



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 Пусть чтобы значение произведения  $abc$  было наименьшим, числа  $a, b, c$  не должны сод. никаким другим простым множителям кроме 2, 3 и 5.  
Пусть  $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$ ,  $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$ ,  $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$

Произведение  $(abc)^2$  сод.  $2^{7+13+14} = 2^{34}$ ,  $(abc)^2 \geq 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$   
но сод.  $ab: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$ ,  $bc: 2^{13} \cdot 3^{13} \cdot 5^{18}$ ,  $ac: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$   
 $(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ac \geq 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$   
пр-е  $abc$  сод.  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$   
(или  $(abc)^2 < 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$ )  
 ~~$(abc)^2 \geq 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$~~   
 $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

приведем пример, когда достигнута граница:

1)  $\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 7 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 13 \\ \alpha_1 + \gamma_1 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 4 \\ \beta_1 = 3 \\ \gamma_1 = 10 \end{cases}$   $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 17$ , пример:  $abc$  может сод. в себе  $2^{17}$

2)  $\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = 12 \\ \beta_2 + \gamma_2 = 15 \\ \alpha_2 + \gamma_2 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 7 \\ \beta_2 = 5 \\ \gamma_2 = 10 \end{cases}$   $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 22$ , пример:  $abc$  может сод. в себе  $3^{22}$

3)  $\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 = 15 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 18 \\ \alpha_3 + \gamma_3 = 43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 14 \\ \beta_3 = 1 \\ \gamma_3 = 17 \end{cases}$   $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 32$

$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 38$   
 $\alpha_3 + \gamma_3 = 43 > 38 \Rightarrow$   $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \neq 0$  и несл. рав-во не может достигаться  
Тогда  $\alpha_3 + \beta_3 \geq 43$ , пусть  $\alpha_3 + \beta_3 = 22$   $\begin{cases} \alpha_3 = 22 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 21 \\ \alpha_3 + \gamma_3 = 43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 22 \\ \beta_3 = 21 \\ \gamma_3 = 0 \end{cases}$

оценка, что  $abc$  сод.  $5^{38}$  не достигается и  
 $abc$  сод.  $5^{43}$  (при  $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{22}$ ,  $b = 2^3 \cdot 3^5$ ,  
 $c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{22}$ )  
 $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$   
Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

т.к.  $\arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2}$ , то  $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5 \arcsin(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\pi - 5 \arcsin(\sin x) = x$$

помогите на число. уравнение  $0 \leq \arccos(\sin x) \leq \pi$

$$0 \leq 5 \arccos(\sin x) \leq 5\pi$$

$\Rightarrow$  лев. ч.  $\in [0; 5\pi]$ , значит и правая часть  $\in [0; 5\pi]$ :

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$$

1)  $-\frac{3\pi}{2} \leq x < -\frac{\pi}{2}$ :  $\arcsin(\sin x) = -x - \pi$

$$5 \arcsin(\sin x) = \pi - x$$

$$5(-x - \pi) = \pi - x$$

$$-5x - 5\pi = \pi - x$$

$$4x = -6\pi$$

$$x = -\frac{3\pi}{2}, \text{ yg. ych. } -\frac{3\pi}{2} \leq x < -\frac{\pi}{2}$$

2)  $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$ :  $\arcsin(\sin x) = x$

$$5x = \pi - x$$

$$6x = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \text{ yg. ych. } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$$

3)  $\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3\pi}{2}$ :  $\arcsin(\sin x) = -x + \pi$

$$5(-x + \pi) = \pi - x$$

$$-5x + 5\pi = \pi - x$$

$$4x = 4\pi$$

4)  $\frac{3\pi}{2} \leq x < \frac{5\pi}{2}$ :  $\arcsin(\sin x) = x - 2\pi$

$$5(x - 2\pi) = \pi - x$$

$$5x - 10\pi = \pi - x$$

$$6x = 11\pi$$

5)  $\frac{5\pi}{2} \leq x < \frac{7\pi}{2}$ :  $\arcsin(\sin x) = -x + 3\pi$

$$5(-x + 3\pi) = \pi - x$$

$$-5x + 15\pi = \pi - x$$

$$4x = 14\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{2}, \text{ yg. ych. } \frac{5\pi}{2} \leq x < \frac{7\pi}{2}$$

Ответ:  $-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

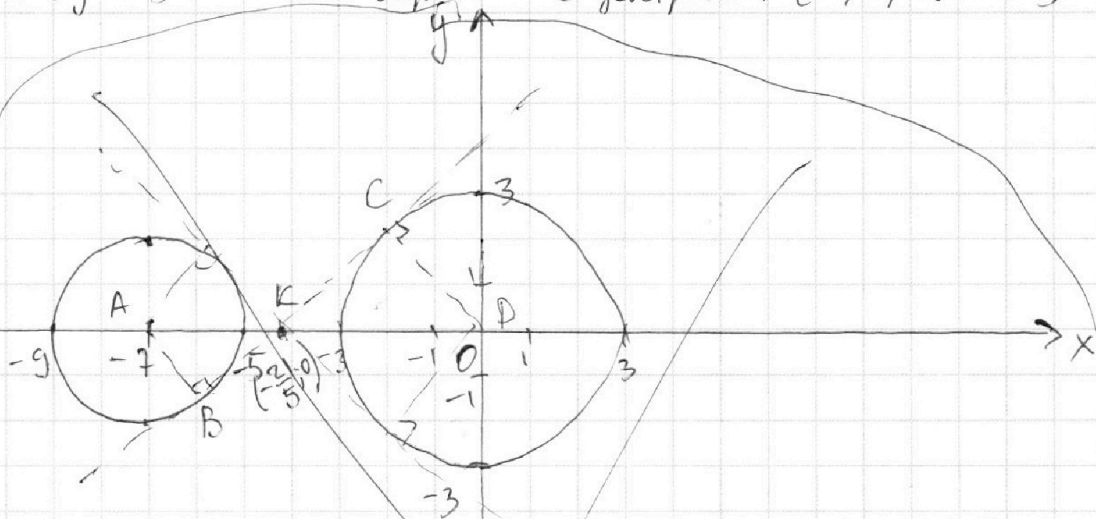
$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 & (1) \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 & (2) \end{cases}$$

