



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $2^{150} \cdot 3^{300}$ ?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $CF$  – биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $ED$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что площадь треугольника  $BCF$  в 16 раз больше площади треугольника  $DGF$ .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = x^5 + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = -3x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения  $abc$ .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность  $\omega$ , а на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , взяты точки  $E$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . На лучах  $EA$  и  $DC$  отметили точки  $X$  и  $Y$  соответственно таким образом, что  $AX = CF$  и  $CY = AF$ . Найдите площадь четырёхугольника  $BXFY$ , если  $BF = 17$ ,  $XY = 31$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Теперь вернем систему:

$$\begin{cases} x^3 + 4 \leq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \sqrt[3]{-4} \\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; \sqrt[3]{-4}]$$

Остаются отдельные решения систем.

$$x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [-1; 1]$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [-1; 1]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|$$

~~Решение~~ Воспользуемся известным неравенством:

$|a| + |b| \geq |a + b|$ . Из него следует неравенство  
во  $|a| + |b| \geq |a - b|$

Положим  $a = x^3 + 4$ ,  $b = x^2 - 1$ .

$$|a - b| = |x^3 + 4 - x^2 + 1| = |x^3 - x^2 + 5|$$

$$\text{То есть: } |x^3 + 4| + |x^2 - 1| \geq |x^3 - x^2 + 5|$$

$$\text{а по условию } |x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|$$

Значит, выполняется р-во.

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| = |x^3 - x^2 + 5|$$

В каких случаях  $|a| + |b| = |a - b|$ . Давайте посмотрим  
на знаки  $a$  и  $b$ . Если  $a > 0$  и  $b > 0$ , то  $|a| + |b| >$

$|a - b|$ . Если  $a < 0$  и  $b < 0$ , то  $|a| + |b| > |a - b|$

и т.д. Показано, что если  $a$  и  $b$  разного знака, то

выполняется знак, либо  $a \geq 0$ ,  $b \leq 0$ , либо

$b \geq 0$ ,  $a \leq 0$ . Рассмотрим эти случаи и решим их

$$\begin{cases} x^3 + 4 \geq 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt[3]{-4} \\ x \in [-1; 1] \end{cases} \rightarrow x \in [-1; 1]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c$  образуют геом. прогрессию.  $q$  — знаменатель прогрессии

$$b = aq, c = aq^2$$

$$abc = 2^{150} \cdot 3^{300} \quad \text{и еще } abc = a^3 q^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

значит,  $aq = 2^{50} \cdot 3^{100}$  полагая, что прогрессия

обратно убывает числом  $q$ , т.к.  $a = \frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q}$

Всего вариантов для  $q$ :

1) если  $q \geq 1$ , то 51. 101, т.к.  $q$  — может быть любым делителем числа  $2^{50} \cdot 3^{100}$ , а таких всего 51. 101.

2) если  $0 < q \leq 1$ , то тоже 51. 101 ~~вариантов~~, т.к. вариантов для  $q$

в случае, где  $q \geq 1$ , мы получим 51. 101 тройку  $(a, b, c)$ , если  $q \leq 1$ , мы получим 51. 101 тройку, которые будут иметь вид  $(c, b, a)$ . (просто они идут в тройке и возрастают)

Одну тройку мы посчитали дважды. Это случается, когда  $q = 1$ . Ок нам посчитан в обоих случаях. Поэтому

из ответа надо вычесть 1. То есть всего таких троек

$$2 \cdot 51 \cdot 101 - 1 = 10301$$

Ответ: ~~2.51.101~~ <sup>10301</sup> - 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$\text{Дискриминант } D = (13y-27)^2 - 4(y-2)(44y-94) =$$

$$= 169y^2 - 26 \cdot 27y + 729 - 4(44y^2 - 94y - 88y + 188) =$$

$$= -7y^2 - 702y + 729 + 376y + 352y - 752 =$$

$$= -7y^2 + 26y - 23$$

Дискриминант должен быть не меньше 0 и при этом ещё и полным квадратом. Интуитивно понятно,

что при довольно больших  $y$ , дискриминант отрицателен.

Отрицательные  $y$  как всегда рассматривать не будем. В этом

случае дискриминант меньше 0.

$$\text{При } y=1: D = -7 + 26 - 23 = -4 \text{ не подходит}$$

$$\text{При } y=2: D = -28 + 52 - 23 = 1$$

$$x = \frac{13y - 27 + 1}{2(y-2)} = \frac{26 - 27 + 1}{0} \text{ не подходит}$$

$$x = \frac{13y - 27 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ подходит}$$

Поэтому этот случай как не подходит.

$$\text{При } y=3: D = -7 \cdot 9 + 78 - 23 = -8 \text{ не подходит}$$

$$\text{При } y=4: D = -7 \cdot 16 + 104 - 23 = -31 \text{ не подходит}$$

Понятно, что рассматривать остальные  $y$  бесполезно, т.к.

$D$  уменьшается, при  $y \geq 5$  он тоже будет меньше 0.

Отсюда разберём случай  $y=2$  ещё раз.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

подставим  $y=2$  в ур-ие:

$$x + 88 - 94 = 0$$

$$x = 6$$

$$\boxed{y = 2; x = 6}$$

Вуз как с группами  $y$  были разобраны и при

кни  $D < 0$ , значит, нет корней.

Поэтому  $x=6; y=2$  - единственное ре-  
шение.

Ответ:  $x=6; y=2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\angle GAB = \angle BCG = 2$ , т.к. они опираются на одну дугу.

$\Rightarrow \angle GDA = \angle ADE = 90^\circ$ , а  $\angle ADE = \angle ABC$  — как соответствующие при  $BC \parallel DE$  и секущей  $AB$ .

$\triangle ABC$  — прямоугольный.  $\triangle GDF$  тоже прямоугольный, ~~так как~~

$\triangle GDF \sim \triangle CBF$  по двум углам:  $\angle GDC = \angle BCG$  и

и  $\angle GFD = \angle BFC \Rightarrow \frac{GF}{CF} = \frac{DF}{BF} = \frac{GD}{BC} = k$

и ~~след~~  $\frac{S_{GDF}}{S_{CBF}} = k^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow k = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{DF}{BF} = \frac{1}{4}$

Значит,  $\frac{BF}{AF} = \frac{2}{3}$

$\frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC}$  — свойство биссектрисы  $\frac{BC}{AC} = \frac{2}{3} = \cos \angle BCA$

$\Rightarrow \angle BCA = \arccos \frac{2}{3}$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = 90^\circ - \arccos \frac{2}{3}$

Ответ:  $90^\circ$ ;  $\arccos \frac{2}{3}$ ;  $90^\circ - \arccos \frac{2}{3}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\triangle ABC$

$CF$  - диаметр

$AD = BD$

$AE = CE$

$CF \cap ED = G$

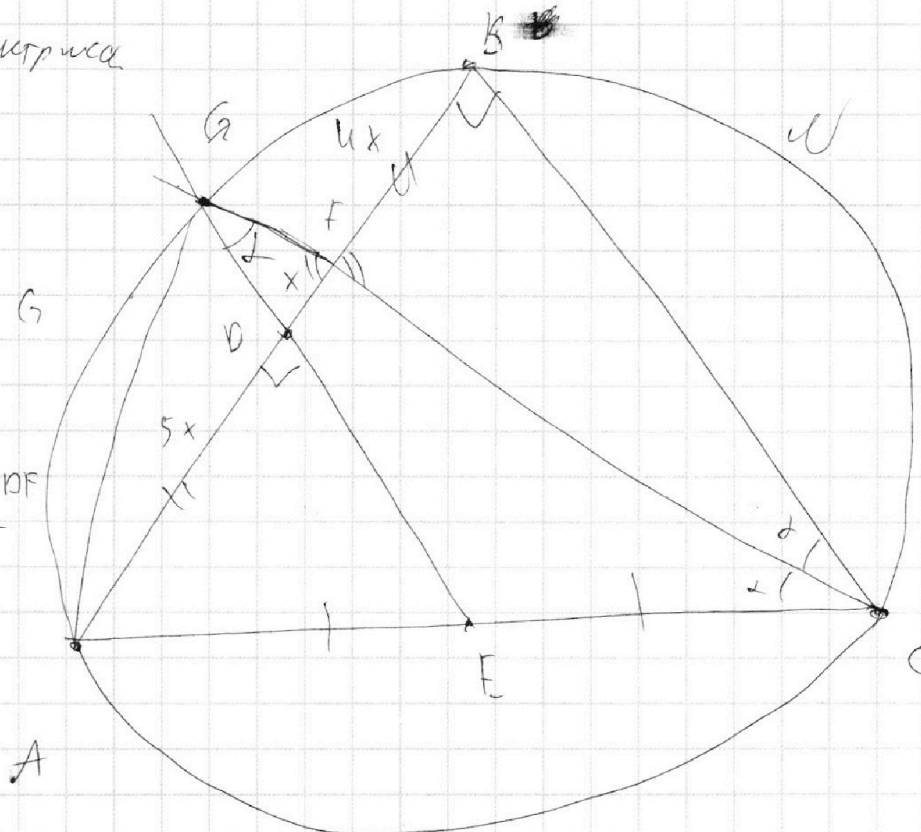
$G \in \omega$

$S_{BCF} = 16 S_{ADF}$

Найти:

угол  $\angle$

$\angle ABC$ .



