



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $t_5 \geq x_5 + y_5 + z_5 \geq 2x_5 + z_5 \geq 28$

Т.е. $\begin{cases} t_2 \geq 18 \\ t_3 \geq 30 \\ t_5 \geq 28 \end{cases} \Rightarrow \text{обл. } 2 \begin{matrix} 18 \\ 30 \\ 28 \end{matrix} 5 \Rightarrow \text{обл. } 2 \begin{matrix} 18 \\ 30 \\ 28 \end{matrix} 5$

А равно там же обл. быть может при:

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{11}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{17}$$

Тогда $ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{11} : 2^3 \cdot 5^{11}$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{21} \cdot 5^{17} : 2^4 \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} : 2^{13} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\text{и } abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

От вет: $2 \begin{matrix} 18 \\ 30 \\ 28 \end{matrix} 5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Даны два им числа a, b , с их простые множители
] простое число p входит в a, b , с в степени x_p, y_p
 соответственно.] простое p входит в ab в степени $t_p = x_p + y_p$
 Тогда $ab = 2^6 3^{13} 5^{11} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 + y_2 \geq 6 \\ x_3 + y_3 \geq 13 \\ x_5 + y_5 \geq 11 \end{cases}$$

$$b \leq 2^{14} 3^{21} 5^{13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_2 + z_2 \geq 14 \\ y_3 + z_3 \geq 21 \\ y_5 + z_5 \geq 13 \end{cases}$$

$$a \leq 2^{16} 3^{25} 5^{28} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_2 + x_2 \geq 16 \\ z_3 + x_3 \geq 25 \\ z_5 + x_5 \geq 28 \end{cases}$$

Число:

$$\begin{cases} x_2 + y_2 \geq 6 \\ y_2 + z_2 \geq 14 \\ z_2 + x_2 \geq 16 \\ x_3 + y_3 \geq 13 \\ y_3 + z_3 \geq 21 \\ z_3 + x_3 \geq 25 \\ x_5 + y_5 \geq 11 \\ y_5 + z_5 \geq 13 \\ z_5 + x_5 \geq 28 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2(x_2 + y_2 + z_2) \geq 36 \\ 2(x_3 + y_3 + z_3) \geq 59 \\ 2(x_5 + y_5 + z_5) \geq 52 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t_2 \geq 36 \\ 2t_3 \geq 59 \\ 2t_5 \geq 52 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_2 \geq 18 \\ t_3 \geq 29,5 \\ t_5 \geq 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_2 \geq 18 \\ t_3 \geq 30 \\ t_5 \geq 26 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3 ~~Пусть~~ Пусть $\sin x = t$, тогда $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = t$

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 \arccos(t) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \begin{cases} 10 \left| \frac{\pi}{2} - x - 2\pi k \right| = 9\pi - 2x \\ \left| \frac{\pi}{2} - x - 2\pi k \right| \leq \pi \end{cases}$$

Отсюда видно, если x - решение, то

$$10\pi \geq 9\pi - 2x \geq 0 \quad (\pi - 4\pi \geq \frac{\pi}{2} - x - 2\pi k \geq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10\pi \geq 9\pi - 2x \\ 9\pi \geq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9\pi}{2} \geq x \\ x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2} \right]$$

А еще по mod 2π :

$$\begin{cases} 10 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \equiv 9\pi - 2x \\ 10 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \equiv 9\pi - 2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5\pi - 10x \equiv 9\pi - 2x \\ 10x - 5\pi \equiv 9\pi - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10x \equiv -2x \\ 10x \equiv -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x \equiv 0 \\ 12x \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} : 8x = 2\pi k \\ \exists k \in \mathbb{Z} : 12x = 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi k}{4} & (1) \\ \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi k}{6} & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим случай (1):

$$\text{Тогда } x = \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z} \text{ и } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2} \right] \Leftrightarrow \frac{\pi k}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k \in [2; 18]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

При этом исходные уравнения имеют вид.

$$\begin{cases} \exists e \in \mathbb{Z}: d \mid 10 \mid \left| \frac{\pi}{2} - \frac{\pi k}{4} - 2\pi e \right| = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi k}{2} (=) \\ \left| \frac{\pi}{2} - \frac{\pi k}{4} - 2\pi e \right| \leq \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists e \in \mathbb{Z}. \begin{cases} \left| 10 - 5k - 40e \right| = 18 - k \text{ ~~не выполняется~~ } \\ \left| 2 - k - 8e \right| \leq 4 \end{cases}$$

~~Поскольку~~ $10 : 5, -5k : 5, -40e : 5, \text{ а } 18 : 5$

~~значит~~ остался модуль 2: а значит, $18 - k : 5$,

а ещё $k \in [2; 18)$, т.е. $k \in \{3, 8, 13, 18\}$

Если $k=3$, то второе пер-во однократно даёт $e=0$. Тогда $110 - 5k - 40e = 105 \neq 15$ не годит.

