



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 15



1. [3 балла] Вася строит башни из кубиков. Когда он построил  $N$  башен по 22 кубика, у него осталось 3 кубика. После чего он из всех своих кубиков построил  $N - 1$  башню так, что во всех башнях кубиков оказалось поровну. Какое наибольшее количество кубиков могло быть у Васи, если известно, что их меньше 300?

2. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^2 + 7x + 12| + |x^2 + 2x - 8| \leq |5x + 20|.$$

3. [4 балла] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 3x + 3 = 6^y.$$

4. [5 баллов] Вокруг равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) описана окружность  $\Omega$ . Прямая, содержащая биссектрису  $AD$  треугольника  $ABC$ , пересекает повторно  $\Omega$  в точке  $E$ . Найдите периметр четырёхугольника  $ABEC$ , если известно что площади треугольников  $BED$  и  $CED$  равны 5 и 6 соответственно.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых существует значение параметра  $b$  такое, что уравнение  $5x^2 + (2a + 9)x + 7a - 10b = 0$  имеет два корня  $x_1$  и  $x_2$  таких, что  $5 \leq x_1 \leq 10$  и  $14 \leq x_2 \leq 15$ .

6. [5 баллов] Кузнечик прыгает по целочисленным узлам координатной сетки. За один шаг он может либо переместиться на одну клетку вверх или вправо, если при этом он попадает в точку, в которой не был раньше; либо вернуться на один шаг назад по уже пройденному пути – соответственно, вниз или влево. Сколько существует различных путей с началом в точке  $O(0; 0)$  и концом в точке  $A(3; 5)$  таких, что в точку  $A$  кузнечик попадает не более чем за 10 шагов? (Достигая точки  $A$ , кузнечик останавливается.)

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность  $\omega$ , а на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , взяты точки  $E$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . На лучах  $EA$  и  $DC$  отметили точки  $X$  и  $Y$  соответственно таким образом, что  $AX = CF$  и  $CY = AF$ . Найдите площадь четырёхугольника  $BXFY$ , если  $BF = 7,5$ ,  $XY = 15$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Из условия следует, что у Васи  $22N+3$  кубика.

К тому же это число делится на  $N-1$

$$(22N+3):(N-1) \Leftrightarrow (22N+3)-22(N-1):(N-1) \Leftrightarrow 25:(N-1)$$

П.к.  $25=5^2$ ,  $N$  может быть равно только 2, 6 и 26

При  $N=26$   $22N+3=572 > 300$ , что не соответствует условию.

При  $N=6$   $22N+3=135 < 300$ , что соответствует условию.

Ответ: 135 кубиков

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Разложим квадратные трехчлены и  
вынесем множитель из-под модуля:

$$|(x+3)(x+4)| + |(x+4)(x-2)| \leq 5|x+4| \quad \text{Заметим, что}$$

при  $x = -4$  неравенство выполняется.

При  $x \neq -4$  можно сократить на  $|x+4|$   
(учитывая, что все множители положительны)  
Имеем:

$$|x+3| + |x-2| \leq 5 \quad \text{Решим данное неравенство}$$

методом интервалов:

$$1) \ x \leq -3 \quad \& \quad -1 - 2x \leq 5 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow x = -3$$

$$2) \ -3 < x < 2 \quad 5 \leq 5 \Rightarrow \text{не } -3 < x < 2$$

$$3) \ x \geq 2 \quad 2x + 1 \leq 5 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{Итого } x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\} \cup [-3; 2]$$

$$\text{Ответ: } x \in \{-4\} \cup [-3; 2]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $R$  — радиус окружности, а углы при основании равны  $2\alpha$ , тогда  $\angle B \hat{A} D = \angle D \hat{A} C = 2\alpha$   
 $\angle B \hat{D} A = 2\alpha$   $\angle A \hat{C} D = 3\alpha$   $\angle A \hat{B} D = 180 - 3\alpha$ .  
Зная, что  $S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ , получаем, что

Заметим, что при любом  $x$  левая часть равенства — целое число. Следовательно  $y \geq 0$ . Пусть  $y > 0$ , тогда левая часть равенства кратна трем, тогда  $x = 3$ .