Решение:

$\angle BCG = \angle GCA = \alpha$ .  $CF$  - диаметр

$DE$  - средняя линия  $\Rightarrow DE \parallel BC$ , а значит,  $\angle CGE = \angle$

$\angle BCG$  - как накрест лежащие при  $BC \parallel DE$ , секущей  $CG$ .

$\triangle CGE$  - р/б, т.к.  $\angle EGC = \angle GCE = \alpha \Rightarrow GE = CE =$

$= AE$ . Значит,  $GE$  - медиана  $\triangle AGC$  и она равна

половине стороны, к которой проведена. Значит,  $\triangle AGC$  - пря-

моугольный,  $\angle AGC = 90^\circ$ ,  $\angle AGE = 90^\circ - \alpha$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$240ax_0 = -730x_0$$

$$\Rightarrow 240a = -730 \Rightarrow a = -\frac{73}{24}$$

Если взять  $x_0 = -\frac{1}{3}x_1$ , то получится абсолютно такая же система. Значит,  $a = -\frac{73}{24}$

Теперь найдём сторону квадрата.

$$\text{Для этого найдём } x_0: ax_0 + x_0^5 = -3x_0$$

$$-\frac{73}{24}x_0 + x_0^5 = -3x_0$$

$$x_0^5 = \frac{1}{24} \quad x_0 = \pm \sqrt[5]{\frac{1}{24}} \quad \text{будем считать, что}$$

$$x_0 = \sqrt[5]{\frac{1}{24}}, \text{ т.к. будем воспринимать его, как расстоя-$$

ние. Длина диагонали квадрата  $\sqrt{2}$ :

$$2\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{24} + \frac{9}{24}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10}{\sqrt{24}}} = \sqrt{\frac{20}{\sqrt{6}}}$$

$$\text{Сторона квадрата равна: } \sqrt{\frac{20}{\sqrt{6}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{20}{\sqrt{6}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \sqrt{\frac{20}{\sqrt{6}}} = \sqrt{\frac{10\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{73}{24}; \sqrt{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

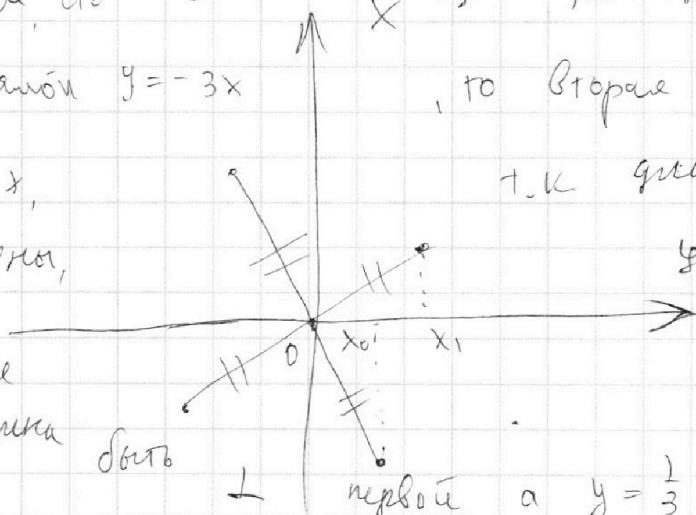


$$\begin{aligned} \neq f(x) &= x^5 + ax & f(-x) &= -x^5 - ax = -(x^5 + ax) = \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Значит,  $ax + x^5$  — нечетная функция,  
то есть все её точки (коорд.  $x_0$  и  $-x_0$ ) симметричны  
друг другу относительно начала координат.

Центр квадрата находится в начале координат и поэтому  
его вершины симметричны друг другу относительно  
начала координат, т.к. диагонали в квадрате делятся точкой  
пересечения диагоналей. Поэтому если две ~~соседние~~  
вершины квадрата лежат на графике  $f(x) = x^5 + ax$ , то  
другие две вершины тоже на нём лежат, только сам  
 $x$  этих вершин не таков, что стороны квадрата параллельны  
оси координат

Поймем, что если одна диагональ квадрата  
лежит на прямой  $y = -3x$ , то вторая лежит на  
прямой  $y = \frac{1}{3}x$ , т.к. диагонали квадрата  
перпендикулярны,  
то есть вторая прямая должна  
быть  $\perp$  первой, а  $y = \frac{1}{3}x \perp y = -3x$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Возьмем две вершины квадрата (не лежащие на одной  
границе). Пусть у них координаты по  $Ox$   $x_0$  и  $x_1$ ,  
 $y_0$ ,  $y_1$  — их координаты по  $Oy$ :

Во-первых,  $y_0 = ax_0 + x_0^5$ ,  $y_1 = ax_1 + x_1^5$

Во-вторых,  $y_0 = -3x_0$ ,  $y_1 = \frac{1}{3}x_1$

Подставим одно в другое и решим получившуюся систему:

$$\begin{cases} ax_0 + x_0^5 = -3x_0 \\ ax_1 + x_1^5 = \frac{1}{3}x_1 \end{cases}$$

Еще замечание. Показано, что  
расстояние от ~~какой~~ точек  $y_0$  к началу

координат + равны, т.е. диагонали квадрата равны и делится

точкой пересечения пополам. Поэтому  $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

$$x_1^2 + y_1^2 = x_0^2 + y_0^2 \quad y_1 = \frac{1}{3}x_1 \rightarrow y_1^2 = \frac{1}{9}x_1^2$$

$$y_0 = -3x_0 \Rightarrow y_0^2 = 9x_0^2 \quad \text{Значит, } \frac{10}{9}x_1^2 = 10x_0^2$$

$$\frac{1}{9}x_1^2 = x_0^2 \quad \frac{1}{3}x_1 = x_0 \quad \text{Тогда же берём } x_0 = -\frac{1}{3}x_1$$

В силу равенства  $y_0$ -ий, там были бы абсолютно  
расхождение) Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} ax_0 + x_0^5 = -3x_0 \\ 3ax_0 + 243x_0^5 = x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 243ax_0 + 243x_0^5 = -729x_0 \\ 3ax_0 + 243x_0^5 = x_0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad \text{Перепишем в более удобном}$$

виде:

$$\begin{cases} a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} & \Rightarrow a - b = \frac{5}{c} - \frac{5}{b} = \frac{5(b-c)}{bc} & (1) \\ b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} & \Rightarrow b - c = \frac{5}{a} - \frac{5}{c} = \frac{5(c-a)}{ac} & (2) \\ a + \frac{5}{b} = c + \frac{5}{a} & c - a = \frac{5}{b} - \frac{5}{a} = \frac{5(a-b)}{ab} & (3) \end{cases}$$

$$\text{Подставим (2) в (1): } a - b = 5 \cdot \frac{5(c-a)}{ac \cdot bc} = \frac{25(c-a)}{abc^2}$$

$$\text{Подставим (3) в (1): } a - b = \frac{5 \cdot 25 \cdot (a-b)}{(abc)^2} = \frac{125(a-b)}{(abc)^2}$$

В условии сказано, что среди чисел  $a, b, c$  есть хотя бы  
одна пара неравных. В силу симметрии считаем, мы  
можем без ограничения общности сказать, что  $a \neq b$ .

Тогда  $a - b \neq 0$  и мы можем сократить на  $a - b$ .

$$\frac{125}{(abc)^2} = 1 \quad (abc)^2 = 125 \quad abc = \pm \sqrt{125} = \pm 5\sqrt{5}$$

$$-5\sqrt{5} < 5\sqrt{5} \Rightarrow -5\sqrt{5} \quad \text{это наименьшее}$$

значение  $abc$ .

Ответ:  $-5\sqrt{5}$ .