Если $k=8$, то второе пер-во даёт $e=-1$,

$$\text{и тогда } \left| 2 - k - 8e \right| = 2, \text{ а } \left| 10 - 5k - 40e \right| = 10 = 18 - 8 = 10 - k$$

годит, т.е. $x = \frac{8\pi}{4} = 2\pi$

Если $k=13$, то второе пер-во даёт $e=-1$,

$$\text{и тогда } \left| 2 - k - 8e \right| = \left| 2 - 13 + 8 \right| = \left| 2 - 5 \right| = 3,$$

а $\left| 10 - 5k - 40e \right| = 15 \neq 18 - 13$ не годит.

Если $k=18$, то $18 - k = 0$, значит, $\left| 2 - k - 8e \right| = 0$, т.е. $18 + 8e = 0$,

(лучше (2))
т.е. $e = -2$ и он годит: $x = \frac{9\pi}{2}$.

(лучше (2))

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{тогда } x = \frac{\sqrt{k}}{6}, k \in \mathbb{N} \quad x \in \left[\frac{5}{2}, \frac{9\sqrt{2}}{2} \right] \Leftrightarrow \frac{\sqrt{k}}{6} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{9\sqrt{2}}{2} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k \in [3; 27]$$

При этом члх ур-е имеет вид:

$$\exists \theta \in \mathbb{N} \begin{cases} \left| 15 \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{k}}{6} - 2\theta\pi \right| = 2\pi - \frac{\pi k}{3} \quad (=) \\ \left| \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{k}}{6} - 2\theta\pi \right| \leq \pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{N} \begin{cases} |15 - 5k - 60\theta| = 27 - k \\ |3 - k - 12\theta| \leq 6 \end{cases}$$

15; 5, -5k; 5, 60\theta; 5, значит, 27 - k; 5, а

еще $k \in [3; 27]$, т.е. $k \in \{7; 12; 17; 22; 27\}$.

Рассмотрим первую строку по mod 60:

$$|15 - 5k - 60\theta| \equiv 27 - k \pmod{60} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 - 5k \equiv 27 - k \\ 5k - 15 \equiv 27 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k \equiv -12 \\ 6k \equiv 42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4k + 12 \equiv 0 \\ 6k - 42 \equiv 0 \end{cases} \pmod{60} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 3 \equiv 15 \\ k - 7 \equiv 10 \end{cases} \pmod{60} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 3 \equiv 15 \\ k + 3 \equiv 10 \end{cases} \pmod{60}, \text{ значит, } k = 22 \text{ не подходит.}$$

Отсюда $k \in \{7; 12; 17; 27\}$.

$k = 27$, т.е. $x = \frac{27\sqrt{2}}{6} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ подходит, как мы видели ранее.

$k = 12$, т.е. $x = \frac{12\sqrt{2}}{6} = 2\sqrt{2}$ подходит, как мы видели ранее.

Итого

$k \in \{7; 17\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если $k=7$, то $27-k=20$, значит, $|3-7-ke|=4$, т.е. $e=0$
и также k и e не могут. т.е. $x = \frac{7\sqrt{5}}{6}$

Если $k=17$, то $27-k=10$, значит, $|3-17-12e|=2$, т.е.
 $|14+12e|=2$, т.е. $e=-1$ и также k и e не
подходят, т.е. $x = \frac{17\sqrt{5}}{6}$

Ответ: $\left\{ \frac{9\sqrt{5}}{2}; 2\sqrt{5}; \frac{7\sqrt{5}}{6}; \frac{17\sqrt{5}}{6} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Из первых, эти к хорды, т.е. если $k > 0$, то
моя хорда чет прямая $(B_1 C_1)$, повернется
относ A в ~~полож.~~ ^{отриц.} напр (т.е. $k < \frac{7\sqrt{2}}{8}$) относительно точки A ,
т.е. пересеки. обр. оир-ти. Если $k < 0$, то
моя хорда чет прямая $(B_2 C_2)$, повернется
в ~~полож.~~ ^{отриц.} напр, т.е. $(k < -\frac{7\sqrt{2}}{8})$, относительно точки A ,
и поскольку $B_1 C_1$ симметрична $B_2 C_2$, то теперь
прямая еще ближе к Z_1 и к Z_2 , т.е. пересеки,
но не все. Значит оир-ти.

