

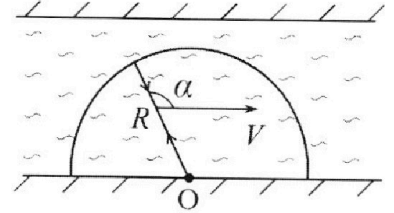


Олимпиада «Физтех» по физике, февраль 2023



Вариант 09-04

1. На реке отведена зона для безопасного плавания. Граница зоны – половина окружности радиуса $R = 60$ м, центр в точке O (см. рис.). Скорость течения реки $V = 0,8$ м/с. В ходе заплывов по реке пловец каждый раз стартует в точке O , плывет по прямой до границы зоны, а затем по той же прямой возвращается в точку старта. В системе отсчета, связанной с водой, скорость \vec{U} пловца одинакова по модулю при движении в любом направлении.

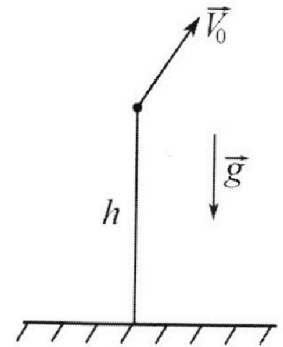


В первом заплыве пловец проплывает 60 м против течения ($\vec{U} \uparrow \vec{V}$) и возвращается ($-\vec{U} \uparrow \vec{V}$) в точку старта. Время движения на первой половине дистанции в 9 раз больше, чем на второй.

- 1) Найдите скорость U пловца в системе отсчета, связанной с водой.
- 2) Найдите продолжительность T заплыва, в котором вектор скорости реки образует угол $\alpha = 120^\circ$ с прямой, по которой движется пловец (см. рис.).
- 3) За какое наибольшее время T_{MAX} пловец после старта в точке O может доплыть до границы зоны и вернуться в точку старта?

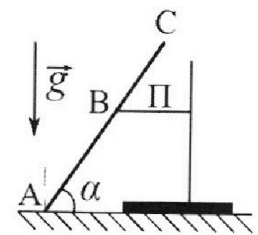
2. Мяч брошен с башни высотой $h = 14$ м под углом к горизонту (см. рис.). Начальная скорость мяча $V_0 = 13$ м/с, продолжительность полета мяча $T = 2,8$ с.

- 1) Найдите наибольшую высоту H , на которой мяч находился в полете. Все высоты отсчитываются от горизонтальной поверхности.
- 2) На каком расстоянии d от точки старта мяч упадет на горизонтальную поверхность? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.



3. Однородный стержень опирается на горизонтальный шероховатый пол и гладкую горизонтальную пластинку Π (см. рис.). В серии опытов при фиксированном отношении AB/AC (B – точка касания стержня и пластинки во всех опытах), перемещая пластинку по вертикали, а подставку по горизонтали, изменяют угол α , который стержень образует с горизонтальной плоскостью. Во всех опытах стержень остается в покое.

- 1) При каком угле α сила трения наибольшая по модулю?
- 2) Если коэффициент трения скольжения стержня по горизонтальной поверхности $\mu = 0,5$, то при каких значениях отношения AB/AC стержень будет оставаться в покое при найденном α ?



Олимпиада «Физтех» по физике,
февраль 2023

Вариант 09-04



4. Брусок массой $M = 1$ кг изготовлен из материала, удельная теплоемкость c которого зависит от температуры t по закону, представленному на графике к задаче.

1) Какое количество Q теплоты следует отвести от бруска, чтобы температура бруска уменьшилась от $t_0 = 100$ °С до $t_1 = 80$ °С?

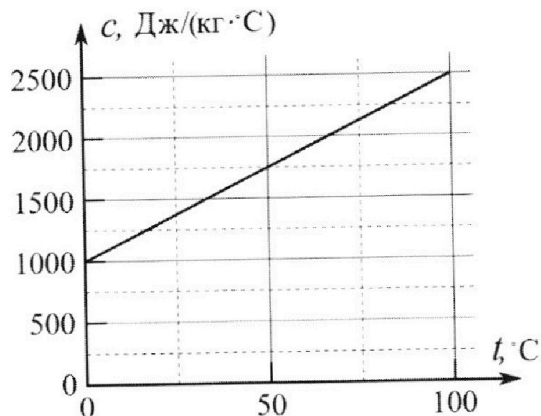
Этот брусок помещают в калориметр, содержащий глицерин при температуре $t_2 = 19$ °С. Температура бруска $t_1 = 80$ °С, масса глицерина $m = 0,4$ кг.

