



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 15



1. [3 балла] Вася строит башни из кубиков. Когда он построил N башен по 22 кубика, у него осталось 3 кубика. После чего он из всех своих кубиков построил $N - 1$ башню так, что во всех башнях кубиков оказалось поровну. Какое наибольшее количество кубиков могло быть у Васи, если известно, что их меньше 300?

2. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^2 + 7x + 12| + |x^2 + 2x - 8| \leq |5x + 20|.$$

3. [4 балла] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 3x + 3 = 6^y.$$

4. [5 баллов] Вокруг равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) описана окружность Ω . Прямая, содержащая биссектрису AD треугольника ABC , пересекает повторно Ω в точке E . Найдите периметр четырёхугольника $ABEC$, если известно что площади треугольников BED и CED равны 5 и 6 соответственно.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых существует значение параметра b такое, что уравнение $5x^2 + (2a + 9)x + 7a - 10b = 0$ имеет два корня x_1 и x_2 таких, что $5 \leq x_1 \leq 10$ и $14 \leq x_2 \leq 15$.

6. [5 баллов] Кузнечик прыгает по целочисленным узлам координатной сетки. За один шаг он может либо переместиться на одну клетку вверх или вправо, если при этом он попадает в точку, в которой не был раньше; либо вернуться на один шаг назад по уже пройденному пути – соответственно, вниз или влево. Сколько существует различных путей с началом в точке $O(0; 0)$ и концом в точке $A(3; 5)$ таких, что в точку A кузнечик попадает не более чем за 10 шагов? (Достигая точки A , кузнечик останавливается.)

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 7,5$, $XY = 15$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Из условия следует, что у Васи $22N+3$ кубика.

К тому же это число делится на $N-1$

$$(22N+3):(N-1) \Leftrightarrow (22N+3)-22(N-1):(N-1) \Leftrightarrow 25:(N-1)$$

П.к. $25=5^2$, N может быть равно только 2, 6 и 26

При $N=26$ $22N+3=572 > 300$, что не соответствует условию.

При $N=6$ $22N+3=135 < 300$, что соответствует условию.

Ответ: 135 кубиков

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Разложим квадратные трехчлены и
вынесем множитель из-под модуля:

$$|(x+3)(x+4)| + |(x+4)(x-2)| \leq 5|x+4| \quad \text{Заметим, что}$$

при $x = -4$ неравенство выполняется.

При $x \neq -4$ можно сократить на $|x+4|$
(учитывая, что все множители положительны)
Имеем:

$$|x+3| + |x-2| \leq 5 \quad \text{Решим данное неравенство}$$

методом интервалов:

$$1) \ x \leq -3 \quad \& \quad -1 - 2x \leq 5 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow x = -3$$

$$2) \ -3 < x < 2 \quad 5 \leq 5 \Rightarrow \text{не } -3 < x < 2$$

$$3) \ x \geq 2 \quad 2x + 1 \leq 5 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{Итого } x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\} \cup [-3; 2]$$

$$\text{Ответ: } x \in \{-4\} \cup [-3; 2]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть R — радиус окружности, а углы при основании равны 2α , тогда $\angle B \hat{A} D = \angle D \hat{A} C = 2\alpha$
 $\angle B \hat{D} A = 2\alpha$ $\angle A \hat{C} D = 3\alpha$ $\angle A \hat{B} D = 180 - 3\alpha$.
Зная, что $S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$, получаем, что

Заметим, что при любом x левая часть равенства — целое число. Следовательно $y \geq 0$. Пусть $y > 0$, тогда левая часть равенства кратна трем, тогда $x = 3$.

Пусть $x = 3x_1$, сократив на 3 имеем:

$3x_1^2 + 3x_1 + 1 = 2 \cdot 6^{y-1}$. Левая часть не кратна 3, а значит $y - 1 = 0$. Получаем квадратное

уравнение $3x_1^2 + 3x_1 - 1 = 0$, корни которого, $\frac{\pm\sqrt{21}-3}{6}$, иррациональны и не удовлетворяют условию.