Если же $|k| \geq \frac{7\sqrt{2}}{8}$, то такая прямая
очевидно не подходит, т.е. если ее точка
первая слева x правее A (более хорды), то
она прям не перпендикулярна ^(левее) хорду
окружность (а именно ^{вправо}) (т.е.
это верно для точки A , ^(при $q_2 = 21^2 = 57$) тем более q_1).

до q_2 будет > 5).

$$\text{Значит, } k \in \left(-\frac{7\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{5}{6}; \frac{7\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{5}{6} \right)$$

$$\text{Отв: } \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



B_x - проекция точки B на ось x (пусть её координата x)

Тогда $|B_2 B_x|^2 = |B_1 B_x|^2 + |B_x A_x|^2$ т.е.

$$25 - |B_1 B_x|^2 = x \cdot \left(\frac{45}{7} - x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25 - x^2 = \frac{45}{7}x - \frac{45}{7}x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25 = \frac{45}{7}x \Leftrightarrow 5 = \frac{9}{7}x \Leftrightarrow x = \frac{35}{9}$$

А значит, вторая координата точки B_2 : $\sqrt{25 - \left(\frac{35}{9}\right)^2} =$

$$= \frac{\sqrt{(9 \cdot 9)^2 - 35^2}}{9} = \frac{\sqrt{45^2 - 35^2}}{9} = \frac{20\sqrt{2}}{9}$$

Значит, угловой коэф. отрезку кас: $\frac{20\sqrt{2}}{9} : \left(\frac{45}{7} - \frac{35}{9}\right) =$

$$= \frac{\frac{4\sqrt{2}}{9}}{\frac{7}{9} - \frac{35}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{9} : \frac{-28}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{-28} = \frac{2\sqrt{2}}{-7} = \frac{14\sqrt{2}}{-49} = \frac{7\sqrt{2}}{-8}$$

т.е. утверждает, что угловой коэф. $k \in \left(-\frac{7\sqrt{2}}{8}, \frac{7\sqrt{2}}{8}\right)$

~~Handwritten calculations and diagrams, including a coordinate system with points A, B, B1, B2, Ax, Bx, and various algebraic steps.~~

~~Diagram showing a coordinate system with points A, B, B1, B2, Ax, Bx. A line segment AB is shown, and its projections onto the axes are indicated. The point Bx is on the x-axis, and B2 is on the vertical line through Bx. A right-angled triangle is formed by Bx, B2, and B.~~

~~Algebraic steps: $\left(\frac{18}{7}\right)^2 = \frac{49+12}{32}$, $\left(\frac{18}{7}\right)^2 - 4 = \dots$, $\frac{49}{32} \cdot \frac{18^2}{7^2} = 4 \frac{49+32}{32}$, $\left(\frac{18}{7}\right)^2 = \frac{49}{32}$, $\frac{49}{32} - 4 = \dots$, $\frac{49}{32} + 6.5 = \frac{7\sqrt{2}}{8}$, $\frac{49}{32} - \left(\frac{49}{32}\right)^2 = \dots$, $49^2 = 5 \cdot \frac{49}{32}$, $5 \cdot \frac{49}{32} = \frac{245}{32}$, $245 - 245 = 0$, $5 \cdot \frac{49}{32} = \frac{245}{32}$, $5 - 23 = 32$, $5 - 20 = 12$, $\frac{6}{7} < k < \frac{6}{7}$, $\frac{6}{7} < k < \frac{6}{7}$, $49 \cdot 9 = (49+32)$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

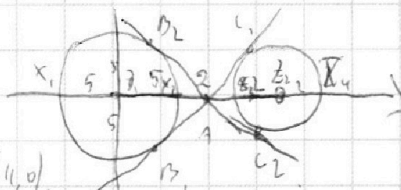
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Поменив x и y в системе координат мы получим эллипс. Эллипсу мы находим все k , такие, что прямая с угл. коэф k , будет пересекать эллипс. Окр-ти с центром в $(0,0)$ радиус 5 и с центром в $(9,0)$ радиус 4 , т.е. все такие k , что прямая с угл. коэф k будет их пересекать. Тогда $k_1 = \frac{2}{5}$, а $k_2 = -\frac{2}{5}$.