В калориметре устанавливается тепловое равновесие.

2) Найдите температуру t_3 в калориметре в равновесном состоянии.

В рассматриваемом диапазоне температур удельная теплоемкость глицерина

$c_{\Gamma} = 2,5 \cdot 10^3$ Дж/(кг·°С). Потери теплоты и теплоемкость калориметра считайте пренебрежимо малыми.

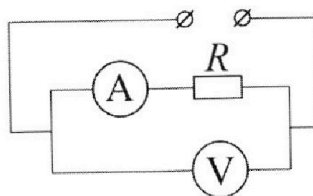
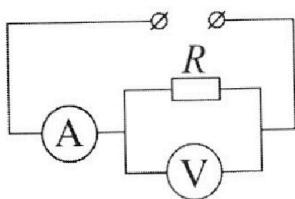


5. На рисунках к задаче приведены два варианта подключения амперметра и вольтметра для измерения силы тока через резистор сопротивлением R и напряжения на этом резисторе. При неизменном напряжении U источника показания вольтметра отличаются в 1,5 раза, а амперметра – вдвое.

1) Найдите сопротивление r_A амперметра.

2) В какой именно из двух цепей источник развивает большую мощность? Ответ подкрепите соответствующими вычислениями.

3) Найдите эту мощность P_{MAX} .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



В первом заходе скорость плавца против течения (в неподвижной системе отсчета) равна $u-v$, а по течению: $u+v$. Имеем:

$$\frac{60}{u-v} = 9 \frac{60}{u+v}, \text{ откуда } u = 1,25 \text{ и } v = 1 \text{ м/с}$$

Для ответа на пункты 1, 3 рассчитаем время движения плавца для произвольного α . Пусть u_x и u_y - проекции скорости плавца относительно воды на оси Ox и Oy , параллельно и перпендикулярно течению соответственно. Пусть t_α - время движения до границы круга. Заметим, что t_α равно времени движения до границы под углом $180^\circ - \alpha$ (одинаковое отношение перемещений по Ox и Oy , но разное направление течения). Следовательно общее время захода равно $t_\alpha + t_{180-\alpha}$.

Запишем проекции перемещения плавца на Ox и Oy : $u_x t_\alpha + v t_\alpha = R \cos \alpha$; $u_y t_\alpha = R \sin \alpha$, или $u_x = \frac{R \cos \alpha}{t_\alpha} - v$; $u_y = \frac{R \sin \alpha}{t_\alpha}$. По теореме Пифагора: $u_x^2 + u_y^2 = u^2$, или $u^2 = \frac{R^2}{t_\alpha^2} + v^2 - \frac{2vR \cos \alpha}{t_\alpha}$. Допустив на t_α^2 нулем квадратное уравнение, решив которое найдем: $t_\alpha = \frac{2vR \cos \alpha + \sqrt{u^2 - \sin^2 \alpha} v^2}{2(u^2 - v^2)}$.

Для пункта 2 найдем значение суммарного времени при $\alpha = 120^\circ$

$$= \frac{200\sqrt{3}}{1-0,64} \approx 240 \text{ с.} = T$$

Минимального значения (*) достигает при $\alpha = 24^\circ 50'$ и имеет $\frac{2vR \sqrt{u^2 - \sin^2 \alpha} v^2}{u^2 - v^2} = 2 \cdot 60 \sqrt{1-0,64} = 200 \text{ с.}$

Максимального значения (*) достигает при $\alpha = 0^\circ (180^\circ)$

$$\text{Имеем } \frac{2vR \sqrt{u^2 - \sin^2 \alpha} v^2}{u^2 - v^2} = \frac{2 \cdot 60 \sqrt{1-0,64}}{1-0,64} \approx 333 \text{ с.} = T_{\text{max}}$$