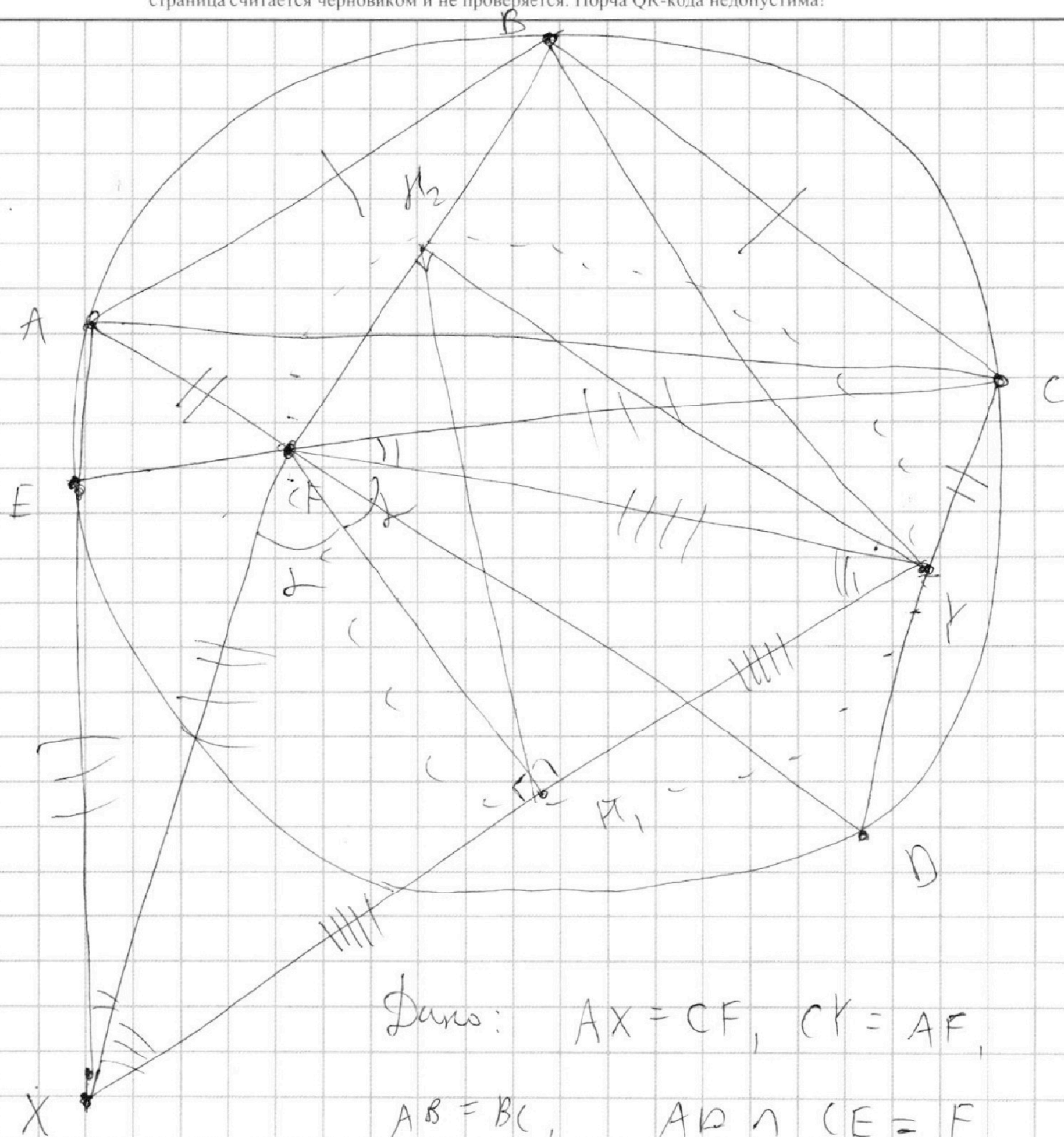
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $AX = CF$ ,  $CF = AF$ ,  
 $AB = BC$ ,  $AD \cap CE = F$ ,  
 $BF = 17$ ,  $XY = 37$ .

Найти:  $S_{BFXY} = ?$

Решение:

$\triangle AXF$  и  $\triangle CFY$  равны по двум сторонам и углу между ними. ( $AX = CF$ ,  $CF = AF$ ,  $\angle XAD = \angle ECD$  как опирающиеся на одну дугу). Значит,  $XF = FY$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Опустим высоту  $FH_1$  на  $XH$  и  $YH_2$  на  $BF$ .

$$S_{BFXY} = S_{YBF} + S_{XFY} = \frac{1}{2} XY \cdot FH_1 + \frac{1}{2} BF \cdot YH_2 =$$

$$= \frac{1}{2} (XY \cdot FH_1 + BF \cdot YH_2)$$

$\angle YFH_1 = \alpha$ .  $FH_1, YH_2$  — выискиваем, т.к.  $\angle$

$$\angle FH_1Y + \angle FH_2Y = 180^\circ$$

$$FY = \frac{H_1Y}{\sin \alpha} \quad \text{— теорема синусов.}$$

$$FY = \frac{15,5}{\sin \alpha} \quad H_1Y = \frac{1}{2} XY, \text{ т.к. } \Delta XFY \text{ — равнобедренный}$$

и  $FH_1$  — высота, и медиана, и

диаметр описанной окружности.  $FH_1 = \sqrt{XF^2 - XH_1^2}$  — из теоремы Пифагора.

$$FH_1 = \sqrt{FY^2 - H_1Y^2} = \sqrt{\frac{15,5^2}{\sin^2 \alpha} - 15,5^2} =$$

$$= \sqrt{15,5^2} = 15,5 \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1} = 15,5 \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} =$$

$$= 15,5 \operatorname{tg} \alpha$$

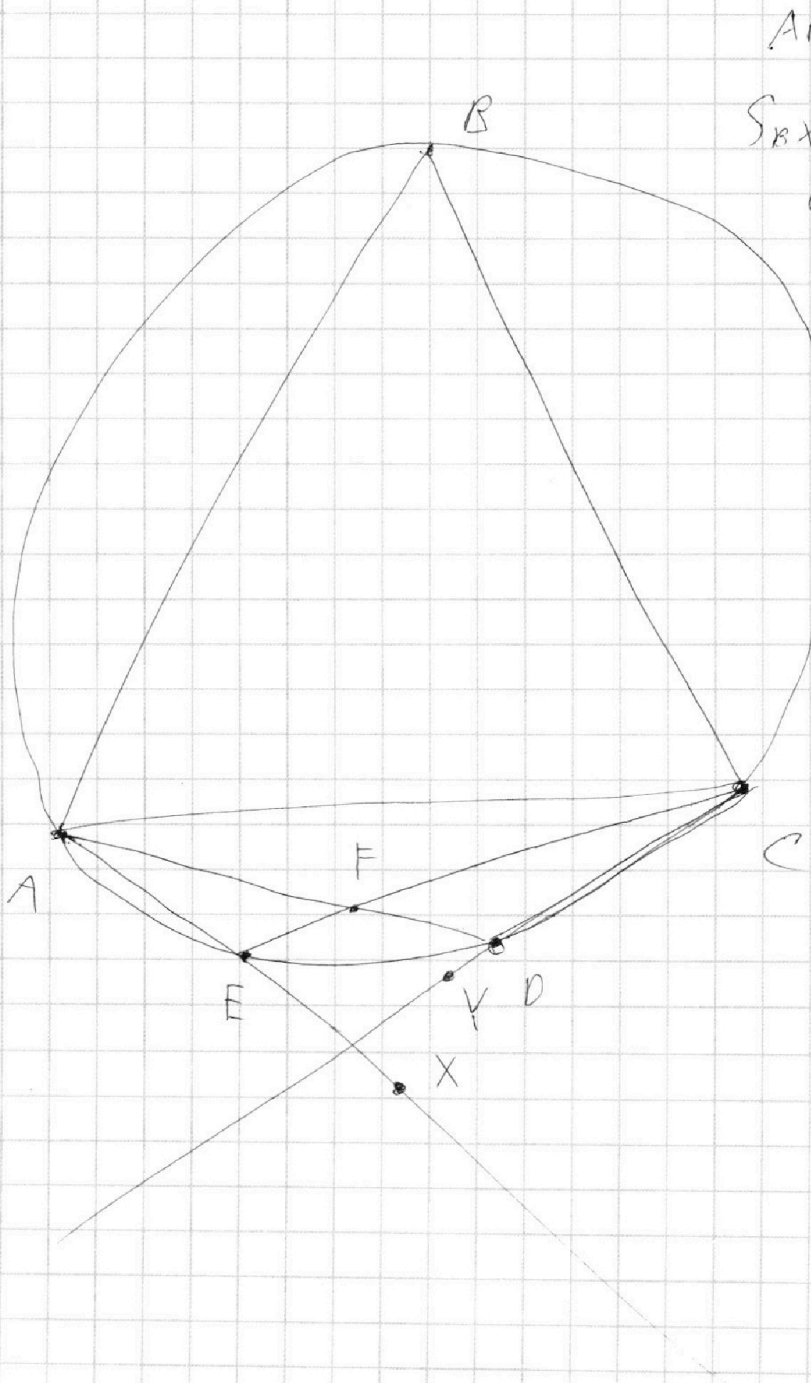
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1    2    3    4    5    6    7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = BC$$

$$S_{BXFY} = ?$$

$$BF = 17, XY = 3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad \text{Найти: } \min abc = ?$$

$$a = b = c \quad \text{Кельзед}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \\ b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \\ a + \frac{5}{b} = c + \frac{5}{a} \end{array} \right. \quad a - b = \frac{\frac{5}{c} - \frac{5}{b}}{\frac{5}{c} - \frac{5}{a}} = \frac{5b - 5c}{bc}$$

$$b - c = \frac{\frac{5}{a} - \frac{5}{c}}{\frac{5}{a} - \frac{5}{c}} = \frac{5c - 5a}{ac} = \frac{5(c - a)}{ac}$$

$$a - b = \frac{5 \cdot \frac{5(c - a)}{ac}}{bc} = \frac{25(c - a)}{abc^2}$$

$$c - a = \frac{\frac{5}{b} - \frac{5}{a}}{\frac{5}{b} - \frac{5}{a}} = \frac{5(a - b)}{ba} \quad a - b = \frac{25 \cdot \frac{5(a - b)}{ba}}{ab^2c} =$$

$$= \frac{125(a - b)}{a^2b^2c^2} = \frac{125(a - b)}{(abc)^2} \cdot \frac{125}{(abc)^2} = 1.$$

$$(abc)^2 = 125 \quad \Rightarrow abc = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$