~~$X_1(0; -5), X_2(0; 5), X_3(0; 0)$~~



$X_1(-5; 0), X_2(5; 0), X_3(7; 0), X_4(11; 0)$

$Z_1(0; 0), Z_2(9; 0)$ - центры окр-тей

A - точка пересечения внут. обш. кас. (т.е. (B_1, C_1) - в. кас. к L_1 и (B_2, C_2) - в. кас. к L_2)

B_2, C_2 слева от A , B_1, C_1 справа от A (фиг. 1)

Мы знаем, что поворот центра A переводит окр-ту

в окр-ту, значит, ее радиус $\pm \frac{2}{5}$, т.е. $-\frac{2}{5}$ в макс. k

А значит, $\frac{|Z_1 A|}{|A Z_2|} = \frac{5}{2}$, т.е. $A(\frac{9-5}{2+5}, 0)$, т.е. $A(\frac{4}{7}, 0)$

Тогда $|Z_1 A| = 5, |Z_2 A| = \frac{4}{3}$, а значит, $|B_2 A| = \sqrt{\frac{45}{49} - 25} =$

$$= \frac{\sqrt{45^2 - 35^2}}{7} = \frac{\sqrt{(45-35)(45+35)}}{7} = \frac{\sqrt{10 \cdot 80}}{7} = \frac{20\sqrt{2}}{7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. Рассмотрим три взаимно пересекающихся
любых круга $\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ (y-9)^2 + x^2 - 4 = 0 \end{cases}$, т.е.

в декартовой системе координат точка
(x, y) лежит на окружности с центром

в (0, 0) и радиусом 5 или с центром в (0, 9)

и радиусом 2. Эти окружности не пересекаются

первое уравнение задает прямую т.е.

нам интересно, при каких a прямая

пересекает или касается две данные окружности.

a = 0 нам подходит, т.е. ^{прямая} уравнение имеет вид x = 0,

а для любого x точки (0, -5), (0, 5), (0, 4), (0, 11)

подходят. А если a ≠ 0, то уравнение прямой

$y = \frac{b}{a} = \frac{5}{6}x$, т.е. нам нужно найти все

a такие, что две данные окружности пересекаются

каждое ^{дано} уравнение имеет угл. коэф. $-\frac{5}{6}$, т.е. найдём все

угловые коэффициенты k_1 ($k_1 = 0$)

где видно не подходит, т.е. если коэф. угла меньше
указанного пер-ого, а все a будут получены как $-\frac{5}{6}k_1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. Уравнение кубического

$$\begin{cases} \left(\frac{P_n(x)}{P_n(1)}\right)^4 - 6 \frac{P_n(1)}{P_n(x)} = \frac{P_n(1/2)}{P_n(x^3)} - 5 & \text{[} P_n(x) = 9, P_n(1/2) = 6, P_n(1) = 6 \\ \left(\frac{P_n(0,5y)}{P_n(1)}\right)^4 + \frac{P_n(1)}{P_n(0,5y)} = \frac{P_n(1)}{P_n(0,5y)^3} \end{cases} \quad (=)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{c}\right)^4 - \frac{6c}{a} = \frac{-2c}{3a} - 5 \\ \left(\frac{b}{c}\right)^4 + \frac{c}{b} = \frac{-13c}{3b} - 5 \end{cases} \quad (=)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{c}\right)^4 = \frac{16c}{3a} - 5 & \text{[} \frac{a}{c} = z, \text{ [} \frac{b}{c} = k \\ \left(\frac{b}{c}\right)^4 = \frac{-16c}{3a} - 5 \end{cases} \quad (=)$$

Второе уравнение
вспомогательное
(=)
"заменяем переменные"
и в итоге
получаем систему

$$\begin{cases} z^5 + 9z = \frac{16}{3} \\ k^5 + 5k = -\frac{16}{3} \end{cases} \quad (1)$$

склад.

$$(1) \Rightarrow z^5 + k^5 + 9z + 5k = 0 \quad (=) (k+z)(k^4 - k^3z + k^2z^2 - kz^3 + z^4) + 4kz + 5z = 0$$

$$\begin{cases} k+z=0 \\ k^3(k-z) + k^2z^2 - z^3(k-z) + 5z = 0 \end{cases} \quad (=)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} k+z=0 \\ (k-z)(k-z)(k^2-kz+z^2)+k^2z^2+5=0 \end{cases} \xrightarrow{kz=0} \begin{cases} k+z=0 \\ (k-z)^2(k^2-kz+z^2) < 0 \end{cases}$$

k+z, т.е. тогда z = -k, тогда (k-z)^2(k^2-kz+z^2) < 0, т.е. k^2 - k(-k) + (-k)^2 = 3k^2 < 0, что невозможно.