Пусть  $x = 3x_1$ , сократив на 3 имеем:

$3x_1^2 + 3x_1 + 1 = 2 \cdot 6^{y-1}$ . Левая часть не кратна 3, а значит  $y - 1 = 0$ . Получаем квадратное

уравнение  $3x_1^2 + 3x_1 - 1 = 0$ , корни которого,  $\frac{\pm\sqrt{21}-3}{6}$ , иррациональны и не удовлетворяют условию.

Рассмотрим  $y = 0$ . Получим квадратное уравнение  $x^2 + 3x + 2 = 0$ , которое имеет 2 целых корня:  $x = -2; -1$

Ответ:  $(-2; 0); (-1; 0)$



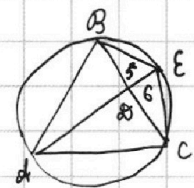
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Треугольники  $\triangle BED$  и  $\triangle EDC$  имеют одинаковую высоту. Значит их площади относятся как их основания:  $\frac{BD}{DC} = \frac{5}{6}$ . По свойству

биссектрисы треугольника  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{6}$

Поскольку  $AB = BC$  вычисляем, что  $AC = \frac{6}{5} AB$ ,

$BD = \frac{5}{11} AB$  и  $DC = \frac{6}{11} AB$ . Из вписанности следует, что  $\angle DBE = \angle FEA = \angle BAE$ , то есть  $\triangle BED \sim \triangle ABE$  по 2 углам. Делаем вывод, что  $\frac{DE}{BE} = \frac{BE}{AE} = \frac{BD}{AB} = \frac{5}{11}$ .

Наконец, по свойству пересекающихся хорд:

$$AD \cdot DE = \frac{96}{55} \cdot \frac{5}{11} BE^2 = BD \cdot DC = \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{11} AB^2 \Rightarrow BE = AB \sqrt{\frac{5}{4}}$$

(вычисленная сторона)

Найдем неизвестную сторону по формуле Герона для  $\triangle BEC$   $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 11$

~~$AB = \frac{5}{11} AB$   $BE = \frac{1}{4} AB$   $CE = \frac{5}{44} AB$  Подставим в формулу Герона~~

~~$AB = \frac{1}{4} AB$   $BD = \frac{5}{11} AB$   $BE = \frac{1}{4} AB$   $CE = \frac{5}{44} AB$   $DE = \frac{5}{11} AB$~~

~~$S = \sqrt{11 \cdot 20 \cdot 20} = 20$   $BD = \frac{5}{11} AB$   $BE = \frac{1}{4} AB$   $CE = \frac{5}{44} AB$   $DE = \frac{5}{11} AB$~~

~~$\sqrt{11 \cdot 20 \cdot 20} = 20$   $BD = \frac{5}{11} AB$   $BE = \frac{1}{4} AB$   $CE = \frac{5}{44} AB$   $DE = \frac{5}{11} AB$~~

$\triangle BEC$  вычисляем, получим  $BE = BCE = \frac{\sqrt{5}}{4} BC$   $S = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+2}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{5}-2}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 BC^2} = \frac{1}{4} BC^2 = 11 \Rightarrow BC = 2\sqrt{11}$

Теперь можно вычислить  $P_{ABEC}$  (периметр данного четырехугольника)  $= AB + BE + EC + AC = BC + 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} BC + \frac{6}{5} BC = \frac{22\sqrt{11} + 5\sqrt{55}}{5}$

Ответ:  $\frac{22\sqrt{11} + 5\sqrt{55}}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Корни квадратного уравнения определяются двумя параметрами  $\rightarrow$  средним  $(-\frac{b}{2a})$  и разностью  $(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2})$ , где  $a, b, c$  - коэффициенты квадратного уравнения.

В нашем случае можно заметить, что эта разность средних корней не зависит от  $b$ , зато выражение под корнем в их разности будет зависеть от  $b$  линейно ( $D = 4a^2 + 8a + 81 + 40b$ ), то есть, при заданном  $a$  эта разность корней может принимать любые значения от  $0$  до  $+\infty$ , в то время, как  $\pm$  среднее остается неизменным.

Пусть  $m = -\frac{2b}{a} = -\frac{2a+9}{10}$  - среднее корней.  
Очевидно, что при  $m-5 < 14-m$  или  $m-10 > 15-m$  невозможно подобрать разность корней так, чтобы они удовлетворяли условию, а при остальных  $m$  это возможно.

