 + DA^2 &= a^2 \end{aligned} \right\} a > AD; b > DB \Rightarrow$

$a > \sqrt{2}$ ;  $b > 3$ , но  $a + b = 2 + \sqrt{5}$ .

Докажем, что такого  $ke$  не может быть:

$2 < 2\sqrt{2} \nrightarrow +3$

$\nrightarrow 5 < 3 + 2\sqrt{2}$

$\sqrt{5} < \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2}$

$\sqrt{5} < 1 + \sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2 + \sqrt{5} < 3 + \sqrt{2} \Rightarrow \text{значит}$$

$$2 + \sqrt{5} = a + b < 3 + \sqrt{2}, \text{ то}$$

$$a > \sqrt{2}; \quad b > 3 \Rightarrow \text{мы пришли}$$

$$\cancel{2 + \sqrt{5} = a + b} > \cancel{3 + \sqrt{2}} \quad \text{к противоречию} \Rightarrow$$

пирамида  $SABCD$  из условия задачи не  
может существовать.

Ответ: нет решений.



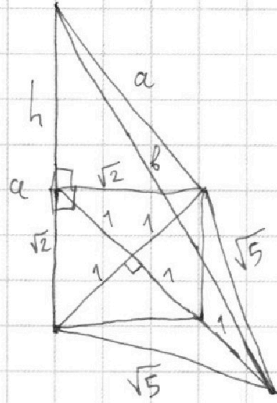
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

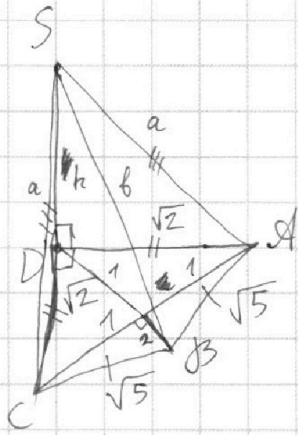
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 7



$$1) SA + SB = 2 + \sqrt{5}$$

$$\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2 \Rightarrow 90^\circ$$

$$V = \frac{(1+2)h}{3} = h$$

$$\begin{cases} 3^2 + h^2 = b^2 \\ 2 + h^2 = a^2 \\ a + b = 2 + \sqrt{5} \end{cases}$$

$$b = a = 2 + \sqrt{5} - a$$

$$\begin{cases} 3^2 + h^2 = (2 + \sqrt{5})^2 - 2(2 + \sqrt{5})a + a^2 \\ 2 + h^2 = a^2 \end{cases}$$

$$7 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 - 4a - 2\sqrt{5}a$$

$$2(2 + \sqrt{5})a = 2 + 4\sqrt{5}$$

$$2 + \sqrt{5} a = \frac{1 + 2\sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}$$

$$a^2 = \frac{1 + 4\sqrt{5} + 20}{4 + 4\sqrt{5} + 5} = \frac{21 + 4\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}}$$

$$h = \sqrt{a^2 - 2} = \sqrt{\frac{21 + 4\sqrt{5} - 18 - 8\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3 - 4\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}}}$$

$\sqrt{5} < 1 + \sqrt{2}$   
 $2 + \sqrt{5} < 3 + \sqrt{2}$   
 нет реш.  
 $\sqrt{4 + \sqrt{5}} < \sqrt{9} + \sqrt{2}$   
 $2 < 2\sqrt{2}$   
 $5 < 3 + 2\sqrt{2}$

or

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 6

$$x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}$$

~~$$x^3 y^3 z^3 + 7 x^3 z^3 = y^3$$~~

$$\begin{cases} x^3 y^3 z^3 + 7 z^3 = y^6 z^3 + 7 y^3 \\ x^3 y^3 z^3 + 7 x^3 = z^6 x^3 + 7 z^3 \\ x^3 y^3 z^3 + 7 y^3 = x^6 y^3 + 7 x^3 \end{cases}$$

$$3x^3 y^3 z^3 = y^6 z^3 + z^6 x^3 + x^6 y^3$$

$$y_1 = y^3 ; x_1 = x^3 ; z_1 = z^3$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{7}{y_1} = y_1 + \frac{7}{z_1} \\ y_1 + \frac{7}{z_1} = z_1 + \frac{7}{x_1} \end{cases}$$

$$y_1^2 + \frac{7}{z_1} y_1 - 7 - x_1 y_1 = 0$$

$$y_1^2 + y_1 \left( \frac{7}{z_1} - x_1 \right) - 7 = 0$$

$$D = \left( \frac{7}{z_1} - x_1 \right)^2 + 28$$

$$y_1 = \frac{x_1 - \frac{7}{z_1} \pm \sqrt{\left( \frac{7}{z_1} - x_1 \right)^2 + 28}}{2}$$

~~$$x_1 - \frac{7}{z_1}$$~~
$$\frac{x_1 + \frac{7}{z_1} \pm \sqrt{\dots}}{2} = z_1 + \frac{7}{x_1}$$

$$x_1 y_1 z_1 = y_1^2 z_1 + 7 y_1 - 7 z_1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