Рассмотрим $y = 0$. Получим квадратное уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$, которое имеет 2 целых корня: $x = -2; -1$

Ответ: $(-2; 0); (-1; 0)$

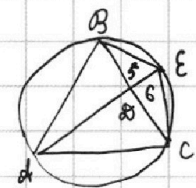
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Треугольники $\triangle BED$ и $\triangle EDC$ имеют одинаковую высоту. Значит их площади относятся как их основания: $\frac{BD}{DC} = \frac{5}{6}$. По свойству

биссектрисы треугольника $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{6}$

Поскольку $AB=BC$ вычисляем, что $AC = \frac{6}{5} AB$,

$BD = \frac{5}{11} AB$ и $DC = \frac{6}{11} AB$. Из вписанности следует, что $\angle DBE = \angle FEA = \angle BAE$, то есть $\triangle BDE \sim \triangle ABE$ по 2 углам. Делаем вывод, что $\frac{DE}{BE} = \frac{BE}{AE} = \frac{BD}{AB} = \frac{5}{11}$.

Наконец, по свойству пересекающихся хорд:

$$AD \cdot DE = \frac{9 \cdot 6}{55} \cdot \frac{5}{11} BE^2 = BD \cdot DC = \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{11} AB^2 \Rightarrow BE = AB \sqrt{\frac{5}{4}}$$

(вычисленная сторона)

Найдем неизвестную сторону по формуле Герона для $\triangle BEC$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 11$

~~$AB = \frac{5}{11} AB$ $BE = \frac{1}{4} AB$ $CE = \frac{5}{44} AB$ Подставим в формулу Герона~~

~~$AB = \frac{1}{4} AB$ $BD = \frac{20}{22} AB$ $BE = \frac{1}{4} AB$ $DE = \frac{5}{22} AB$~~

~~$S = \sqrt{11 \cdot 22 \cdot 11 \cdot 11}$ $BD = \frac{5}{11} AB$ $BE = \frac{5}{4} AB$ $CE = \frac{5\sqrt{5}}{44} AB$~~

Равенство вычисленная, получим $S =$

$$BE = BCE = \frac{\sqrt{5}}{4} BC \quad S = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+2}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{5}-2}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 BC^2} = \frac{1}{4} BC^2 = 11 \Rightarrow BC = 2\sqrt{11}$$

Теперь можно вычислить P_{ABEC} (периметр данного четырехугольника) $= AB + BE + EC + AC =$
 $= BC + 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} BC + \frac{6}{5} BC = \frac{22\sqrt{11} + 5\sqrt{55}}{5}$

Ответ: $\frac{22\sqrt{11} + 5\sqrt{55}}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Корни квадратного уравнения определяются двумя параметрами \rightarrow средним $(-\frac{b}{2a})$ и разностью $(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2})$, где a, b, c - коэффициенты квадратного уравнения.

В нашем случае можно заметить, что эта разность средних корней не зависит от b , зато выражение под корнем в их разности будет зависеть от b линейно ($D = 4a^2 + 8a + 81 + 40b$), то есть, при заданном a эта разность корней может принимать любые значения от 0 до $+\infty$, в то время, как \pm среднее остается неизменным.

Пусть $m = -\frac{2b}{a} = -\frac{2a+9}{10}$ - среднее корней.
Очевидно, что при $m-5 < 14-m$ или $m-10 > 15-m$ невозможно подобрать разность корней так, чтобы они удовлетворяли условию, а при остальных m это возможно.

Решаем систему неравенств:

$$\begin{cases} -\frac{2a+9}{5} \geq 19 \\ -\frac{2a+9}{5} \leq 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq -43 \\ a \geq -58 \end{cases} \text{ Получаем } a \in [-58; -43]$$