Ответ: 1) $u = 1 \text{ м/с}$ 2) $T = \frac{200\sqrt{3}}{3} \approx 240 \text{ с.}$ 3) $T_{\text{max}} \approx 333 \text{ с.}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть α - угол броска относительно горизонта.
Запишем уравнение перемещения в проекции
на вертикальную ось OY: $h = \frac{gT^2}{2} - v_0 \sin \alpha T$

$$\sin \alpha = \frac{gT}{2v_0} - \frac{h}{v_0 T} = \frac{9}{13}, \text{ соответственно } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{88}}{13}$$

Максимальная высота подъема брошен-
ного тела вычисляется по формуле $H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$
 $= \frac{81}{20} = 4,05$ м. Высота же над уровнем горизонта
равна $H = h + \Delta H = 18,05$ м

Перемещение тела вдоль оси OX, паралле-
льной горизонту, равно $d = v_0 \cos \alpha T = 13 \text{ м/с} \cdot \frac{\sqrt{88}}{13} \cdot 2,8 \text{ с} \approx 26,32$ м

Ответ: 1) $H = 18,05$ м 2) $d = 26,32$ м

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

В изображенной конфигурации на стержень действуют следующие силы: сила тяжести mg , сила взаимодействия N_1 пластины N_1 , сила взаимодействия реакции поверхности N_2 и сила трения $F_{тр}$. Запишем равенство моментов сил относительно точки A .

Пусть l — длина стержня $k = \frac{AB}{AC}$, учитывая, что сила тяжести прилагается к центру масс однородного стержня, а N_1 сила взаимодействия пластинки перпендикулярна стержню, запишем: $mg \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha = N_1 \cdot l \cdot k$

$N_1 = \frac{mg \cos \alpha}{2k}$. Также запишем условие равновесия стержня в проекции на ось Ox , параллельную горизонту: $F_{тр} - N_1 \sin \alpha = 0$ $F_{тр} = \frac{mg \cos \alpha \sin \alpha}{2k} = \frac{mg \sin 2\alpha}{4k}$

Для пункта 1) заметим, что $\sin 2\alpha$ не принимает максимальное значение при $\alpha = 45^\circ$ (сл. $F_{тр} = \frac{mg}{4k}$) следовательно при таком угле сила трения максимальна по модулю.

Для пункта 2) заметим, что $F_{тр} \leq \mu mg$ N_2 запишем уравнение статичности в проекции на Oy : $N_2 - mg + N_1 \cos \alpha = 0$ или $N_2 = mg + \frac{mg \cos^2 \alpha}{2k}$

при $\alpha = 45^\circ$ (сл. п. 1) $N_2 = mg \frac{4k-1}{4k}$ $F_{тр} = \frac{mg}{4k}$
 $\frac{mg}{4k} \leq \mu mg \frac{4k-1}{4k}$ $k \geq \frac{\mu}{4\mu+1} \frac{\mu+1}{4\mu} = 0,45$. Кроме этого.

учтем, что при $k \leq 0,5$ стержень перевернется и этот так как центр тяжести окажется за точкой опоры. Поэтому $0,5 \leq \frac{AB}{AC} \leq 0,75$

Ответ: 1) $\alpha = 45^\circ$ 2) $0,5 \leq k \frac{AB}{AC} \leq 0,75$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Составим уравнение зависимости с от t :

$$c(t) = 1000 + 15t.$$

Для пункта 1) найдем Q по формуле $Q = M \int_{t_0}^{t_1} c dt$

$$= M (1000t + 7,5t^2) \Big|_{100}^{80} = 1 \cdot (80 \cdot 1000 + 48 \cdot 1000 - 100 \cdot 1000 - 75 \cdot 1000) = -47 \text{ кДж}$$

(знак - означает, что тепло отводилось).

Для пункта 2) запишем условие энергетического баланса $Q_1 = Q_2$ $Q_1 = (t_3 - t_2) \cdot m \cdot c_2$

$$Q_2 = M (1000t + 7,5t^2) \Big|_{t_3}^{t_1} = M (1000(t_3 - t_1 - t_3) + 7,5(t_1^2 - t_3^2))$$
$$7,5t_3^2 M + t_3 (1000M + m \cdot c_2) - 1000M t_1 - 7,5M t_1^2 - m c_2 t_2 = 0$$

Подставив все данные, и решив данное квадратное уравнение относительно t_3 (и это учитывая $19^\circ < t_3 < 80^\circ$), получим $t_3 = 60^\circ$

Ответ: 1) $Q = 47 \text{ кДж}$ 2) $t_3 = 60^\circ \text{C}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть r_a - сопротивление амперметра
 r_b - сопротивление вольтметра.