Решаем систему неравенств:

$$\begin{cases} -\frac{2a+9}{5} \geq 19 \\ -\frac{2a+9}{5} \leq 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq -43 \\ a \geq -58 \end{cases} \text{ Получаем } a \in [-58; -43]$$

Ответ:  $a \in [-58; -43]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для начала заметим, что минимальный путь кузнечика составляет 8 ходов. Также видно, что «лишние» ходы не изменяют четности этого количества, так как они выглядят, как вверх-вниз или влево-вправо, возвращая его в исходную точку. Следовательно, в любом маршруте кузнечика таких пар «лишних» ходов либо 0, либо 1. Более того, к каждой маршруту с лишними ходами соответствует единственный маршрут без них (получается удалением пары «лишних» ходов) а каждой маршруту без них - 8 маршрутов с ними (перед любым из 8 ходов можно добавить «лишнюю» пару в перпендикулярном ему направлении). Очевидно, что число маршрутов из 8 ходов равно количеству способов выбрать 3 вертикальных хода из 8, то есть  $C_8^3 = 56$ , количество маршрутов из 10 ходов  $= 56 \cdot 8 = 448$ , а общее их число, следовательно  $56 + 448 = 504$

Ответ: 504 путей

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что ~~угол~~  $\angle B C Y = \angle B A F$  (из вписанности), из чего (в купе с равенством соответствующих сторон  $A B = B C$ ,  $A F = C Y$ ) следует, что  $\triangle A B F = \triangle B C Y$ .

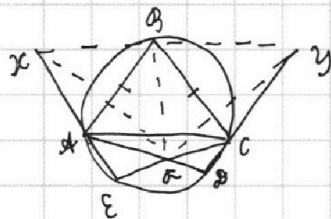
Аналогично получаем  $\triangle A B X = \triangle B C F$

Но есть  $B X = B Y = B F$ , а  $\angle X B F = \angle B F Y = \angle A B C$ .

Поскольку  $X Y = 2 B F = B X + B Y$  видим, что  $B \in X Y$ .

Далее того  $\angle X B F = 180^\circ / 2 = 90^\circ$ , а значит  $\triangle X B Y$   $\triangle X B F Y$  - треугольник с основанием  $X Y$  и высотой  $B F$ .  $S_{\triangle X B F Y} = X Y \cdot B F / 2 = 56,25$

Ответ: 56,25







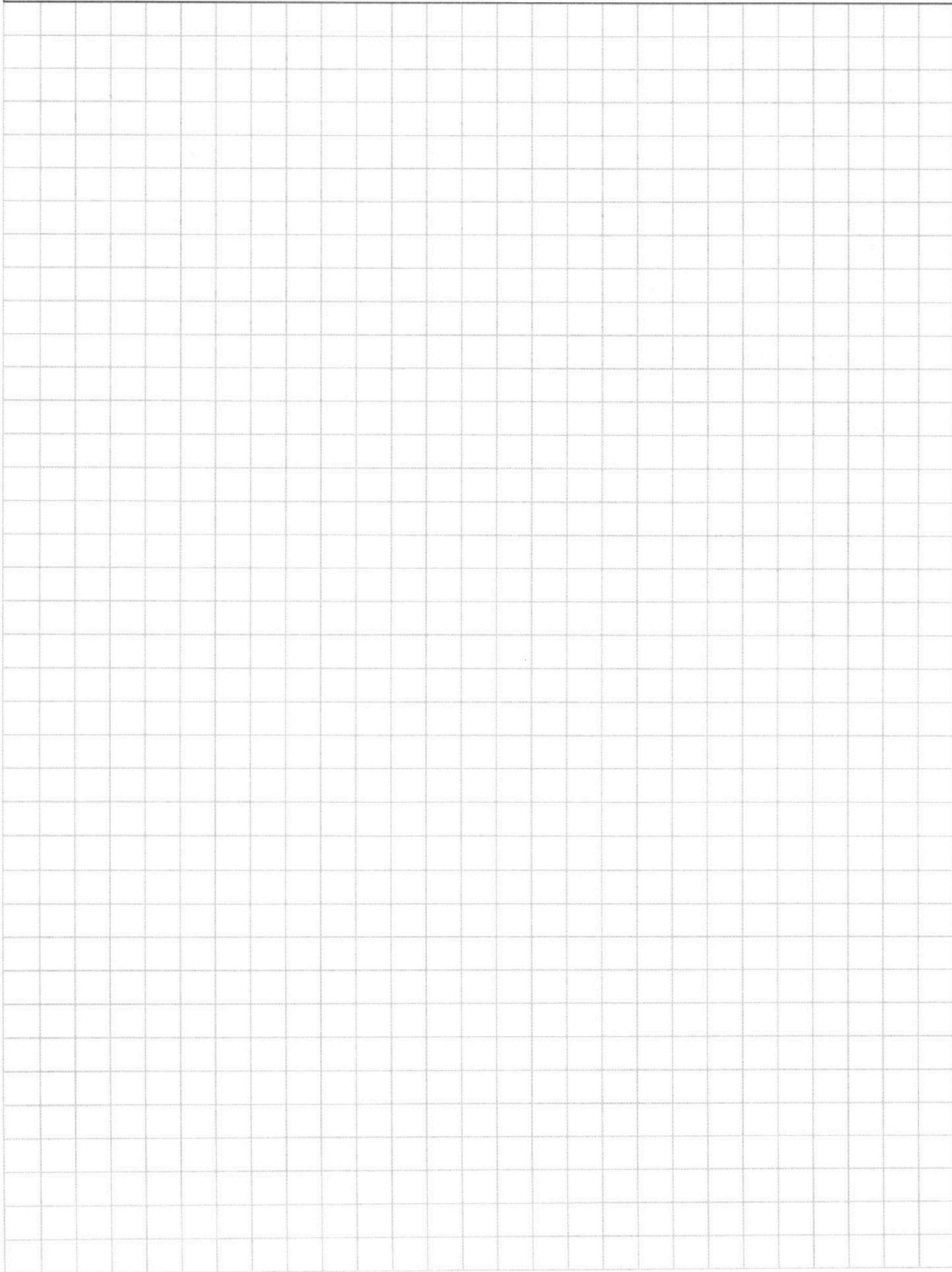
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$N \equiv 3 \pmod{22}$$