Введем систему координат  $xOy$  и построим графики,  $4^o$  системы координат. Угол наклона  $-1$  и свобод. коэф.  $\frac{7b}{3a}$

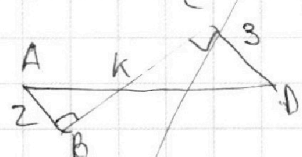
(1) при  $a=0$   $x=7b$   
 при  $a \neq 0$ :  $3ay = -x + 7b$  (\*)  
 $y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$  — прямая

(2):  $\begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+7)^2 - 49 + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$

$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 & \text{— окр-ть с центром } (-7; 0) \text{ и } R=2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 & \text{— окр-ть с центром } (0; 0) \text{ и } R=3 \end{cases}$



т.к. нам нужно значение  $a$ , при которых система имеет ровно 4 р-ня, то нужно посмотреть на значения угл. коэф. прямой (\*). Угл. коэф-ты, при которых две окр-ти имеют общ. касат. и угл. коэф-ты, по модулю превосходящие их, нам не подходят (т.к. при л-б. знач.  $b$  не будет ровно 4 р-ня). Касат. перп. радиусам. расам. 2 пог. отстоят прам.  $\Delta$ :



из подобия  $\frac{AK}{KB} = \frac{2}{3}$   $AK = 2d$   $KB = 3d$   
 $AK + KB = 5d = 7$   
 $d = \frac{7}{5} \Rightarrow k(-\frac{21}{5}; 0)$

пусть  $y = kx + t$  — касат., проход. чрез  $(-\frac{21}{5}; 0)$ , тогда:  
 $0 = -\frac{21}{5}k + t \Rightarrow t = \frac{21}{5}k$ ,  $y = (kx + \frac{21k}{5})$   
 $x^2 + (kx + \frac{21k}{5})^2 = 3$



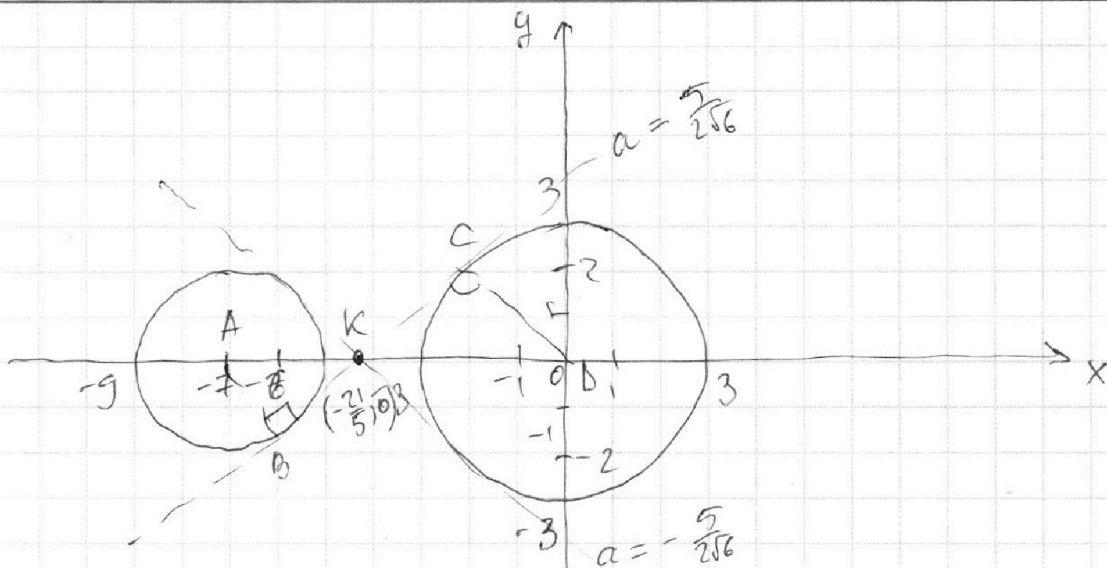
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

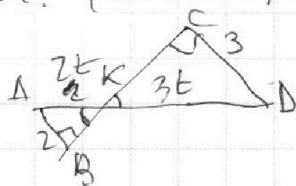
- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



посмотрим на знам. упр. котр. пр-ю ( $\alpha$ ), упр. котр. найдем такое  $\theta$ , что сист. будет иметь ровно 4 р-ш. (свод. котр. редуцируется за счет  $\theta$ )



найдем пр-ю, упр. котр. авт. одн. кас. к окр-ности  $\Delta HKB \sim \Delta DKC$

$AK : KD = 2 : 3$ ,  $AK = 2t$ ,  $KD = 3t$   
 $5t = 7$   $t = \frac{7}{5}$   $KD = \frac{21}{5}$   $K(-\frac{21}{5}; 0)$

кас-е прох. через  $(-\frac{21}{5}; 0)$ .  $y = kx + t$   
 $0 = -\frac{21}{5}k + t \Rightarrow t = \frac{21}{5}k$

$y = kx + \frac{21}{5}k$

$x^2 + (kx + \frac{21k}{5})^2 = 9$

$x^2 + k^2x^2 + \frac{42k^2}{5}x + \frac{21^2k^2}{5^2} - 9 = 0$

$(k^2+1)x^2 + \frac{42k^2}{5}x + \frac{21^2k^2}{5^2} - 9 = 0$  ав. - ур-е должно иметь един. р-ш.