Заметим, что на 2 схеме показания вольтметра равны U , из этого следует, что в 1 схеме его показания равны $\frac{2}{3}U$, а значит напряжение на концах амперметра равно (на первой схеме) $\frac{U}{3}$. Так как в условии не указано, в каком именно случае показания амперметра больше, рассмотрим оба варианта
1) $I_1 = I_2$ $I_1 = \frac{U}{3r_a}$ (показания в 1 случае) $I_2 = \frac{U}{r_a + R}$ (во 2-ом)
 $3r_a = 2r_a + 2R$ $r_a = 2R$. Найдём r_b так как в 1 схеме $2Ua = Ub$, то $2r_a = \frac{r_b R}{r_b + R} = 4R \Rightarrow r_b = -\frac{4}{3}R$, что невозможно. Поэтому данное предположение неверно.

2) $I_1 = 2I_2$ $Ua = r_a + R \Rightarrow r_a = \frac{R}{5}$. Найдём r_b :

(действуем аналогично п. 1) $2r_a = \frac{r_b R}{r_b + R} = \frac{2}{5}R$

$r_b = \frac{2}{3}R$ (что не противоречит действительности).

Значит ответ пункта 1 - $\frac{R}{5}$

Для ответа на пункты 2 и 3 найдём

мощности, выделяемые в обоих случаях:

$$R_1 = r_a + \frac{r_b R}{r_b + R} = \frac{3}{5}R \quad P_1 = \frac{U^2}{R_1} = \frac{5U^2}{3R} \quad R_2 = \frac{(R + r_a)r_b}{R + r_a + r_b} = \frac{3}{7}R$$

$$P_2 = \frac{U^2}{R_2} = \frac{7U^2}{3R} > P_1, \text{ то есть } P_{\max} = P_2 = \frac{7U^2}{3R}$$

Ответ: 1) $r_a = \frac{1}{5}R$ 2) во второй цепи 3) $\frac{7U^2}{3R}$



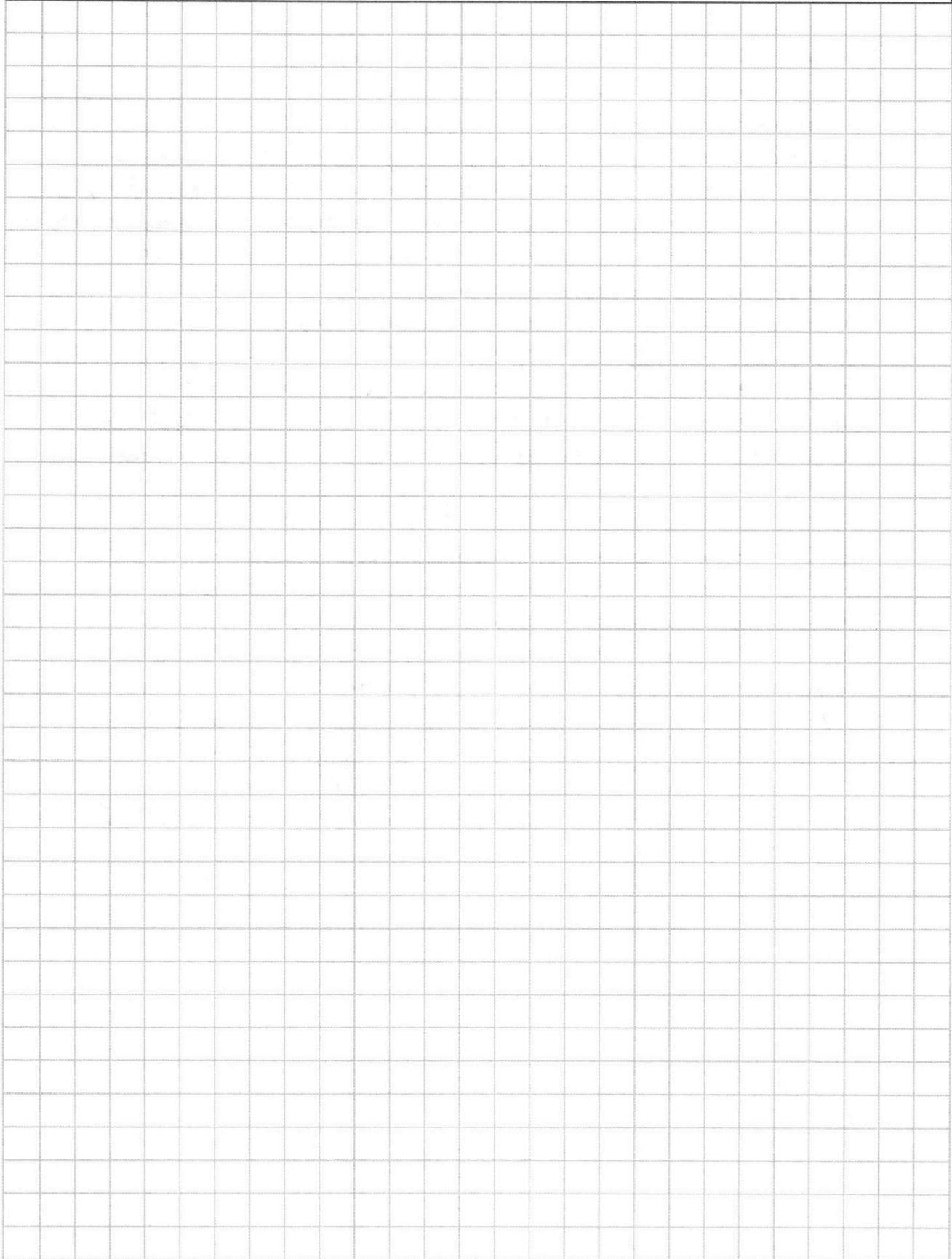
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