$$22N + 3; (N-1)$$

$$25; N-1 \quad N=6$$

$$\frac{300}{N-1} - \frac{300}{22} = 13 \dots > N$$

$$132 \quad \boxed{135}$$

$$x^2 + 3x + 3 = 6^2 \quad x: 3 \quad x = 3x'$$

$$3x'^2 + 3x' + 1 = 2 \cdot 6^{2-1} \quad y-1=0$$

$$y=0$$

$$3 \frac{\pm\sqrt{21}-3}{6}$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\frac{-3 \pm 1}{2} = (-2; -1)$$

$$2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

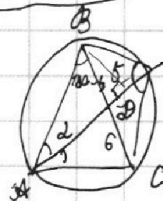
$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{17}}{5} \cdot \frac{4}{5} = \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{\sqrt{7}}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{4}}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{11}{5\sqrt{5}}$$



$$2R \sin \alpha \cdot 2R \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha / 2 = 5 \quad 48$$

$$2R \cos \alpha \cdot 2R \sin \alpha \cdot \sin 4\alpha / 2 = 6 \quad 336$$

$$\frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{6}{5} \quad \cos 2\alpha = \frac{3}{5} \quad \sin 2\alpha = \frac{4}{5}$$

$$2R^2 (\sin \alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha) = 5$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$$

$$\sin 4\alpha = -\frac{336}{625}$$

$$2R \sin \alpha \sin 3\alpha \sin 2\alpha = \frac{24}{5} \cdot \frac{3}{5} - \frac{7}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{44}{125}$$

$$R = \sqrt{\frac{4 \cdot 24 \cdot 44 \cdot 2}{28 \cdot 3 \cdot 11}} = \frac{12\sqrt{5}}{11}$$

$$2R (\sin 2\alpha + \sin \alpha + \sin 4\alpha)$$

$$R = \frac{25\sqrt{5} \cdot 5 \cdot 5\sqrt{5}}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11} = \frac{625}{132}$$

$$2R (2 \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha)$$

$$\frac{625}{132} \left( \sqrt{\frac{4}{5}} + \frac{24}{5} \frac{4}{5} + \frac{11}{5\sqrt{5}} \right)$$