$$\Rightarrow \begin{cases} k+z=0 \\ k^2-kz+z^2 < 0 \end{cases} \xrightarrow{z^2 > 0, z \neq 0} \begin{cases} k+z=0 \\ (\frac{k}{z})^2 - \frac{k}{z} + 1 < 0 \end{cases} \xrightarrow{t = \frac{k}{z}} \begin{cases} k+z=0 \\ t^2 - t + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k+z=0 \\ \exists t \in \mathbb{R}: t^2 - t + 1 < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{дискр. отрицат.}} \begin{cases} k+z=0 \\ 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k+z=0 \\ -3 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k+z=0$$

Чтобы мы помнили, что для всех решений (1) верно $k+z=0$ и хотя бы одно реш. есть (или ур-е имеет ст. всегда имеет все корня) значит, $k+z$ должен быть 0 и только 0, т.е.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 0, \text{ т.е. } a+b=0, \text{ т.е. } \ln(x) + \ln(y) = 0, \text{ т.е. } xy=1$$

$$xy=2$$

Ответ: 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда один из $\sqrt{12k}$ даёт значение

- $[12k+1; 12k+96]$
- $[12k+1; 12k+97]$
- $[12k+2; 12k+98]$
- $[12k+3; 12k+99]$
- $[12k+4; 12k+100]$
- $[12k+5; 12k+107]$

и ещё все в блоке $[-7; 95]$.

Блоки от $k=0$ до 14.

Потом получаем величины для модуля

z первые $z+1$ отрезки блока даёт значения с

$2k$, а ост - значения с $2k+1$, и значения с

первые z на $2k+5$, а ост - значения с $2k+6$,

иначе нет, который на единицу больше,

Можно начать отрезки, которые

устроены так, что между ними нет

помех. Это $-7, 0, 1, \dots, 5, 12, 13, \dots, 17, 24, 29, \dots$

$, 34, 35, 36, 37, 38, 39, \dots$, а все остальные

не будут иметь для $96 - \text{это } 95$ кот. вын.

но, а $12x+a$ оставших чисел $12x+a$ будут

$12x+a-1$ комбо для $12(x-8)+a-1$, если $a \neq 0$,

и если $a=0$, то $12x-1$ и для для $12x$ строим для

$x-9$ и значения $(97-x)$ (у нас есть больше).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично, мы можем рассмотреть и случаи
существенные случаи, не имеющие следствия
в 1-том случае, это

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$[12k; 12k - 102]$~~

~~$[12k - 102; 12k]$~~

~~$[12k + 1; 12k - 95]$~~

$[12k - 95; 12k + 1]$

~~$[12k + 2; 12k - 94]$~~

$[12k + 94; 12k + 2]$

~~$[12k + 3; 12k - 93]$~~

$[12k - 93; 12k + 3]$

~~$[12k + 5; 12k]$~~

$[12k - 92; 12k + 4]$

$[12k - 91; 12k + 5]$

$[12k - 90; 12k + 12]$

Принимать k принимает значение от 0 до 14. ценя отрезки $(12k - 102; 12k)$ может и принимать 0.

Т.е. наши значения получаются какими-то

отрезками, возможно, одно значение несколько раз.

Поэтому все приемлемые значения

на их сумму по модулю 6.

При фиксированном k вычислим Φ характеристизм

значение v в величине $\frac{v-1}{6}$

Добавим по всем значениям

получим Φ ответ будет

количество пар значений k равно с $10k$
 $\frac{12k+11}{6} - \frac{12k+8}{6} = 99+10$

48.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Выполним преобразование по формуле:~~

~~$(x, y) \rightarrow (x + \frac{y}{b}, y)$ $b \cdot x - y$ $y - b \cdot x$~~

~~Все точки угла лежат в области
или нет вид $b \cdot x$~~

Для каждой точки, (координат или (x, y))
знаем ^{величину} $y - b \cdot x$.

Для $y = b \cdot k$ в пар-гр. имеют

точки с коорд x от $-k$ до $17-k$

(т.е. это верно для $y=0$, и $(-15; 90) || (-1; 6)$)

Для $y = b \cdot k + a$ в пар-гр. имеют точки ^{порядку}

с коорд x от $-k$ до $16-k$ (т.е.

в строке с коорд y не меньше имеют эти точки,

а в строке пар-гр. пере: $(-1; 6)$,

значит, величина ^{порядку} от $b \cdot k + a + b \cdot k$ до $b \cdot k + a + b \cdot k - 16$,

т.е. по всем строкам (взять коорд y
^{покажем более строкам более}

от $b \cdot k + a$ до $b \cdot k + 5$ величина

будет