$D = \frac{42^2k^4}{5^2} - 4(k^2+1)(\frac{21^2k^2}{5^2} - 9) = \frac{42^2k^4}{5^2} - 4(\frac{21^2k^4}{5^2} - 9k^2 - \frac{21^2k^2}{5^2} + 9) =$

$= \frac{42^2k^4}{5^2} - \frac{42^2k^4}{5^2} + 36k^2 + 36 - \frac{42^2k^2}{5^2} + 36 = 36k^2 + 36 - \frac{42^2k^2}{5^2} = 0$

$36k^2 + 36 - \frac{42^2k^2}{5^2} = 0$

$9 + 9k^2 - \frac{21^2k^2}{25} = 0$

$1 + k^2 - \frac{49k^2}{25} = 0$

$25 + 25k^2 - 49k^2 = 0$   
 $25 = 24k^2$

$k = \pm \frac{5}{\sqrt{24}} = \pm \frac{5}{2\sqrt{6}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

при  $|a| > \frac{5}{2\sqrt{6}}$  <sup>проделанные  $\sqrt{4}$</sup>  система будет иметь ровно 4 реш.  
(при мод. 6)

при  $a = 0$   $x = 7b$  (вертик. прямая)  $\Rightarrow < 4$  реш.

при  $-\frac{5}{2\sqrt{6}} < a < 0$  и  $0 < a < \frac{5}{2\sqrt{6}}$  найдется такое  $b$ , что система будет иметь ровно 4 реш.  
(по 2 точки перес. с касуной из окр-ген)

ответ:  $(-\frac{5}{2\sqrt{6}}; 0) \cup (0; \frac{5}{2\sqrt{6}})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5  $\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x} 343 - 4 \quad x > 0, x \neq \frac{1}{6}$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{7 \log_{36x} 6x} - 4$$

пусть  $\log_7(6x) = a, \quad 6x = 7^a$   
 $x = \frac{7^a}{6}$

тогда  $a^4 - \frac{2}{a} = \frac{3}{2a} - 4 \quad | \cdot 2a$

$$2a^5 - 4 = 3 - 8a$$

$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$

$\log_7^4 y + 6 \log_7 y = \log_7^5(7^7) - 4 \quad y > 0, y \neq 1$

$$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2 \log_7 y} - 4$$

$\log_7 y = b, \quad y = 7^b, \quad \text{тогда } xy = \frac{a+b}{6}$

$$b^4 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2b} - 4 \quad | \cdot 2b$$

$$2b^5 + 12 = 5 - 8b$$

$$2b^5 + 8b + 7 = 0$$

т.е. нужно найти все возможные значения  $a+b$  из

системы:

$$\begin{cases} 2a^5 + 8a - 7 = 0 \\ 2b^5 + 8b + 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(a^5 + b^5) + 8(a+b) = 0 \\ 2(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = 0 \end{cases}$$

т.к.  $(a^5 + b^5) : (a+b)$ , то рассмотрим случаи, когда  $a+b=0$ , тогда  $xy = \frac{1}{6}$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 4(a+b) = 0$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = -4 \end{cases}$$

Рассм.  $f(b) = 2b^5 + 8b + 7$

$f'(b) = 10b^4 + 8 > 0$  при  $\text{люб. } b \Rightarrow$

$f(b)$  монотонно  $\uparrow$  возр.,  $\text{уп-е } f(b) = 0$  имеет ровно 1

решение

Рассм.  $f(a) = 2a^5 + 8a - 7 \quad f'(a) = 10a^4 + 8 > 0$  при

люб.  $a \Rightarrow f(a)$  монотонно возрастает  $\Rightarrow$

уп-е  $f(a) = 0$  имеет един. решение тогда

для  $a+b$  есть един. возможное значение

и  $a+b=0, \quad xy = \frac{7^0}{6} = \frac{1}{6}$

Ответ:  $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

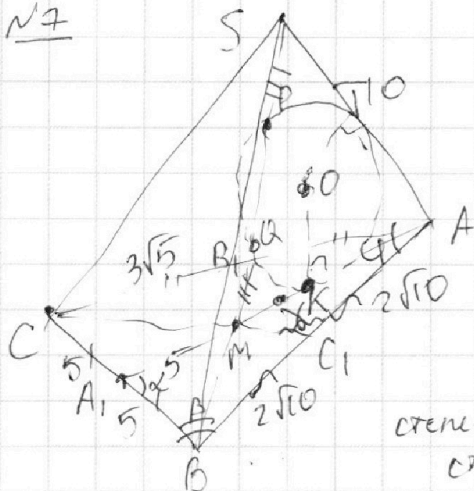
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N7



$$SP = MQ; SA = BC = 10$$

$$S_{ABC} = 60$$

1) Рассм. м-ть (SAM):

соединим центры этой м-ти  
сб. окр-ты, AM и SA - радиусы.