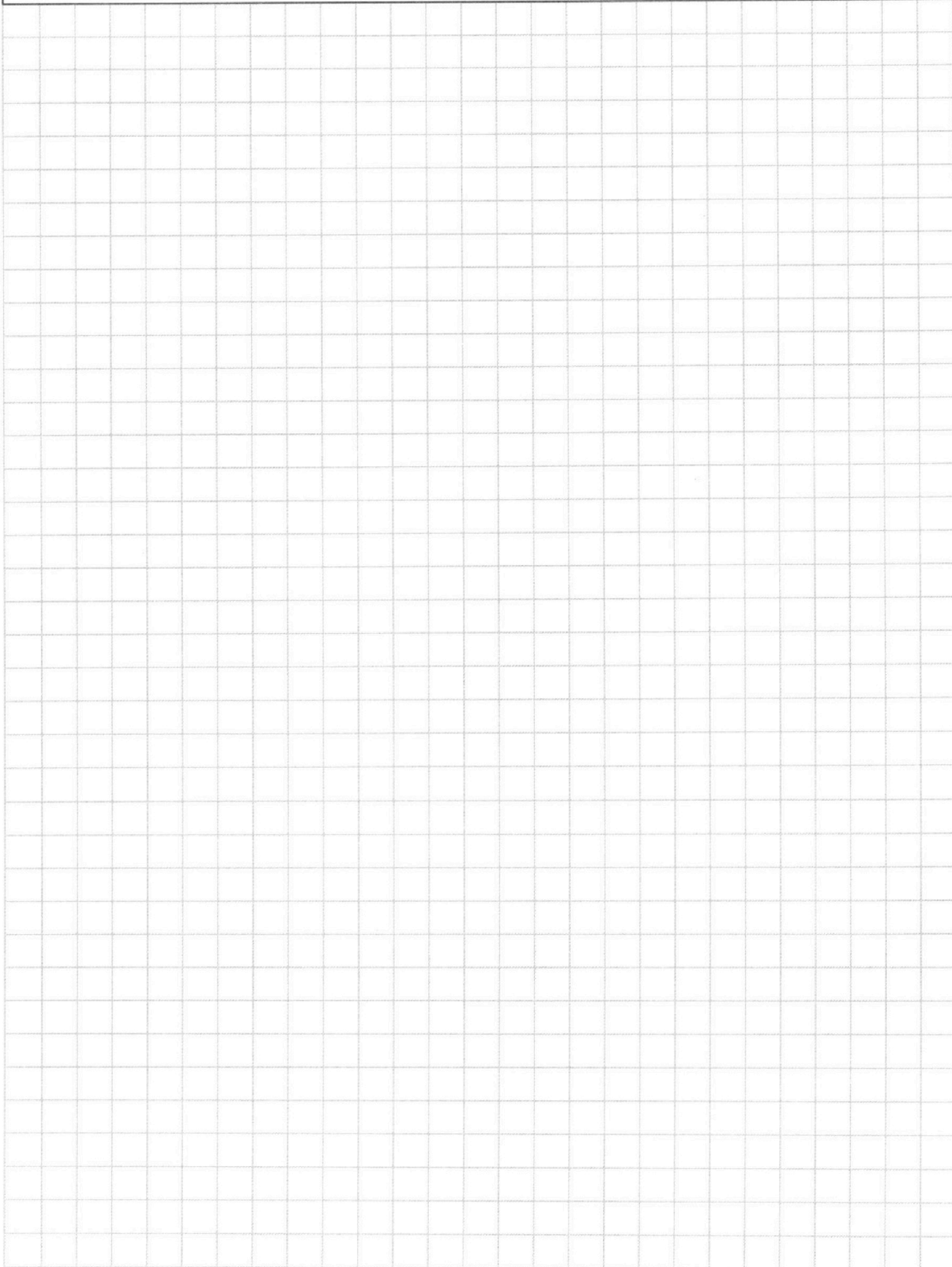
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