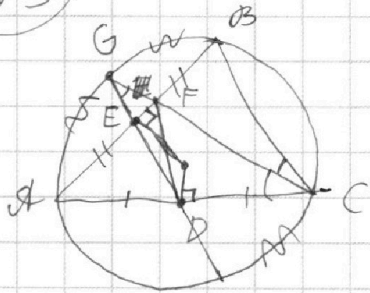
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

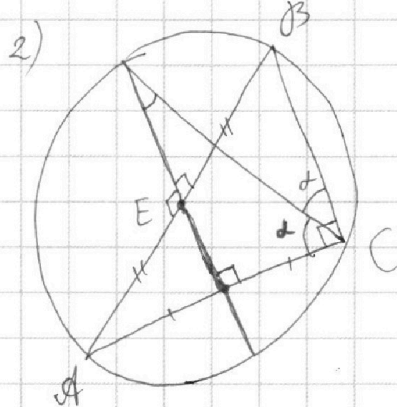
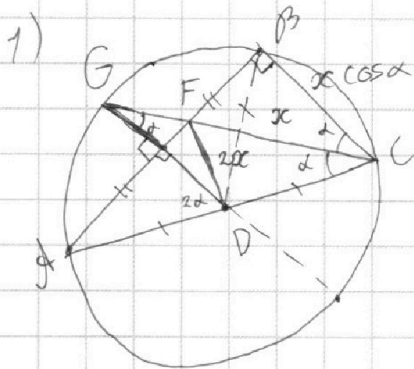


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5



$$\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$$



$\Rightarrow AB \perp AC$   
 $AB \parallel AC$   
 $\Rightarrow \text{т.с.м.}$

$$\angle B = 90^\circ$$

$$BD = DC = \frac{x \cos \alpha}{2} : \cos 2\alpha = \frac{x \cos \alpha}{2 \cos 2\alpha}$$

$$4x^2 = x^2 + \frac{x^2 \cos^2 \alpha}{4 \cos^2 2\alpha} - 2 \cdot x \cdot \frac{x \cos \alpha}{2 \cos 2\alpha} \cdot \cos \alpha$$

$$4x^2 - x^2 = 4 = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{4 \cos^2 2\alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha}$$

x

$$\beta = 2\alpha$$

$$\cos^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1 + \cos \beta}{2}$$

$$3 = \frac{\cos \frac{1 + \cos \beta}{2} - 4 \frac{1 + \cos \beta}{2} \cdot \cos \beta}{4 \cos^2 \beta}$$

$$3 \cdot 8 \cos^2 \beta = 1 + \cos \beta - 4 \cos \beta - 4 \cos^2 \beta$$

$$28 \cos^2 \beta + 3 \cos \beta - 1 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 28 = 121$$

$$\cos \beta = \frac{-3 \pm 11}{56} = \frac{1}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

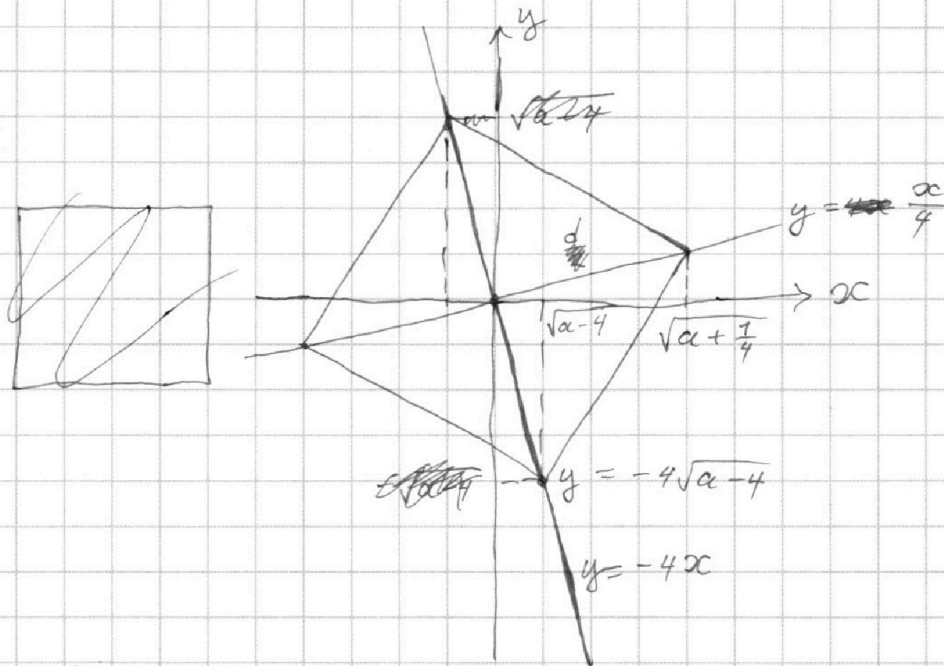
1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(N4)



$$1) y = \frac{x}{4} = x^3 - ax$$

$$x^3 - x(a + \frac{1}{4}) = 0$$

$$x(x^2 - a - \frac{1}{4}) = 0$$

$$x_1 = 0 - \text{клет.} \Rightarrow x^2 - a - \frac{1}{4} = 0$$

$$D = 1 + 1 = 2 \quad x = \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}}$$