AT = AK (кас-е, пров. из 1 точки)

стеница (-) M отн. окр-ты:  $MK^2 = MQ \cdot MP$   
 стеница (-) S) отн. окр-ты:  $ST^2 = SP \cdot SQ$   
 + к.  $SP = MQ, SQ = MP$

$$ST = MK, SA = AM = 10$$

$$AM = \frac{2}{3} AA_1 \Rightarrow AA_1 = 15$$

(по сб. в. точки перес. медиан)  $\Delta$

2)  $S_{CA_1A} = S_{AA_1B} = \frac{60}{2} = 30$   
 $\angle AA_1B = \alpha$  т.к.  $AA_1$  - высота  $\Delta ABC$

$$30 = \frac{1}{2} \cdot AA_1 \cdot AB \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 5 \cdot \sin \alpha$$

$$2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

по т. кос.  $\Delta AA_1B$ :  $AB^2 = 15^2 + 5^2 - 2 \cdot 15 \cdot 5 \cdot \cos \alpha =$   
 $= 225 + 25 - 150 \cdot \frac{3}{5} = 250 - 90 = 160$

$$AB = 4\sqrt{10} \quad BC_1 = 2\sqrt{10} = AC_1$$

по  $S_{CC_1B} = \frac{1}{2} S_{ABC} = 30, \angle C_1BC_1 = \beta$

по  $S_{CC_1B} = 30 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2\sqrt{10} \cdot \sin \beta$

$$\sin \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

по т. кос  $\Delta C_1BC_1$ :  $CC_1^2 = 10^2 + 40 - 2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} =$   
 $= 140 - 40 = 100$

по т. кос  $\Delta ABC$ :  $AC^2 = 10^2 + 160 - 2 \cdot 10 \cdot 4\sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} =$

$$= 100 + 160 - 80 = 180$$

$$AC = 3\sqrt{20} = 3 \cdot 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$AB_1 = B_1C_1 = 3\sqrt{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin \varphi = 60 = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{10} \cdot \sin \varphi$$

$$5 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \sin \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

по т. кос  $\Delta AB_1B$ :  $BB_1^2 = 9 \cdot 5 + 160 - 2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

прод-е N7

$$BB_1^2 = 45 + 160 - 24 \cdot 5 = 45 + 160 - 120 = 40 + 45 = 85$$

$$BB_1 = \sqrt{85} \text{ м}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \sqrt{85} \cdot 15 \cdot 10 = 150\sqrt{85}$$

$$\text{ответ: } 150\sqrt{85}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + \left(kx + \frac{21k}{5}\right)^2 = 9$$

$$x^2 + k^2 x^2 + \frac{42k^2}{5} x + \frac{21^2 k^2}{25} = 9$$

$$(k^2 + 1)x^2 + \frac{42k^2}{5}x + \frac{21^2 k^2}{25} - 9 = 0$$

$$D = \frac{42^2 k^4}{25} - 4(k^2 + 1) \left(\frac{21^2 k^2}{25} - 9\right) =$$

$$= \frac{42^2 k^4}{25} - 4 \left(\frac{21^2 k^4}{25} - 9 - 9k^2 + \frac{21^2 k^2}{25}\right) =$$

$$= 36 + 36k^2 - \frac{42^2 k^2}{25} = 0$$

$$9 + 9k^2 - \frac{21^2 k^2}{25} = 0$$

$$1 + k^2 - \frac{7^2 k^2}{25} = 0$$

$$25 + 25k^2 - 49k^2 = 0$$

$$25 = 24k^2$$
$$k = \pm \frac{5}{\sqrt{24}}$$

~~42k~~  
~~3^2 \cdot 7^2~~



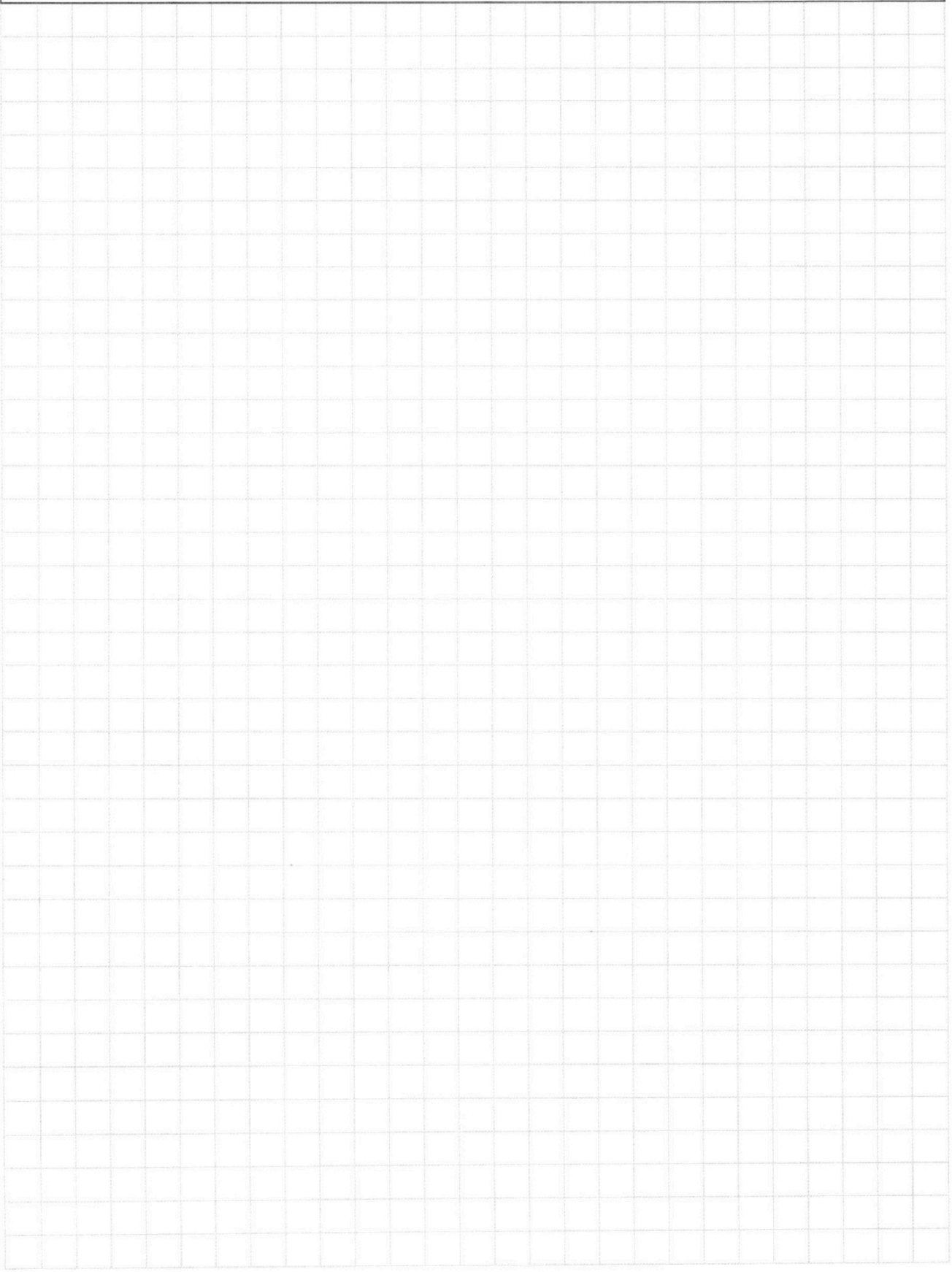
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7(6x) = a$$