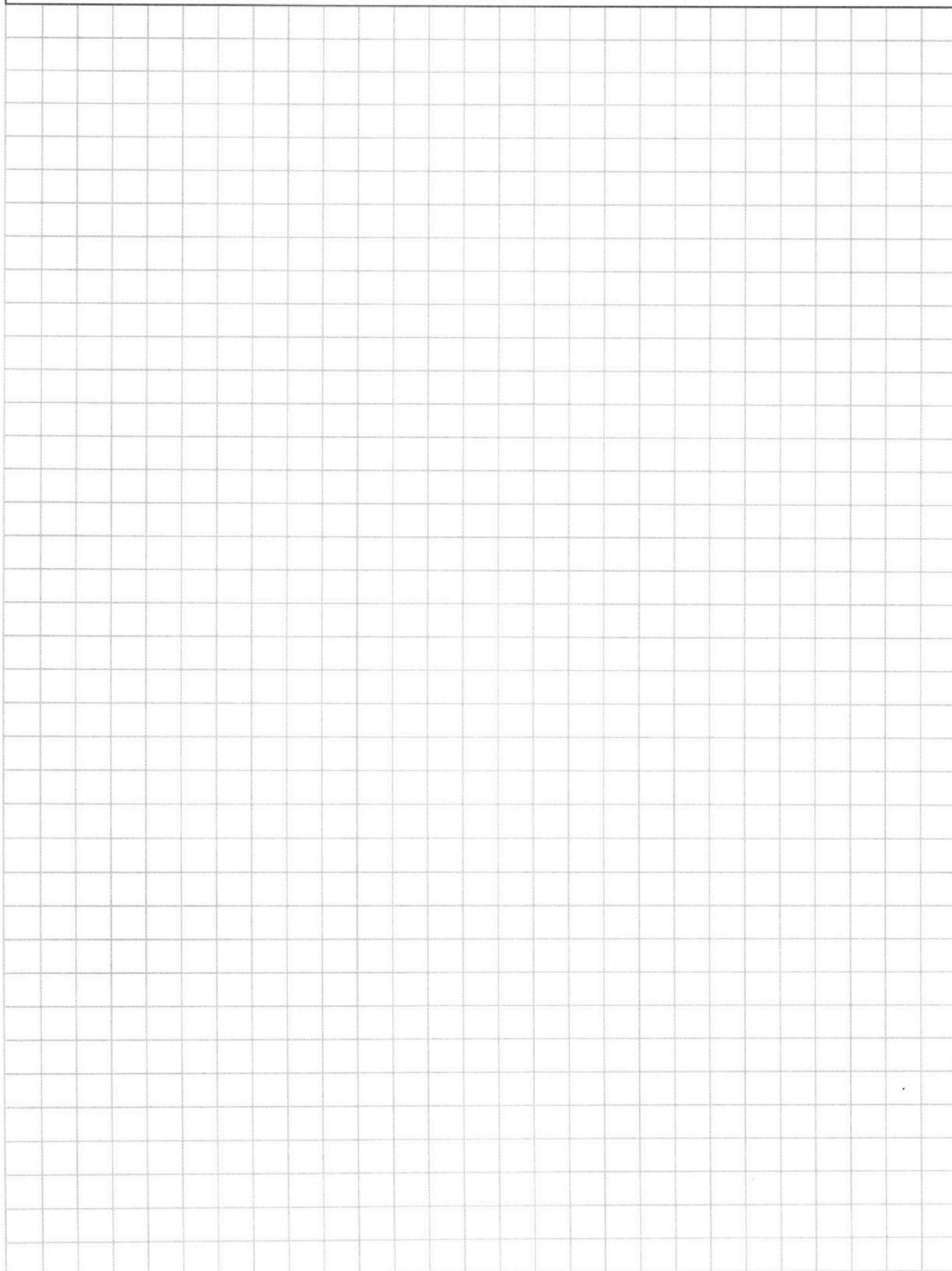
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