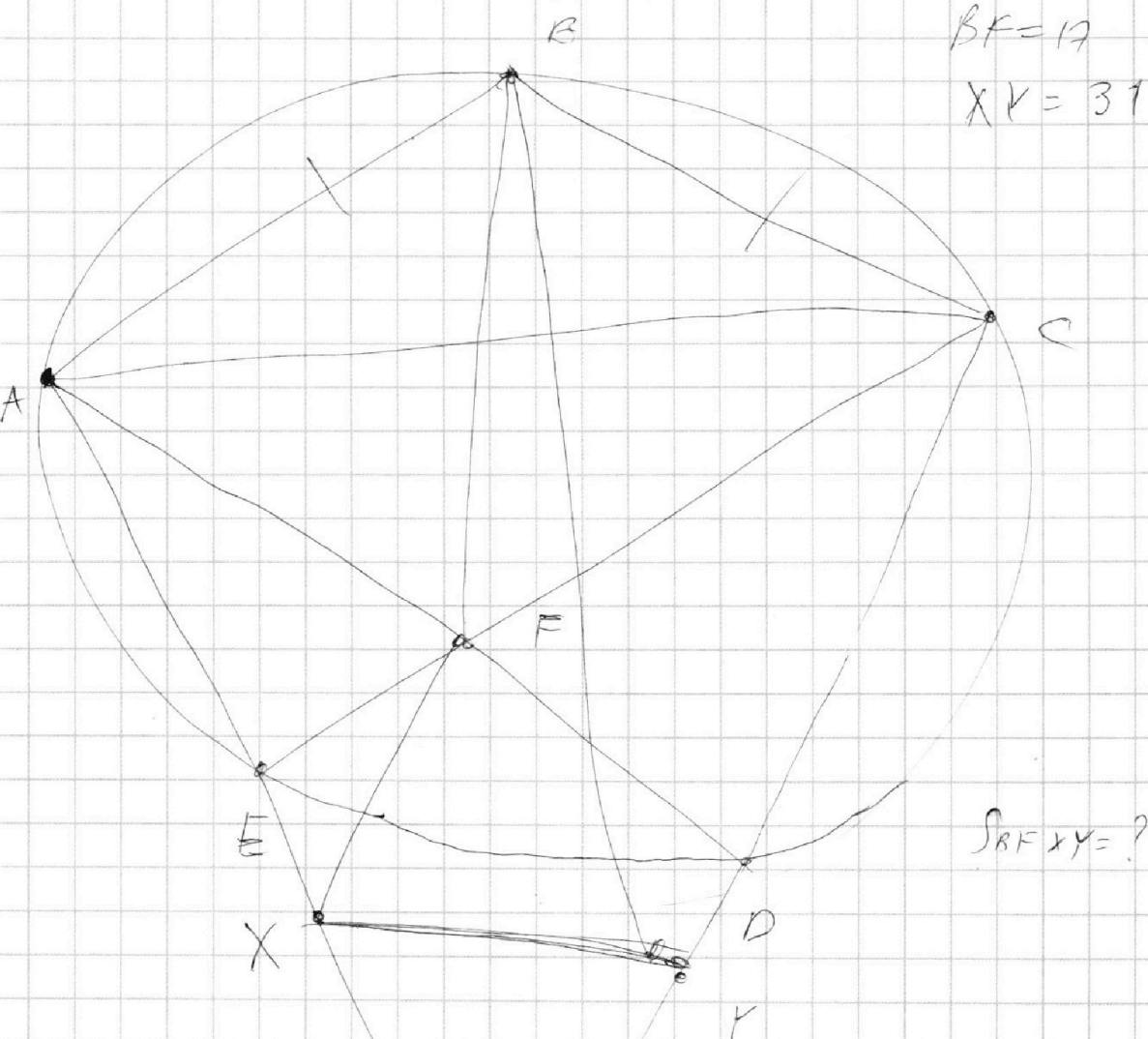
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

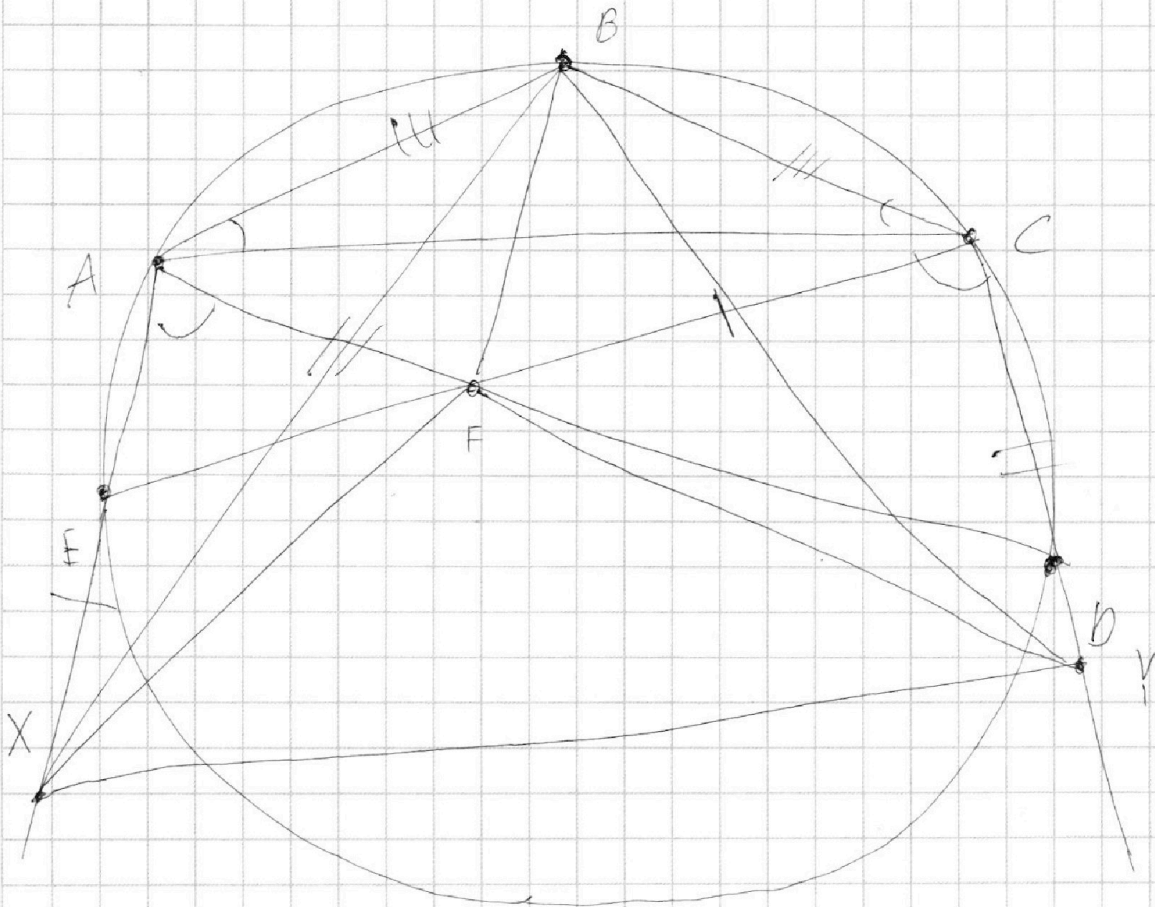
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$BF = 17, \quad XY = 31.$$