$$\log_7 y = b$$

$$6x = 7^a$$

$$y = 7^b$$

$$6xy = 7^{a+b}$$

$$xy = \frac{7^{a+b}}{6}$$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{2}{a} = \frac{3}{2a} - 4 \\ 6^4 + \frac{6}{6} = \frac{5}{2} - 4 \end{cases} \quad | \cdot 2a$$

$$2a^5 - 4 = 3 - 8a$$

$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$

$$2b^5 + 12 = 5 - 8b$$

$$2b^5 + 8b + 7 = 0$$

$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$

$$2(a+b)^5 + 8(a+b) = 0$$

$$a+b = 0 \quad xy = \frac{1}{6}$$

$$\begin{array}{r} a^5 + b^5 \mid a+b \\ \hline a^4 \end{array}$$

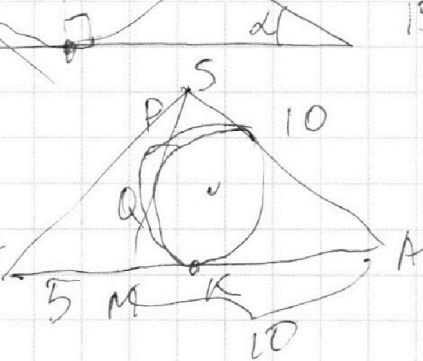
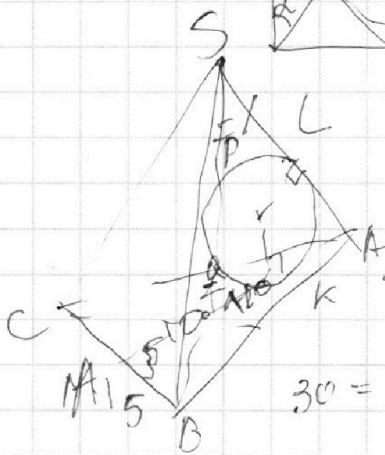
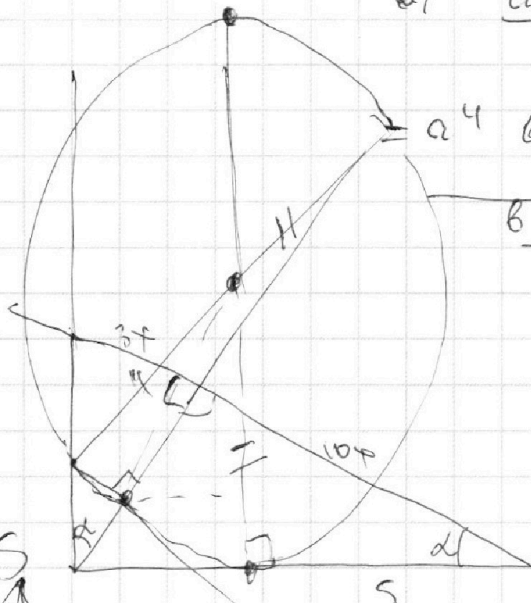
$$b_1 = a^4$$

$$q = \frac{b}{a^5}$$

$$b_1 = \frac{a^4 \left( \left( \frac{b}{a} \right)^5 - 1 \right)}{\frac{b}{a} - 1}$$

$$a^4 \frac{b^5 - a^5}{a^5} = \frac{b-a}{a}$$

$$10b^4 + 8 > 0$$



$$30 =$$



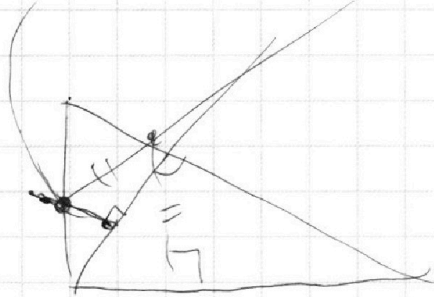


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



черновики

$$(x+7)^2 + (6-x)^2 = 4$$

$$x^2 + 14x + 49 + x^2 + 6^2 - 2 \cdot 6x - 4 = 0$$

$$2x^2 + x(14 - 2 \cdot 6) + 45 = 0$$

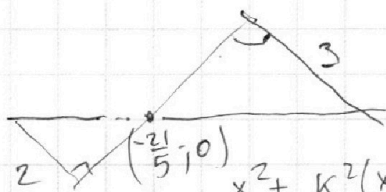
$$D = (2 \cdot 6 - 14)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (45 + 6^2) = 4 \cdot 6^2 - 56 \cdot 6 + 196 - 360 - 8 \cdot 6^2 =$$