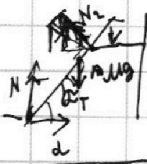
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$N_2 - m \quad m g \frac{1}{2} l \cdot \cos \alpha = k l N_2$$

$$N_2 = \frac{m g \cos \alpha}{2k} \quad \frac{m g \sin 2\alpha}{4k} \quad (\alpha = 45^\circ)$$

$$C = 1000 + 15l$$

$$Q = \mu \int_0^{80} C dl = 1000l + 7,5l^2 \quad \left| \begin{matrix} 80 \\ 100 \end{matrix} \right.$$

$$\frac{m g \cos \alpha}{2k} = \mu T$$

$$\frac{m g}{4k} \leq m g \mu \quad k \geq \frac{1}{4\mu} \quad \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$(83-19) \cdot 0,4 \cdot 2500 = 1000(80-l_3) - 100000 + 175000 = -47000$$

$$7,5l_3^2 + 2000l - 147000 = 0$$

$$4000000 + 4410000 = 8410000$$

$$\sqrt{841} = 29$$

$$\frac{u}{R+r} + r a = 2 \frac{u}{R+r a} \quad \frac{2}{R} + \frac{2}{r} + 2 r a = R + r a$$

$$r a = R - \frac{2}{R} - \frac{2}{r} = \frac{R r}{2(R+r)}$$

$$R^2 r^2 = 2R^2 r + 2R^2 r^2 - 4R^2 - 4r^2$$

$$r a = \frac{R r}{(R+r)^2} \quad \left(\frac{1}{5} R \right)$$

$$I (5 r a + R) = u \quad r a = R - \frac{2R r}{R+r} = \frac{R^2 - 2R r}{R+r}$$

$$2I (r a + \frac{R r}{r+R}) = u \quad R^2 - R r = \frac{R r}{2} \quad 2R^2 = 3R r$$

$$\frac{2}{5} R + \frac{1}{5} R$$

$$\frac{3}{5} R$$

$$\frac{5U^2}{3R}$$

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} R$$

$$\frac{7U^2}{3R}$$

$$\sqrt{22} = 4,69$$

$$8 \times 600 = 4800$$

$$92 \times 8400 = 772800$$

$$4,7 \cdot 5,6 = 26,32$$

$$5,6$$

$$28^2$$

$$235$$

$$26,32$$

$$\sqrt{13} = 3,60$$

$$6 \times 400 = 2400$$

$$72 \times 400 = 28800$$

$$\frac{720}{3} \approx 240C$$

$$\frac{u}{3r a} = 2 \frac{u}{r a + R}$$

$$6 r a = r a + R$$

$$r a = R/5$$

$$3 r a = 2 R a + R$$

$$r a = 2 R$$

$$R + R/5$$

$$\frac{R r a}{R+r a} = \frac{2}{5} R; 4R$$

$$7,5l^2 + 2000l - 147000 = 100000 - 80000 - 48000 - 19000$$

$$4410000 + 2000000 = 100 \sqrt{841} = 2900 - 2000 = 60$$

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{6}{5} + \frac{2}{3} = \frac{12}{15} + \frac{10}{15} = \frac{22}{15}$$