$$x = \frac{-2a+9}{10} \in (9; 5; 12; 5)$$

$$\frac{19}{2} \leq \frac{-2a+9}{10} \leq \frac{25}{2}$$

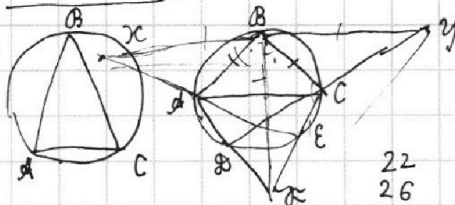
$$86 \leq -2a \leq 116$$

$$-58 \leq a \leq -43$$

$$4a^2 + 32a + 81 - 28a + 40b$$

$$\frac{625}{66} \frac{2 \cdot 1 + 4\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = \frac{25(2\sqrt{5}+20)}{66}$$

$$C_8^3 \cdot 5 = 5 \cdot 8 \cdot 7 = 280$$



$$B \cdot x \cdot y / 2 = \frac{7.5}{7.5} \frac{12.1}{16} = \frac{22.1}{16}$$

$$3 \cdot 7.5 \cdot 12.1 = 259.875$$

$$5 \cdot 2.5 \cdot 12.1 = 151.25$$

$$5 \cdot 6 \cdot 2.5 = 75$$

$$120.7$$

$$\cos 2\alpha = \frac{5}{22}$$

$$\sin \alpha$$

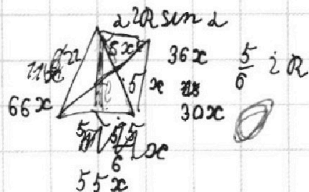
$$\frac{14}{119} \frac{12.1}{12.1}$$

$$2R \sin \alpha \cdot 2R \sin 2\alpha \cdot \frac{6}{5} \cdot \sin \alpha / 2 = 6$$

$$\cos 2\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{11}} \sqrt{\frac{27}{44}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{17 \cdot 71}{442}} = \sqrt{\frac{1207}{1936}}$$

$$\sqrt{30} x \sqrt{11^2 - 81} = \sqrt{30} \sqrt{5 \cdot 12} x = 5x \cdot 2 \sin^2 \alpha = \frac{11 \cdot 44^2}{2 \cdot 17 \cdot 71}$$



$$22$$

$$26$$

$$132$$

$$64$$

$$542$$

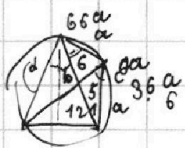
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{6} \quad \sin \alpha = \frac{5}{12} \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{119}}{12}$$

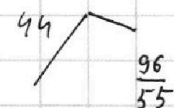
$$30b^2 = 36a \cdot 85a \quad b^2 = 6 \cdot 17a \quad b = \sqrt{102} a$$

$$6\sqrt{102} + 66 + 36 = 6\sqrt{102} + 102$$

$$(3\sqrt{102} + 51)(51 - 3\sqrt{102})(3\sqrt{102} - 175)(3\sqrt{102} + 15) = (51^2 - 9 \cdot 102)(9 \cdot 102 - 15^2)$$

$$\frac{11}{5} - \frac{5}{11} = \frac{96}{55} \quad 1683 \cdot 693 =$$

$$\left(\frac{20+16\sqrt{119}}{44}\right) \left(\frac{16\sqrt{119}}{44}\right) \left(\frac{20+5\sqrt{5}}{44}\right) \left(\frac{20+11\sqrt{5}}{44}\right)$$



$$\frac{2\sqrt{5}}{11} + 1 \quad \frac{11+2\sqrt{5}}{22} \quad \frac{2\sqrt{5}}{2} + 1$$

$$\frac{8}{44^2} \sqrt{(20\sqrt{5} + 420)(20 + 5\sqrt{5})(20 + 11\sqrt{5})}$$

$$\sqrt{\left(\frac{11+2\sqrt{5}}{22}\right) \cdot \frac{2\sqrt{5}}{11} \cdot \left(\frac{2\sqrt{5}-11}{22}\right) \cdot \frac{11+(1/2)}{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\frac{10\sqrt{5} + 40}{22^2} \sqrt{20 + 11\sqrt{5}}$$

$$\frac{80\sqrt{5} + 44\sqrt{5}}{320\sqrt{5} + 776\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+2}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{5}-2}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} BC^2$$

$$\frac{22 + \sqrt{5}}{10} \cdot 2\sqrt{11}$$



$$49 + 7 + 0,25$$