$$= -4 \cdot 6^2 - 56 \cdot 6 + 196 = 0 \quad ( \cdot (-4) )$$

$$y = kx + t$$

$$4 \cdot 6^2 + 6^2 + 14 \cdot 6 - 49 = 0$$

$$\frac{86}{14} = \frac{76}{14}$$



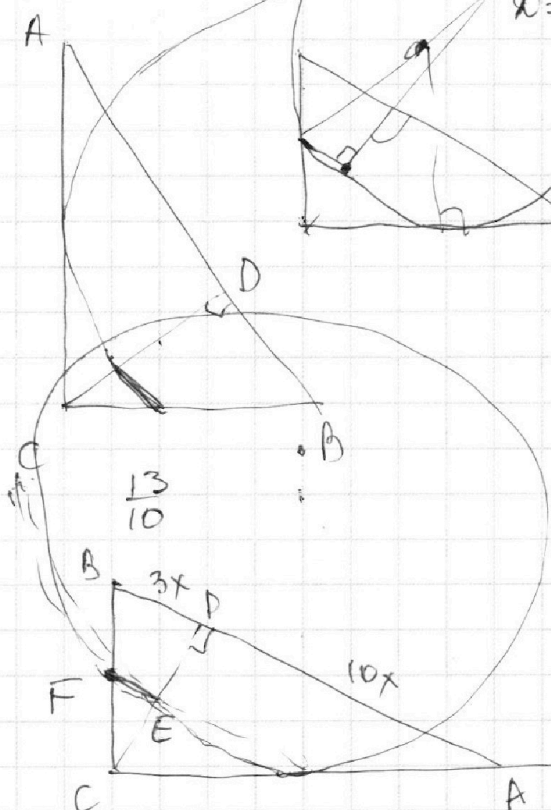
$$y = kx + t = kx + \frac{21}{5}k = k(x + \frac{21}{5})$$