$$y = \frac{\sqrt{a + \frac{1}{4}}}{4} = \frac{(\sqrt{a + \frac{1}{4}})^3}{4} - a \frac{\sqrt{a + \frac{1}{4}}}{4}$$

$$2) y = -4x = x^3 - ax$$

$$x^3 - x(a - 4) = 0$$

$$x = 0 - \text{клет}$$

$$x^2 = a - 4$$

$$x = \pm \sqrt{a - 4}$$

$$y = \mp 4\sqrt{a - 4}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{a - 4} = \sqrt{a + \frac{1}{4}}$$

$$16a - 64 = a + \frac{1}{4}$$

$$S = \left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{d^2}{2}$$

$$d^2 = \left(a + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{16}\right)$$

$$d^2 = \frac{5}{4}a + \frac{5}{16}$$

$$S = \frac{d^2}{2} = \frac{257}{48} + \frac{5}{16} =$$

$$= \frac{292}{96} = \frac{136}{48}$$

$$= \frac{68}{24}$$

$$= \frac{34}{12}$$

$$= \frac{17}{6}$$

$$\alpha = \frac{257}{60}$$

$$15\alpha = 64 \frac{1}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\ln^2 x - (x-1) \ln(2x) + (\ln 2) \ln x \geq 0$$

$$x > 0$$

$$\ln x \cdot \ln x - (x-1)(\ln 2 + \ln x) + \ln 2 \cdot \ln x \geq 0$$

$$\ln x (\ln x + \ln 2) - x(\ln 2 + \ln x) + \ln 2 + \ln x \geq 0$$

$$\ln x \ln 2x - x \ln 2x + \ln 2x \geq 0$$

$$\ln 2x (\ln x - x + 1) \stackrel{=}{\neq} 0$$

1)  $\ln 2x = 0$

$$2x = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

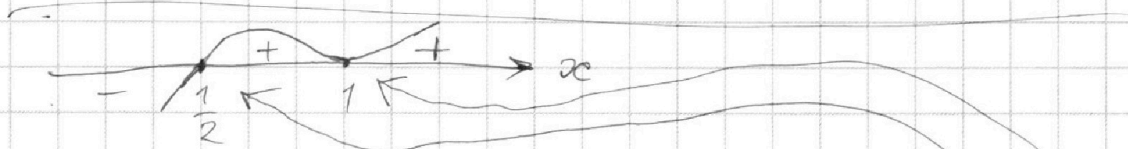
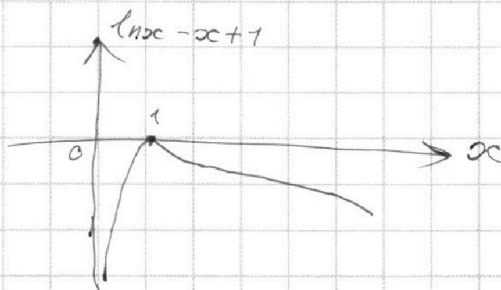
2)  $\ln x - x + 1 = 0$

$$\left| \frac{d}{dx} \right| \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 = 0$$

$$e^{x-1} = x$$

$$x = 1$$

$$x_2 = 1$$



$$\frac{d}{dx} = \left(\frac{1}{x} - 1\right) \ln 2x + 2 \cdot \frac{1}{2x} (\ln x - x + 1) =$$

$$= \frac{\ln 2x}{x} - \ln 2x + \frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x}$$

1)  $\frac{\ln 1 \cdot 2}{1} - \ln 1 + 2 \ln 1 - 1 + 2 = 1 > 0 \Rightarrow$

2)  $\frac{\ln 2}{2} - \ln 2 + \ln 1 - 1 + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~4000~~

N 1

$$3 \operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg} \left( x + \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$3 \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + 1 = \frac{\sin \left( x + \frac{3\pi}{4} \right)}{\cos \left( x + \frac{3\pi}{4} \right)}$$

$$\frac{6 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\sin x \cdot \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos x \cdot \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\frac{6 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\cos x - \sin x}{-\sin x - \cos x}$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x)^2 (\cos x + \sin x)}{-(\cos x + \sin x)}$$

$$6 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = -(\cos x - \sin x)^2$$

$$6 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = -\cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x$$

$$4 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$$

$$1) \cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) 2 \sin x + \cos x = 0 \quad /: \cos x$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 2

$a; b; c$

$$b = qa$$

$$c = q^2 a$$

$$a \cdot qa \cdot q^2 a = 2^{150} \cdot 3^{150}$$

$$q^3 a^3 = 2^{150} \cdot 3^{150}$$

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2}_{150} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \dots 3}_{150} = q^3 \cdot a^3$$

$$q^3 a^3 = (2^{50})^3 \cdot (3^{50})^3$$

$$qa = 6^{50} = 2^{50} \cdot 3^{50}$$

$a$  — 50 · 50 вариантов

2500