$$AX = CF \\ CY = AF$$



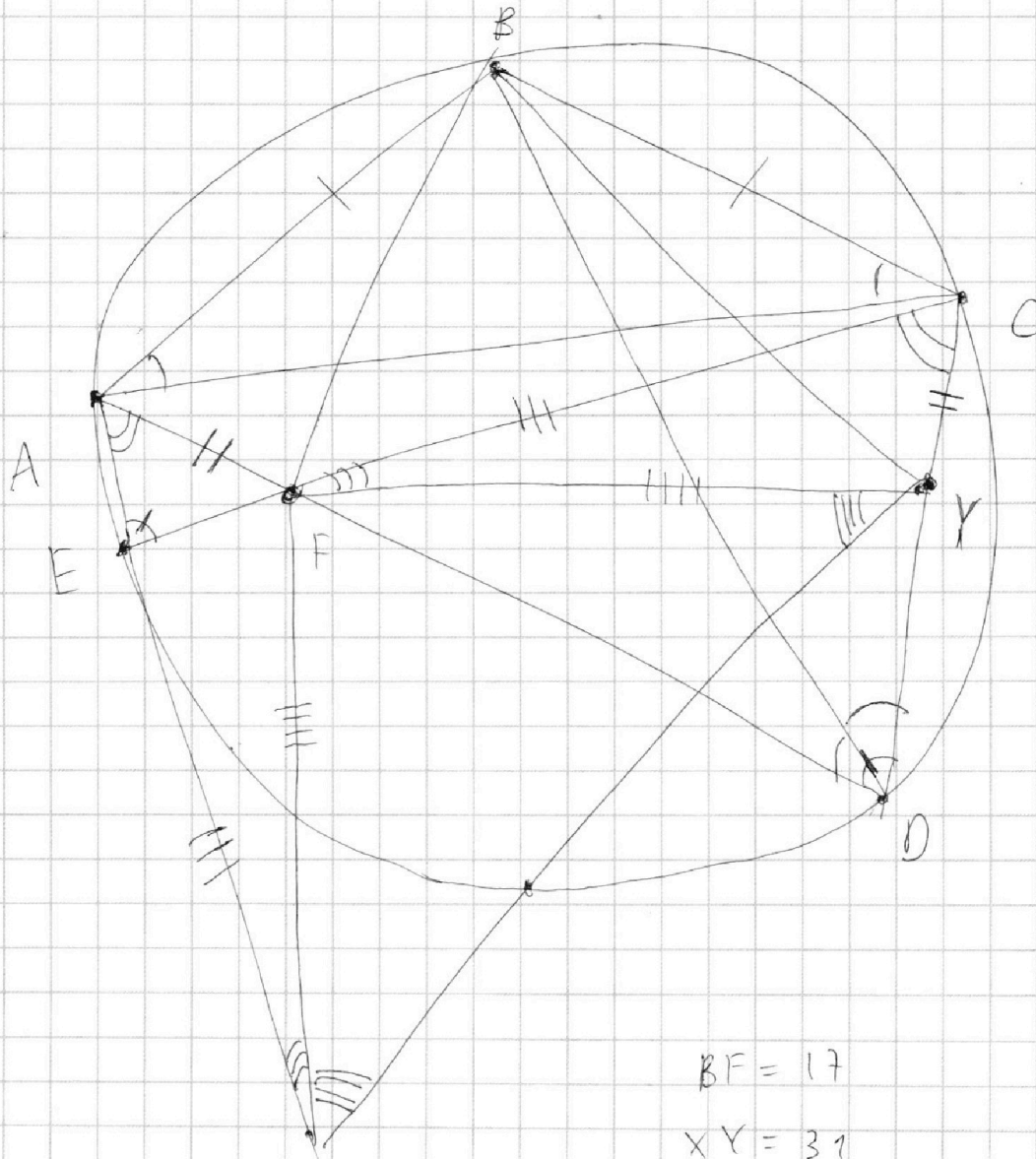
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$BF = 17$$

$$XY = 31$$

$$AX = CF$$

$$CY = AF$$

$$S_{BFXY} = ?$$

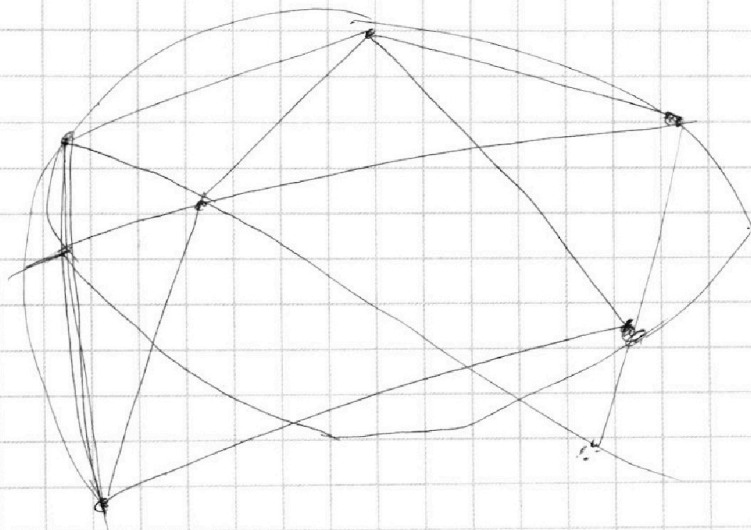
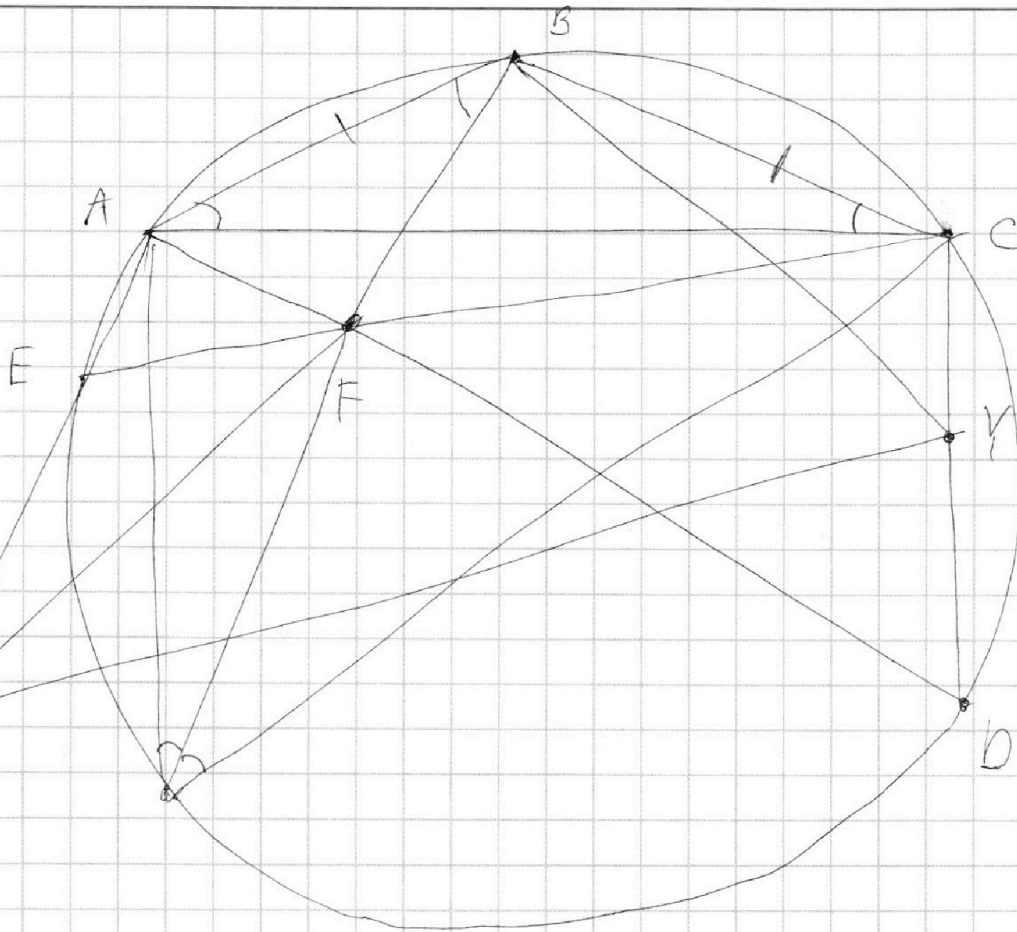
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







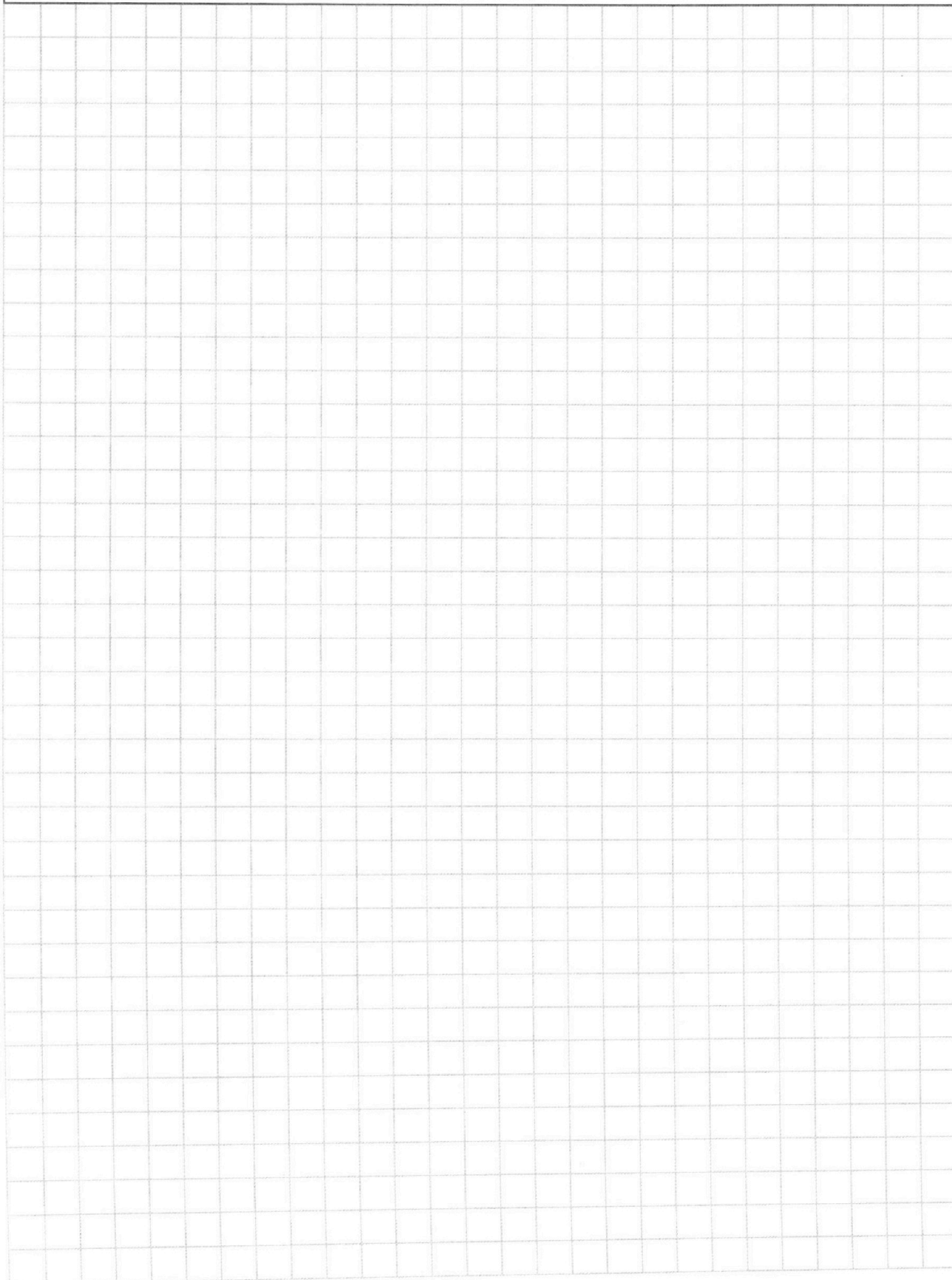
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