$$0 = -\frac{21}{5}k + t \quad t = \frac{21k}{5}$$

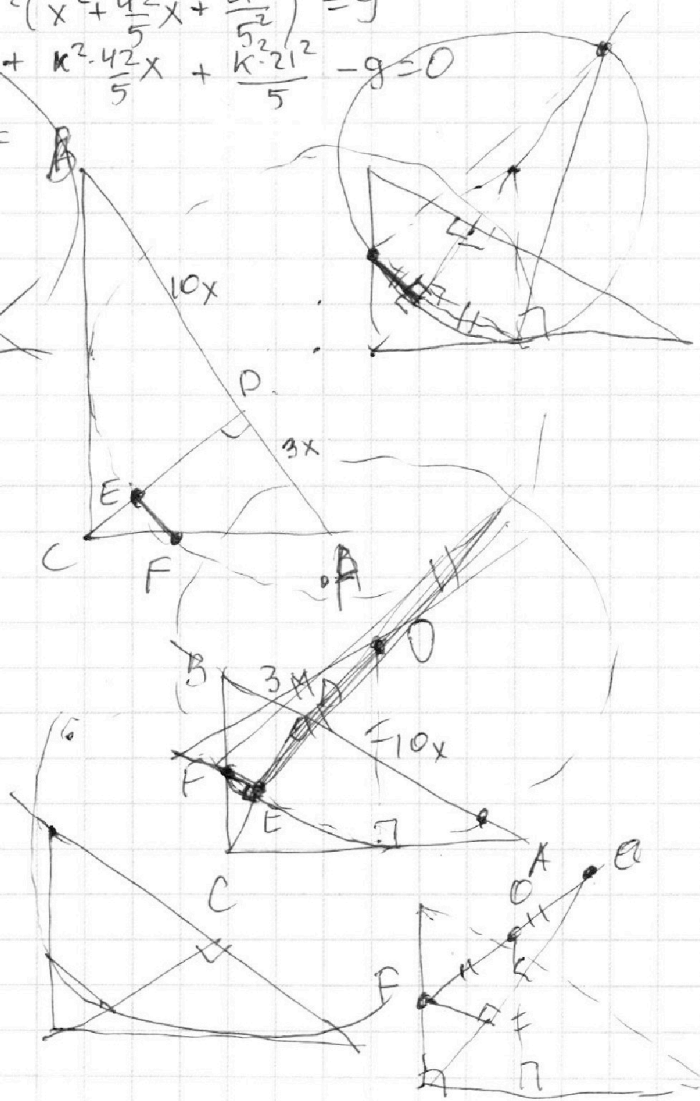
$$x^2 + k^2(x + \frac{21}{5})^2 = 9$$

$$x^2 + k^2(x^2 + \frac{42}{5}x + \frac{21^2}{5^2}) = 9$$

$$(k^2 + 1)x^2 + k^2 \cdot \frac{42}{5}x + \frac{k^2 \cdot 21^2}{5} - 9 = 0$$



$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} =$$



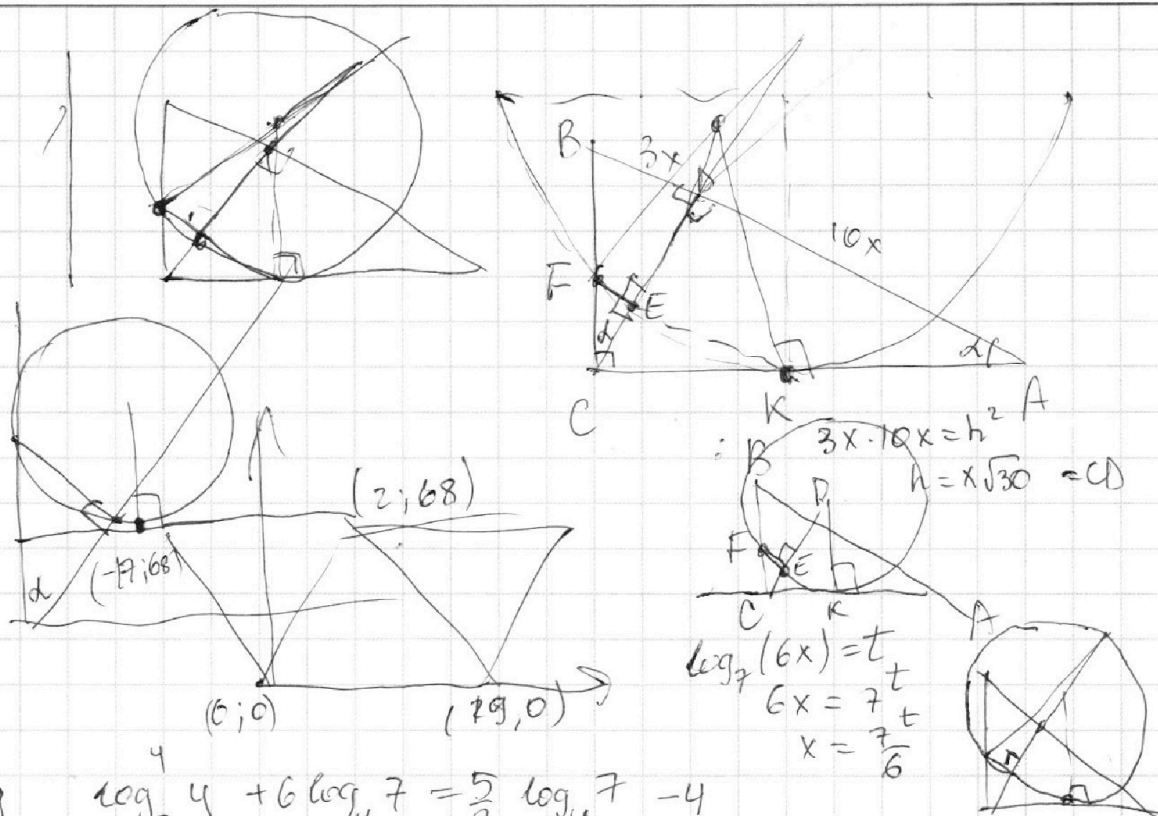
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 \log_7^4 y + 6 \log_7^4 7 &= \frac{5}{2} \log_7^4 7 - 4 \\
 \log_7^4 y + \frac{6}{\log_7^4 7} &= \frac{5}{2} - 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \log_7^5 y + 12 &= 5 - 8 \log_7^5 y & t^4 + \frac{6}{t} &= \frac{5}{2} - 4 \\
 10 \log_7^5 y & & 2t^5 + 12 &= 5 - 8t \\
 & & 2t^5 + 8t + 7 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\log_7^4 7} + 6 \log_7^4 7 &= \frac{5}{2} \log_7^4 7 - 4 \\
 \frac{1}{t^4} + 6t &= \frac{5t}{2} - 4 \quad | \cdot 2t^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4 + 8t^5 &= 5t^4 - 8t^4 \\
 2 + 8t^5 &= -3t^4 \\
 2 + 8t^5 &= -3 \cdot 2 & 2 + 32 \cdot 8 &= -3 \cdot 2 \\
 & & 2 + 256 &= -6
 \end{aligned}$$

$$y_2 - y_1 = -4x_2 + 4x_1 - 40$$

$$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$$

$$0 \leq \Delta x \leq 19 \quad | \Delta y | \leq 68$$

$$\begin{array}{r}
 24 \\
 + 5 \\
 \hline
 29
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \Delta y = 40 - 4 \Delta x \\
 85 \overline{) 5}
 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
  2  
  3  
  4  
  5  
  6  
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



① переводим

$$\begin{matrix}
 a = 2 \cdot d_1 \cdot 3 \cdot 5 & b = 2 \cdot \beta_1 \cdot 3 \cdot 5 & c = 2 \cdot \gamma_1 \cdot 3 \cdot 5 \\
 ab = 2^{d_1+\beta_1} \cdot 3^{d_2+\beta_2} \cdot 5^{d_3+\beta_3} & & \\
 bc = 2^{\beta_1+\gamma_1} \cdot 3^{\beta_2+\gamma_2} \cdot 5^{\beta_3+\gamma_3} & & \\
 ac = 2^{d_1+\gamma_1} \cdot 3^{d_2+\gamma_2} \cdot 5^{d_3+\gamma_3} & &
 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix}
 18 \\
 +14 \\
 \hline
 32 \\
 +11 \\
 \hline
 43 \\
 \hline
 75
 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix}
 17 \\
 +15 \\
 \hline
 32 \\
 +11 \\
 \hline
 43
 \end{matrix}$$

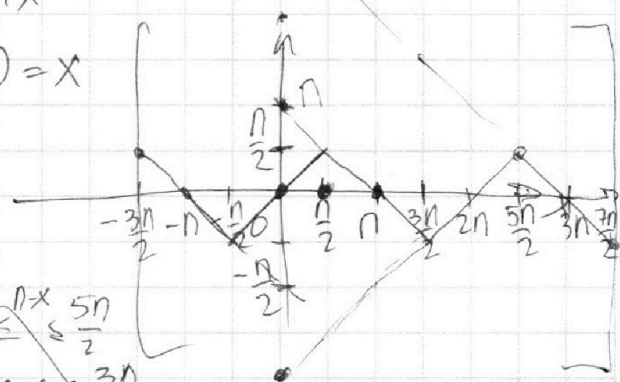
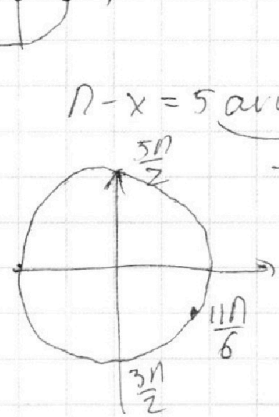
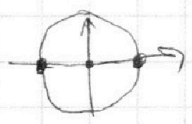
$$\begin{matrix}
 32 \\
 +43 \\
 \hline
 75
 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix}
 96 \\
 -6 \\
 \hline
 90 \\
 \hline
 16 \quad | \quad 38
 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix}
 d_1 + \beta_1 = 7 & 2d_1 = 8 & d_1 = 4 \\
 \beta_1 + \gamma_1 = 13 & d_1 - \beta_1 = 3 & \beta_1 = 3 \\
 d_1 + \gamma_1 = 14 & & \gamma_1 = 10
 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix}
 d_2 + \beta_2 = 11 & 2\beta_2 = 13 & \beta_2 = 6.5 \\
 \beta_2 + \gamma_2 = 15 & & \\
 d_2 + \gamma_2 = 17 & &
 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 5 \arccos(\sin x) &= \frac{3\pi}{2} + x & n, 2 \in [0; 5\pi] \\
 \arccos(\sin x) &= \frac{3\pi}{2} + x \\
 5 \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \right) &= \frac{3\pi}{2} + x \\
 \frac{5\pi}{2} - 5 \arcsin(\sin x) &= \frac{3\pi}{2} + x \\
 \pi - 5 \arcsin(\sin x) &= x
 \end{aligned}$$