Ответ: $a \in [-58; -43]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для начала заметим, что минимальный путь кузнечика составляет 8 ходов. Также видно, что «лишние» ходы не изменяют четности этого количества, так как они выглядят, как вверх-вниз или влево-вправо, возвращая его в исходную точку. Следовательно, в любом маршруте кузнечика таких пар «лишних» ходов либо 0, либо 1. Более того, к каждой маршруту с лишними ходами соответствует единственный маршрут без них (получается удалением пары «лишних» ходов) а каждой маршруту без них - 8 маршрутов с ними (перед любым из 8 ходов можно добавить «лишнюю» пару в перпендикулярном ему направлении). Очевидно, что число маршрутов из 8 ходов равно количеству способов выбрать 3 вертикальных хода из 8, то есть $C_8^3 = 56$, количество маршрутов из 10 ходов $= 56 \cdot 8 = 448$, а общее их число, следовательно $56 + 448 = 504$

Ответ: 504 путей

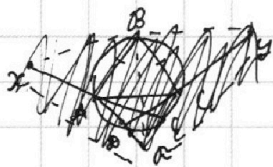
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что ~~угол~~ $\angle BCY = \angle BAF$ (из вписанности), из чего (в куче с равенством соответствующих сторон $AB = BC$, $AF = CY$) следует, что $\triangle ABF = \triangle BCY$.

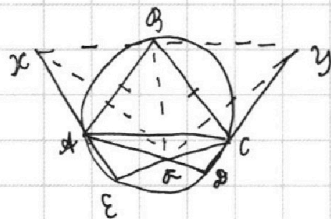
Аналогично получаем $\triangle ABX = \triangle BCF$

Но есть $BX = BY = BF$, а $\angle XBF = \angle BCF = \angle ABC$.

Поскольку $XY = 2BF = BX + BY$ видим, что $B \in XY$.

Далее того $\angle XBF = 180^\circ / 2 = 90^\circ$, а значит $\triangle XBY$ — треугольник с основанием XY и высотой BF . $S_{\triangle XBY} = XY \cdot BF / 2 = 56,25$

Ответ: 56,25





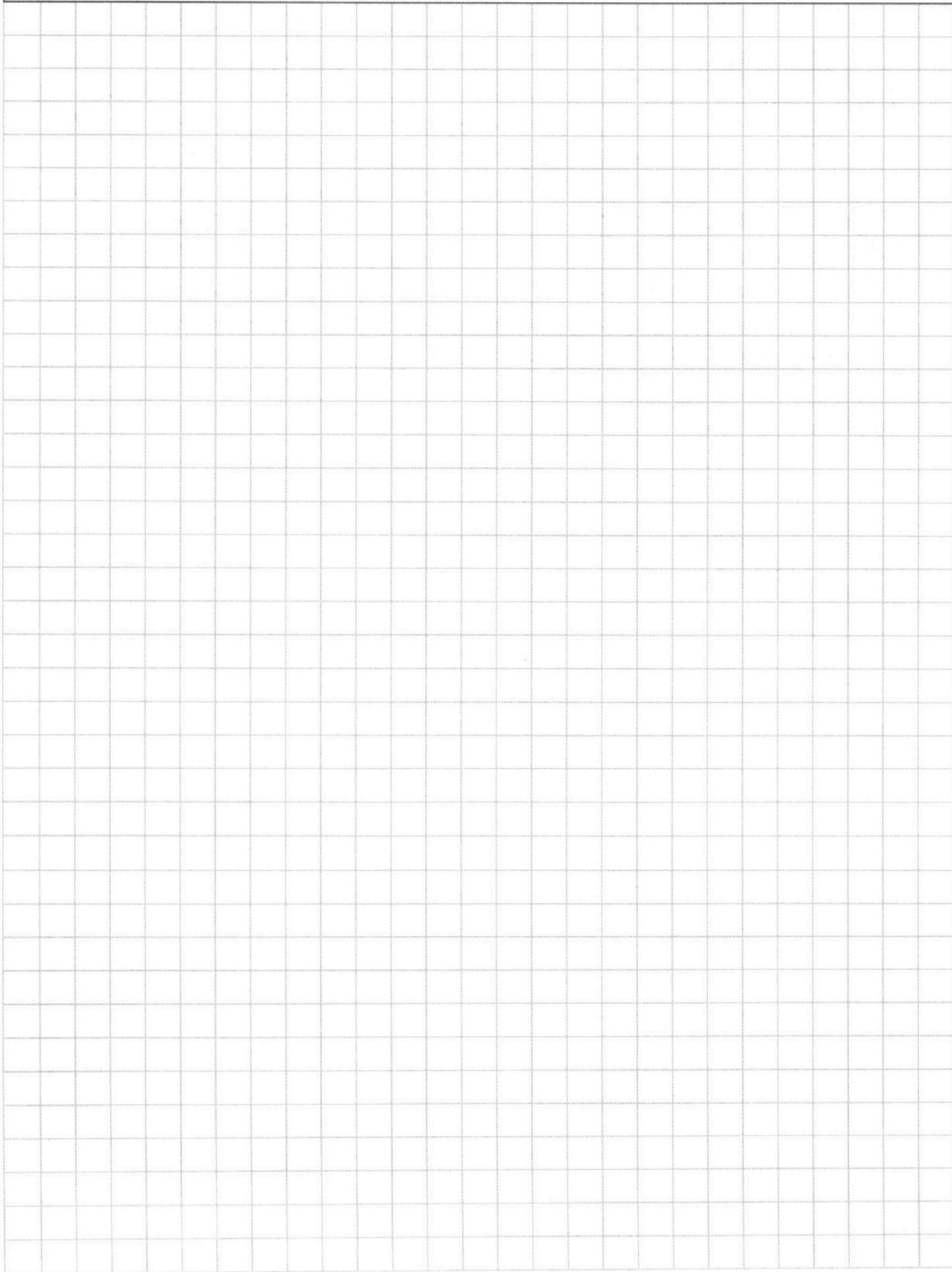
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$N \equiv 3 \pmod{22}$$