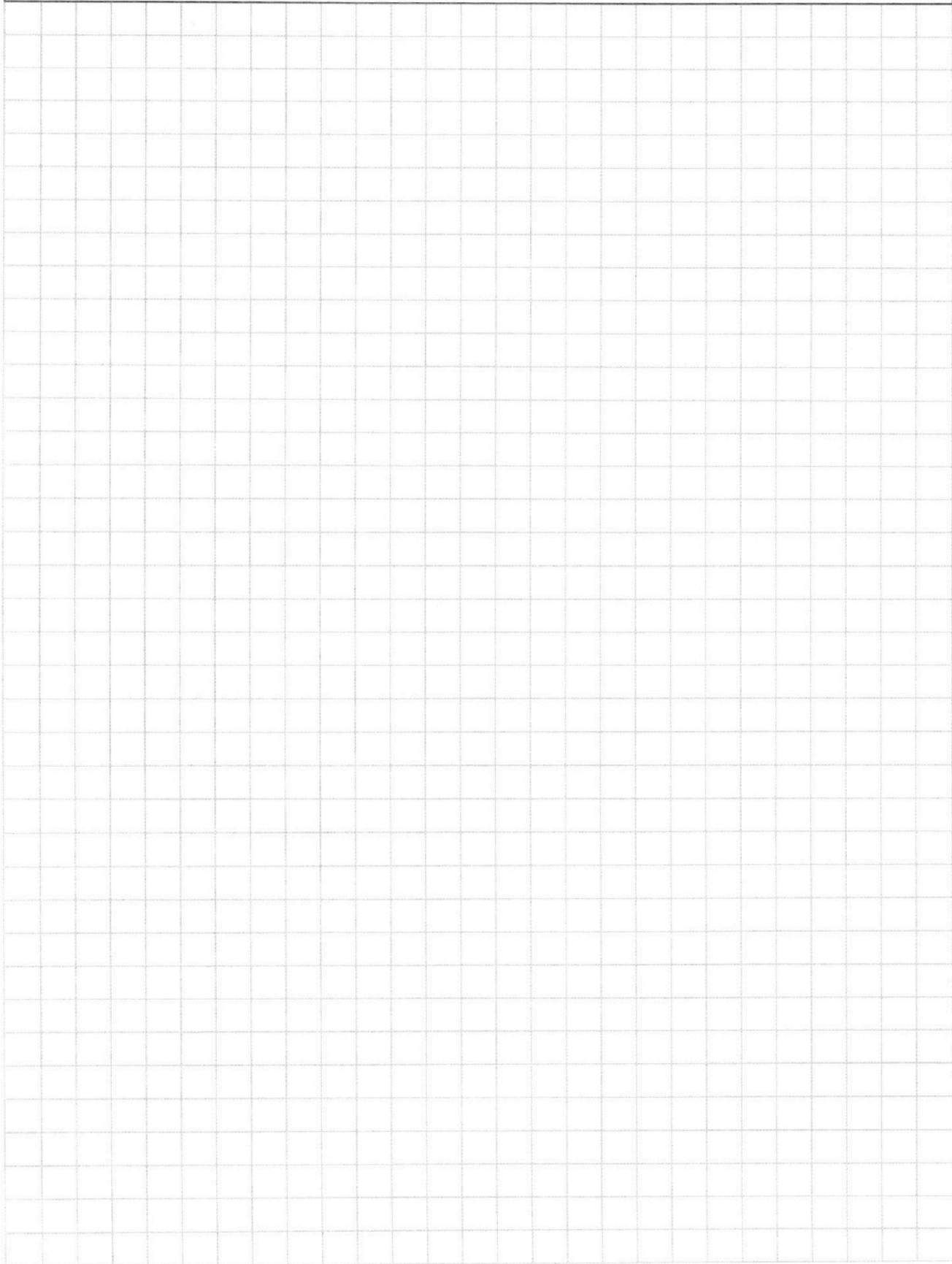
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| = |x^3 - x^2 + 5|$$

$$\begin{cases} x^3 + 4 \geq 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{x^3} \geq -4 \\ x^2 < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \sqrt[3]{-4} \\ -1 < x < 1 \end{cases} \quad x \in (-1; 1)$$

$$\begin{cases} x^3 + 4 \leq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 < -4 \\ x^2 \geq 1 \end{cases} \quad f = -x^2 + 1$$

$$\begin{cases} x \leq \sqrt[3]{-4} \\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty) \end{cases} \quad |a| + |b| \geq |a + b|$$

$$x \leq \sqrt[3]{-4}$$
$$0 + (\sqrt[3]{-4})^2 - 1 = |1 - (\sqrt[3]{-4})^2|$$
$$(\sqrt[3]{-4})^2 = (\sqrt[3]{4})^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-2) - x(13y-22) + 44y - 94 = 0$$

$$x^2(y-2) - 13x(y-2) - x + 44y - 94 = 0$$

$$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2+5|$$

$$x^3+4 \rightarrow x^3-x^2+5$$

4x

$$x^3+4 - x^2+1 \leq x^3-x^2+5$$

$$x^3+4 = 0 \quad x^3 = \sqrt[3]{-4}$$

$$x^2-1 = 0 \quad x = \pm 1$$

$$x^3-x^2+5 = 0$$

$$|-5| + |4| \geq |-5+4|$$

$$|a| + |b| \geq |a+b|$$

$$|a| + |b| \geq$$

$$|x^3+4| + |x^2-1| \geq |x^3-x^2+5|$$

$$|a| + |-b| \geq |a-b|$$

$$-b = x^2-1$$

$$|a| + |-b| \leq |a+b|$$

$$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3+4-x^2+1|$$

$$|a| + |b| \vee |a-b|$$

$$1) \quad a+b \vee a-b$$

$$2) \quad a-b \vee |a-b|$$

$$3) \quad -a-b \vee \dots$$





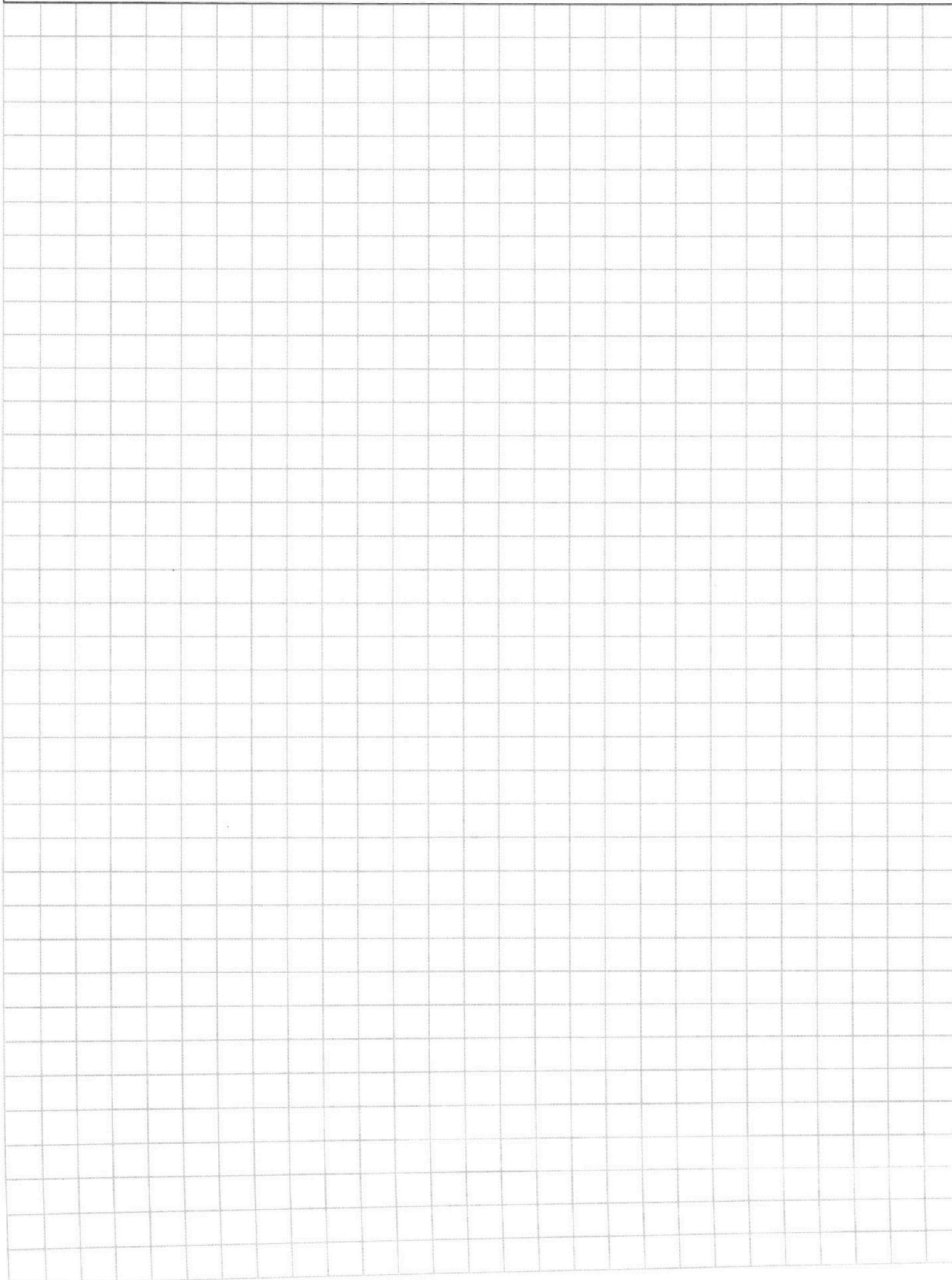
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c$  геом. прогр.  $q$  — знаменатель