$$\begin{matrix}
 48 \\
 -44 \\
 \hline
 4 \\
 +26 \\
 \hline
 30 \\
 +14 \\
 \hline
 44
 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{5\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\
 -\frac{5\pi}{2} + 3\pi = \frac{\pi}{2} \oplus \\
 2x = 7\pi \\
 d_3 \leq 14 \quad \beta_3 \leq 18 \\
 d_3 + \beta_3 \leq 32 \\
 2(d_3 + \beta_3 + \gamma_3) = 14 + 18 + 43 + 1 = 76 \\
 d_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 38
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*черновик*

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_7 6x = \log_7 343 - 4 \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\frac{\log_7^4(6x) - 2 \log_7 6x}{\log_7(6x)} = \frac{3 \log_7 7 - 4}{2 \log_7(6x)}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ 28 \overline{) 49} \\ \underline{63} \end{array}$$

$$\log_7(6x) = t \quad t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4 \quad | \cdot 2t$$

$$2x^2 + x(14 - 2b) + b^2 + 45 = 0$$

$$D = (14 - 2b)^2 - 4 \cdot 2(b^2 + 45) = 196 - 56b + 4b^2 - 8b^2 - 360 = 0$$

$$2t^5 - 4 = 3 - 8t$$

$$2t^5 + 8t - 7 = 0$$

$$x^2 + (14x + (b-x)^2) + 45 = 0$$

$$x^2 + 14x + b^2 + x^2 - 2bx + 45 = 0$$

$$2x^2 + 14x - 2bx + b^2 + 45 = 0$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2 \log_7(6x)} - 4$$

$$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4$$

$$2t^5 - 4 = 3 - 8t$$

$$2t^5 + 8t - 7 = 0$$

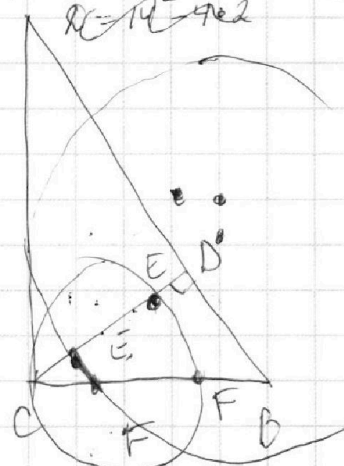
$$\begin{array}{r} 14 \overline{) 14} \\ 56 \overline{) 56} \\ 14 \overline{) 14} \\ \underline{196} \end{array}$$

$$\log_7^4 y + \frac{6 \log_7 y}{\log_7 y} = \frac{5}{2 \log_7 y} - 4$$

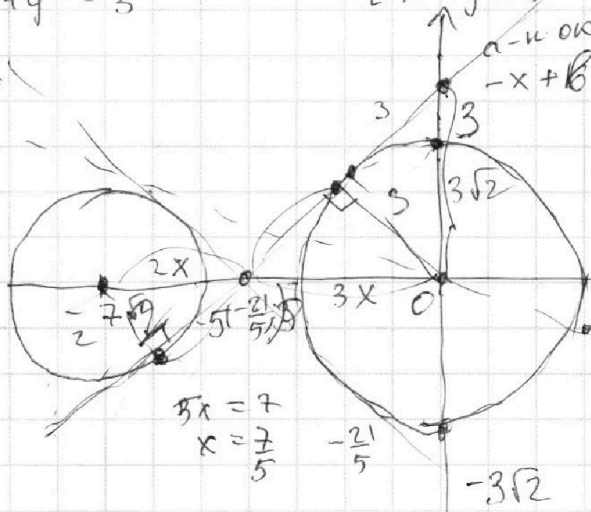
$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 4 \quad | \cdot 2t$$

$$2t^5 + 12 = 5 - 8t$$

$$2t^5 + 8t + 7 = 0$$



$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x+7)^2 + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} a=0: x=7b - \text{ок} \\ a \neq 0: y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a} - \text{нод} \end{cases}$$



$$a=1 \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{7b}{3}$$

$$a=2 \quad -\frac{1}{6}x + \frac{7b}{6}$$

$$x^2 + (b-x)^2 = 9$$

$$x^2 + b^2 + x^2 - 2bx = 9$$

$$2x^2 - 2bx + b^2 - 9 = 0$$

$$D = 4b^2 - 4 \cdot 2(b^2 - 9) = -4b^2 + 36 = 0$$

$$b^2 = 9$$

$$b = \pm 3\sqrt{2}$$

$$5x = 7$$

$$x = \frac{7}{5}$$

ок

$$4b^2 = 36$$