$$22N + 3; (N-1)$$

$$25; N-1$$

$$N=6$$

$$\frac{300}{N-1} - \frac{300}{22} = 13 \dots > N$$

$$132 \quad \boxed{135}$$

$$x^2 + 3x + 3 = 6^2$$

$$x: 3$$

$$x = 3x'$$

$$3x'^2 + 3x' + 1 = 2 \cdot 6^{2-1}$$

$$y-1=0$$

$$y=0$$

$$3 \frac{\pm\sqrt{21}-3}{6}$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\frac{-3 \pm 1}{2} = (-2; -1)$$

$$2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

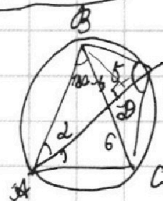
$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{17}}{5} \cdot \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{\sqrt{7}}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{4}}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{11}{5\sqrt{5}}$$



$$2R \sin \alpha \cdot 2R \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha / 2 = 5 \quad 48$$

$$2R \cos \alpha \cdot 2R \sin \alpha \cdot \sin 4\alpha / 2 = 6 \quad 336$$

$$\frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{6}{5} \quad \cos 2\alpha = \frac{3}{5} \quad \sin 2\alpha = \frac{4}{5}$$

$$2R^2 (\sin \alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha) = 5 \quad \sin^2 \alpha = \frac{24}{25}$$

$$2R \sin \alpha \sin 3\alpha \sin 2\alpha = \frac{24}{25} \cdot \frac{3}{5} - \frac{4}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{44}{125}$$

$$R = \sqrt{\frac{4 \cdot 24 \cdot 44 \cdot 2}{28 \cdot 3 \cdot 11}} = \frac{12\sqrt{5}}{816} \sqrt{33}$$

$$R = \frac{25\sqrt{5} \cdot 5 \cdot 5\sqrt{5}}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11} = \frac{625}{132}$$

$$2R (2 \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha) = \frac{625}{132} \left(\sqrt{\frac{4}{5}} + \frac{24}{5} \frac{4}{5} + \frac{11}{5\sqrt{5}} \right)$$

$$x = \frac{-2a+9}{10} \in (9; 5; 12; 5)$$

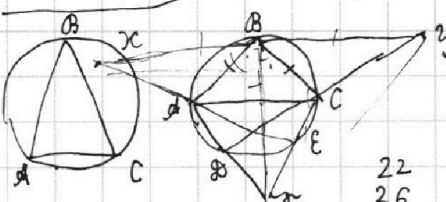
$$\frac{19}{2} \leq \frac{-2a+9}{10} \leq \frac{25}{2}$$