$$2R = 3r a$$

$$r a = \frac{2}{3} R$$

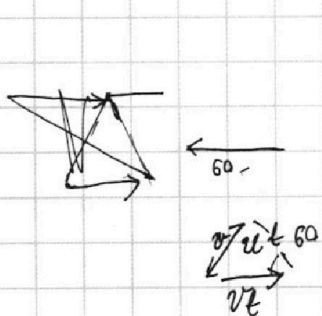
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{60}{u-v} = 9 \frac{60}{u+v} \quad 8u = 10v \quad u = \frac{5}{4}v = 1 \text{ м/с}$$

$$R^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos \alpha = (u \cdot t)^2$$

$$3600 + 0,64t^2 + 48t = t^2$$

$$0,36t^2 - 48t + 3600 = 0$$

$$\sqrt{48^2 - 4 \cdot 0,36 \cdot 3600} = 24\sqrt{13}$$

$$3600 + v^2 - 0,64t^2 - 48t = t^2$$

$$0,36t^2 + 48$$

$$\frac{100\sqrt{13} - 200}{3} +$$

$$\frac{48 + 24\sqrt{13}}{0,72} = \frac{200 + 100\sqrt{13}}{3}$$

проекции $u_x \uparrow$

$$(u \cos \beta - v) t = R \cos \alpha$$

$$u \sin \beta t = R \sin \alpha$$

$$t = \frac{R \sin \alpha}{u \sin \beta}$$

$$u_x = \frac{R \cos \alpha}{t} - v$$

$$u_y = \frac{R \sin \alpha}{t}$$

$$\frac{R^2}{t^2} + v^2 - \frac{2Rv \cos \alpha}{t} = u^2$$

$$(u^2 - v^2)t^2 + 2Rv \cos \alpha t - R^2 = 0 \quad \alpha = 90$$

$$2R \sqrt{v^2 \cos^2 \alpha - v^2 + u^2} = \sqrt{u^2 - v^2} \sin \alpha$$

$$2 \cdot \frac{60}{0,2} + \frac{60}{1,8} = 333 \cdot \frac{u^2 - v^2}{0,6 \cdot 120}$$

$$\frac{7L}{0,36} = 200 \quad 0,36$$

$$L = 120 \quad \sin^2 \alpha = \frac{3}{4}$$

$$120 \sqrt{1 - 0,48}$$

$$0,36$$

$$\frac{24\sqrt{13}}{0,36} = \frac{200\sqrt{13}}{3}$$

$$u \cos \beta - v = u \sin \beta \cos \alpha$$

$$u^2 \sin^2 \beta t^2 + u^2 \cos^2 \beta t^2 + v^2 t^2 - 2uv \cos \beta t = R^2$$

$$(u^2 + v^2)t^2 - 2uv \cos \beta t = R^2$$

$$u(u \cos \beta - v) = \frac{R \cos \alpha}{t} \quad u_x = v - \frac{R \cos \alpha}{t}$$

$$u_y = \frac{R \sin \alpha}{t}$$

$$v^2 + \frac{R^2}{t^2} - 2 \frac{Rv \cos \alpha}{t} = u^2$$

$$(u^2 + v^2)t^2 + R^2 - 2Rv \cos \alpha t - R^2 = 0$$

$$(v^2 - u^2)t^2 - 2Rv \cos \alpha t - R^2 = 0$$

$$(v^2 - u^2)t^2 - 2Rv \cos \alpha t - R^2 = 0$$

$$\sqrt{4R^2 v^2 \cos^2 \alpha + 4R^2 v^2 - 4R^2 u^2} = \frac{2R \sqrt{v^2 (1 + \cos^2 \alpha) - u^2}}{u^2 - v^2}$$

$$\frac{T^2 g}{2} - v_0 \sin \alpha t = h$$

$$14 \cdot 2,8 - 36,4 \sin \alpha = 14$$

$$25,2 = 36,4 \sin \alpha$$

$$1,8 \cdot 14 = 2,8 \cdot 13 \sin \alpha$$

$$\frac{18 \cdot 14}{28 \cdot 13} = \sin \alpha$$

$$\frac{18 \cdot 14}{28 \cdot 13} = \frac{9}{13} = \sin \alpha$$

$$\cos \alpha =$$

$$\frac{9^2}{20} \approx 4,05 \text{ м}$$

$$169 - 81 = \frac{87}{16}$$

$$\frac{\sqrt{87}}{13} \cdot 13 \cdot 2,8 \approx 23,52 \text{ м}$$