$$b = aq, \quad c = aq^2$$

$$abc = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$abc = a^3 q^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$aq = 2^{50} \cdot 3^{100}$$

если  $q \geq 1$ , то все факторы выносятся  
 $q = 51 \cdot 101$

если  $0 < q < 1$ , то все  $51 \cdot 101$

$$2 \cdot 51 \cdot 101 - 1$$

$$102 \cdot 101 - 1$$

$$\begin{array}{r} \times 102 \\ 101 \\ \hline + 102 \\ \hline 102 \\ \hline 10302 \end{array}$$

$$-\frac{73}{24} x_0 = -3x_0 - x_0^5$$

$$-\frac{1}{24} x_0 = -x_0^5$$

$$\frac{1}{24} = x_0^4$$

$$x_0 = \sqrt[4]{\frac{1}{24}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{24}}$$

$$y_0 = -\frac{3}{\sqrt[4]{24}}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} &= \\ &= \sqrt{\frac{1}{\sqrt{24}} + \frac{9}{\sqrt{24}}} = \\ &= \sqrt{\frac{10}{\sqrt{24}}} \cdot \sqrt{2} = \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-x^2 + 14x - 50 = 0$$

$$D = 196 - 200 =$$

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$= -4$$

$$x^2y - 2x^2 - 13xy + 27x + 44y - 94 = 0$$

$$x^2y + 25x - 13xy - 94 = 0$$

$$y = 0$$

$$-2x^2$$

$$x(xy + 25 - 13y) - 94 = 0$$

$$x(xy + 25 - 13y) = 94 = 47 \cdot 2 = 94 \cdot 1$$

1)  $x = 47$

$$47y + 25 - 13y = 2$$

$$34y + 25 = 2$$

~~нет~~ нет решений.

2)  $x = -47$

$$-47y + 25 - 13y = -2$$

$$-60y + 25 = -2$$

нет решений.

3)  $x = 2$

$$2y - 13y + 25 = 47$$

$$-11y = 22$$

$$y = -2$$

$$(2; -2)$$

4)  $x = -2$

$$-15y + 25 = -47$$

$$-15y = -72$$

$$15y = 72$$

$$y = \frac{72}{15}$$

нет решений.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$f(x) = x^5 + ax$$

$$f(-x) = -x^5 - ax = -f(x)$$

- функция нечетная

$$x_0 = -\frac{1}{3}x_1$$

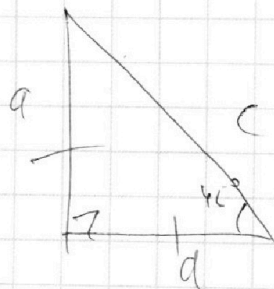
$$x_1 = -3x_0$$

$$\begin{cases} ax_0 + x_0^5 = -3x_0 \\ ax_1 + x_1^5 = \frac{1}{3}x_1 - x_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{40}{\sqrt{2}}} &= \sqrt{\frac{20}{\sqrt{6}}} = \\ &= \sqrt{\frac{20\sqrt{6}}{6}} = \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{cases} ax_0 + x_0^5 = -3x_0 \\ -3ax_0 - 243x_0^5 = -x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax_0 + x_0^5 = -3x_0 \\ 3ax_0 + 243x_0^5 = x_0 \end{cases}$$



$$a = c \sin 45^\circ =$$

=

$$a^2 + a^2 = c^2 = 2a^2$$

$$a = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

$$c = \sqrt{2}a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Все имеет  $y = x^5 + ax$

Первая прямая имеет на  $xy = -3x$

Значит, вторая  $y = \frac{1}{3}x$

$$x_0 = \frac{1}{3}x_1$$

$$x_1 = 3x_0$$

$$\begin{cases} x_1^5 + ax_1 = \frac{1}{3}x_1 \\ x_0^5 + ax_0 = -3x_0 \end{cases}$$

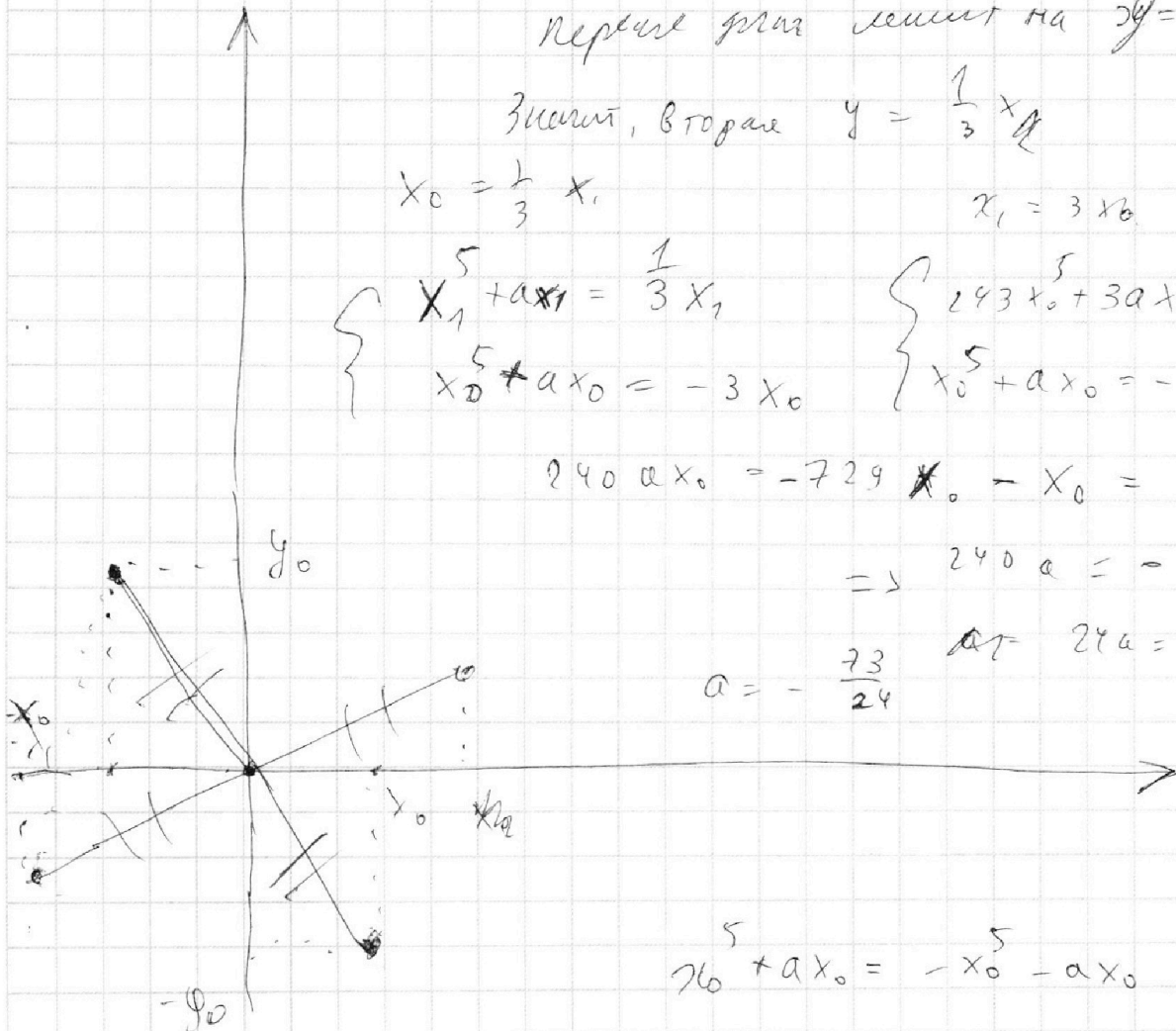
$$\begin{cases} 243x_0^5 + 3ax_0 = x_0 \\ x_0^5 + ax_0 = -3x_0 \end{cases}$$