$$86 \leq -2a \leq 116$$

$$-58 \leq a \leq -43$$

$$4a^2 + 32a + 81 - 28a + 40b = \frac{625}{66} \cdot \frac{2 \cdot 1 + 4\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = \frac{25(2\sqrt{5}+20)}{66}$$

$$C_8^3 \cdot 5 = 5 \cdot 8 \cdot 7 = 280$$



$$B \cdot x \cdot y / 2 = \frac{7.5}{7.5} \cdot \frac{12.1}{16} = \frac{22.1}{16}$$

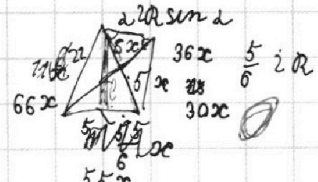
$$3 \cdot 7.5 \cdot \frac{12.1}{16} = \frac{22.1}{16}$$

$$5 \cdot 2.5 \cdot \frac{12.1}{16} = \frac{12.1}{16}$$

$$5 \cdot 6 \cdot 2.5 = \frac{12.1}{16}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{5}{22} \quad \sin \alpha = \frac{14}{22}$$

$$\cos \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{11}} \quad \sin \alpha = \frac{14 \cdot 71}{442} = \sqrt{\frac{1207}{1936}}$$



$$2R \sin \alpha \cdot 2R \sin 2\alpha \cdot \frac{6}{5} \cdot \sin \alpha / 2 = 6$$

$$R^2 = \frac{11}{2 \cdot 17 \cdot 71}$$

$$\sqrt{30} \cdot x \cdot \sqrt{11^2 - 81} = \sqrt{30} \cdot \sqrt{5 \cdot 12} \cdot x = 5x$$

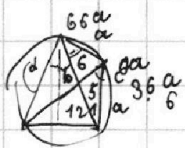
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\sin 2d}{\cos 2} = \frac{5}{6} \quad \sin d = \frac{5}{12} \quad \cos d = \frac{\sqrt{119}}{12}$$

$$30b^2 = 36a \cdot 85a \quad b^2 = 6 \cdot 17a$$

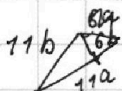
$$b = \sqrt{102} a$$

$$\frac{51}{51}$$

$$\frac{255}{2501}$$

$$\frac{918}{225}$$

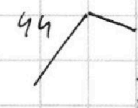
$$\frac{693}{693}$$



$$\frac{11}{5} - \frac{5}{11}$$

$$\frac{11}{5} - \frac{5}{11} = \frac{96}{55} \quad 1683 \cdot 693 =$$

$$\left(\frac{20+16\sqrt{119}}{44}\right) \left(\frac{16\sqrt{5}}{44}\right) \left(\frac{20+5\sqrt{5}}{44}\right) \left(\frac{20+11\sqrt{5}}{44}\right)$$



$$\frac{2\sqrt{5}}{11} + 1 \quad \frac{11+2\sqrt{5}}{22} \quad \frac{2\sqrt{5}}{2} + 1$$

$$\frac{8}{44^2} \sqrt{(20\sqrt{5}+420)(20+5\sqrt{5})(20+11\sqrt{5})}$$

$$\sqrt{\left(\frac{11+2\sqrt{5}}{22}\right) \cdot \frac{2\sqrt{5}}{11} \cdot \left(\frac{2\sqrt{5}-11}{22}\right) \cdot \frac{11+(1/2)}{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\frac{10\sqrt{5}+40}{22^2} \sqrt{20+11\sqrt{5}}$$

$$\frac{80\sqrt{5}+44\sqrt{5}}{320\sqrt{5}+776\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+2}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{5}-2}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} BC^2$$

$$\frac{16+22+\sqrt{5}}{10} \cdot 2\sqrt{11}$$

$$49 + 7 + 0,25$$