$$240ax_0 = -729x_0 - x_0 =$$

$$\Rightarrow 240a = -730$$

$$a = -\frac{73}{24}$$

$$a = -\frac{73}{24}$$



$$x_0^5 + ax_0 = -x_0 - ax_0$$

$$y_0 = -3x_0$$

$$\sqrt{(y_0^2 + x_0^2)} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$y_0^2 = (x_0 + ax_0)^2 \quad y_1^2 = (x_1^5 + ax_1)^2$$

$$(x_0 + ax_0)^2 + x_0^2 = x_1^2 + (x_1^5 + ax_1)^2$$

$$10x_0^2 = x_1^2 + \frac{1}{9}x_1^2 = \frac{10}{9}x_1^2$$

$$x_0^2 = \frac{1}{9}x_1^2$$

$$x_0 = \frac{1}{3}x_1$$

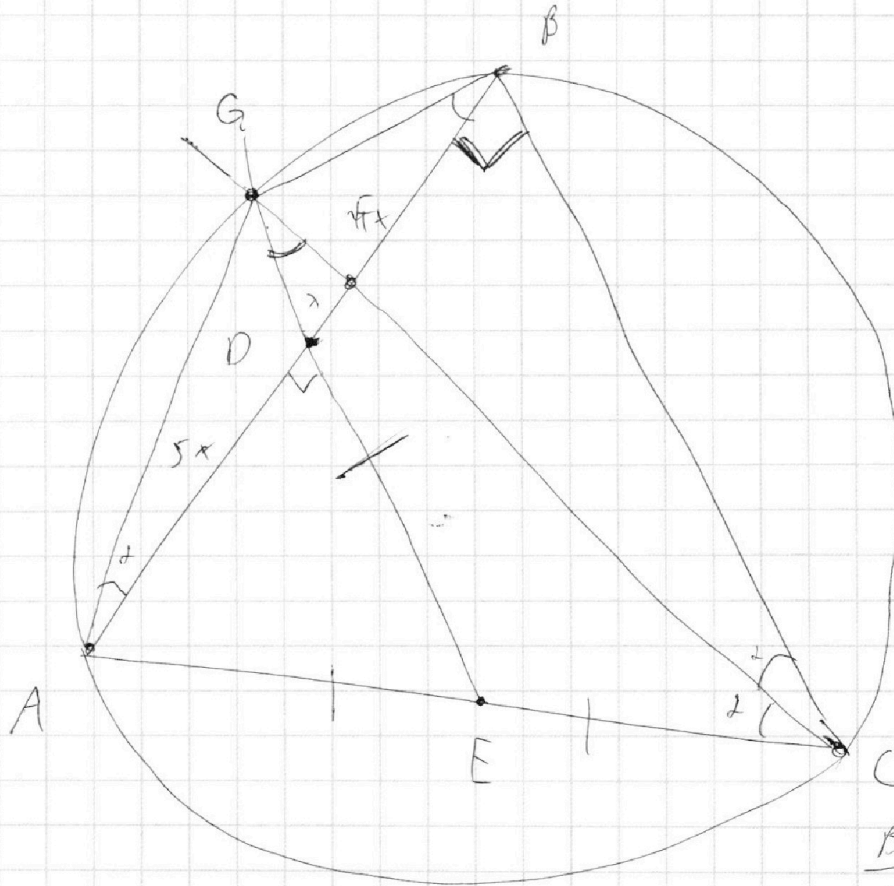
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{BCF} = 16 S_{DGF}$$

$$\angle AGC = 90^\circ$$

$$\angle AGE = 90^\circ - 2$$

$$= \sin \beta \text{ (A)}$$

$$S_{BCF} = \frac{BF \cdot CF}{2}$$

$$S_{DGF} = \frac{DF \cdot GF}{2}$$

$$\angle BCA = \arcsin \frac{2}{3}$$

$$\frac{BF}{AF} = \frac{AC}{AC} = \frac{2}{3} =$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

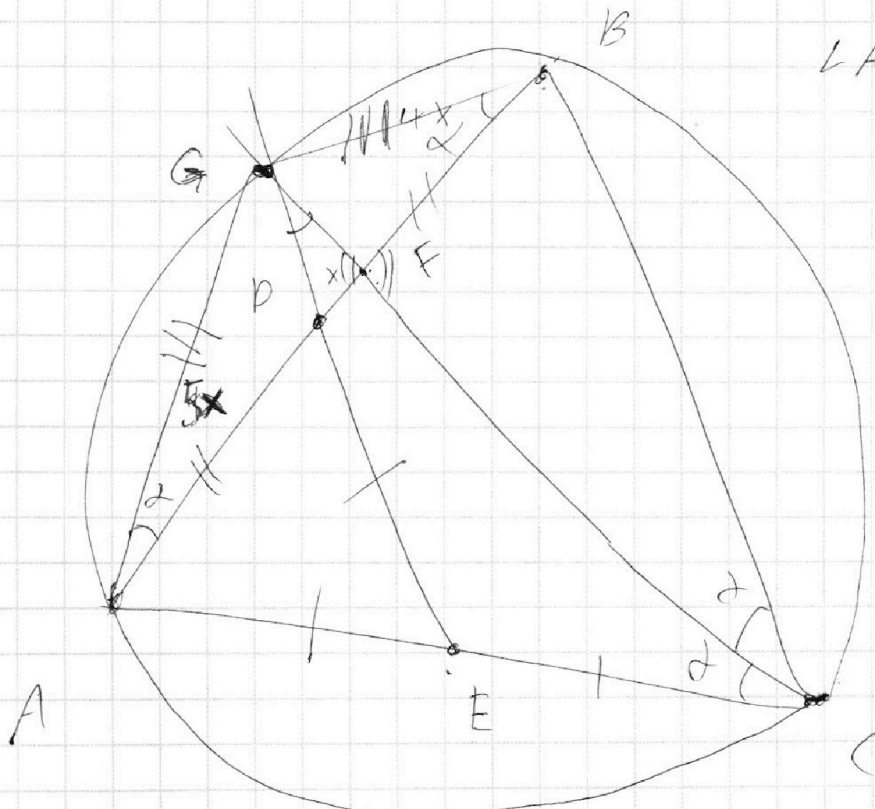
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-2x^2 + 27x - 94 = 0.$$

$$\Delta = 729 - 188 \cdot 4 > 0.$$



$$\angle A, B, C = ?$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$S_{BCF} = 16 S_{DGF}$$

$$\triangle GFD \sim \triangle CFB \quad k = \frac{1}{4}$$

$$\frac{DF}{BF} = \frac{DG}{BC} = \frac{GF}{CF} = \frac{1}{4}$$

$$GF \cdot CF = AF \cdot BF$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5)  $x = 7$

$$y - 13y + 25 = 94$$

$$-12y = 69 \text{ нет решений.}$$

6)  $x = -1$

$$-y - 13y + 25 = -94$$

$$-14y = -119 \text{ нет решений.}$$

7)  $x = 94$

$$94y - 13y + 25 = 7$$

$$81y = -24 \text{ нет решений.}$$

$$x^2y - 2x^2 - 13xy + 27x + 44y - 94 = 0$$
$$x(xy - 2x - 13y + 27) = 94 - 44y$$

$$x^2(y-2) - 13x(y-2) + x + 44y - 94 = 0$$

$$(y-2)(x^2 - 13x) + x + 44y - 94 = 0$$

$$x(y-2)(x-13) + x$$

или  $y = 2$ , то  $13y - 27 \neq 2 \quad y$

$$a \Rightarrow 0 \neq 2.$$

$$-7y^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$\Delta = (13y-27)^2 - 4(y-2)(44y-94) =$$

$$= 169y^2 - 26 \cdot 27 \cdot y + 729 - 4(44y^2 - 94y -$$

$$- 88y + 188) = -7 \cdot 16 + 104 - 23 =$$

$$= -7y^2 - 702y + 729 + 376y + 352y -$$

$$- 752 = -7y^2 + 26y - 23 \quad -28 + 52 - 23 =$$

$$-7y^2 + 26y - 23 \quad \text{— полный квадрат.} \quad = 1$$

$$\frac{13y-27 \pm \sqrt{D}}{2} \quad \text{— целые числа.}$$

для  $y \neq 2$ , тогда  $D = b^2$ , где  $b \in \mathbb{Z}$ .

$D$  — четный.

$-7y^2 - 23$  — четное число  $26y$  — тоже

четное

$$2 - 2 = 0.$$

$$-7 \cdot 25 - 23 =$$

и

$$-7y^2 + 26y - 23 \div 4.$$

$$-175 - 23 \quad 7y^2 - 23 \div 4$$

$$y^2 + 1 \div 4$$

$$1^2 \equiv 1$$

$$\equiv 98$$

$$23 \equiv 3.$$

$$y^2 \not\equiv 3.$$

$$3^2 \equiv 3$$

$$-7 \cdot 44$$

$$-23 \equiv 1$$

$$-373 - 23 =$$

$$-28$$

$$7 \equiv 3$$

$$-7 \equiv 1$$

$$= 366.$$