МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

Задача 1.

$\exists\ ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot k$

$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot q$

$ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot p$

$(abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53} \cdot kpq$

$(abc)^2$ – во 2-ой степени, т.е. каждый множитель должен встречаться четное число раз $\Rightarrow$ (kpq) среди своих простых множителей встречает хотя бы одну тройку и одну пятерку.

~~Заметим,~~ что

- $ac \,\vdots\, 5^{30} \Rightarrow abc \,\vdots\, 5^{30} \Rightarrow (abc)^2 \,\vdots\, 5^{60} \Rightarrow$

(kpq) содержит хотя бы 5^7

т. о. $kpq \geqslant 3 \cdot 5^7 \Rightarrow (abc)^2 \geqslant 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{60} \Rightarrow$

$\boxed{abc \geqslant 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}}$

$\exists\ a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{10}$

$b = 2^2 \cdot 3^3$

$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$

Легко убедиться, что $ab \,\vdots\, 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$

$bc \,\vdots\, 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$

$ac \,\vdots\, 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \Rightarrow$ наим. значение достигается.

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

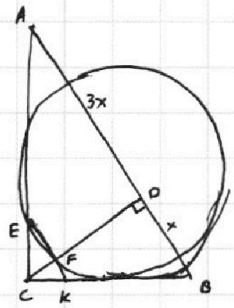
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.



• $\triangle ACD \sim \triangle CDB \Rightarrow$

$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow$

$CD^2 = AD \cdot DB$, $\exists\ DB = x \Rightarrow$

$CD^2 = 3x \cdot x \Rightarrow CD = \sqrt{3}x$

• $\exists\ (EF) \cap BC = K$

$\triangle CEK \sim \triangle CAB$, CF – высота $\triangle CEK \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{EF}{FK} = \frac{AD}{DB} = 3$ $\quad \exists\ FK = y \Rightarrow EF = 3y \Rightarrow CF = \sqrt{3}y$.

• по т. об отр. касательной и секущей $KB^2 = KF \cdot KE \Rightarrow$

$KB^2 = y \cdot 4y \Rightarrow BK = 2y$

• $CK = \sqrt{CF^2 + FK^2} = \sqrt{3y^2 + y^2} = 2y$ (по т. Пифагора) $\Rightarrow$

$CB = 4y$

• С другой стороны $CB = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x \Rightarrow$

$4y = 2x \Rightarrow x = 2y$

$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}y \cdot 3y = \frac{3\sqrt{3}}{2}y^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8}x^2$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AB = \frac{1}{2}\sqrt{3}x \cdot 4x = 2\sqrt{3}x^2$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{\frac{3\sqrt{3}}{8}x^2} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$

Ответ: $5\frac{1}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$5\arcsin(\cos x) = x+\frac{\pi}{2}$

$5\sqrt{1-x^2} = x+\frac{\pi}{2}$

$x+\frac{\pi}{2} \geq 0$

$25(1-x^2) = x^2+\pi x+\frac{\pi^2}{4}$

$26x^2+\pi x+\left(\frac{\pi^2}{4}-25\right)=0$

$D = \pi^2 - 26\pi^2 + \frac{13\cdot 25}{2} = \frac{13\cdot 25}{2} - 26\pi =$

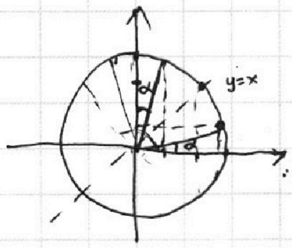
$= 25(6,5-\pi)$

$x = \frac{-\pi \pm 5\sqrt{6,5-\pi}}{52}$

$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}$

$\sqrt{1-\cos^2 x} = \cos\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}\right)$

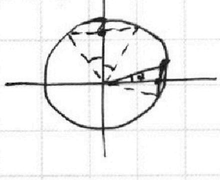
$\sin x = \cos\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{12x}{10} = \frac{4\pi}{10} \\ x-\frac{x}{5}-\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{8x}{10} = \frac{6\pi}{10} \end{array}\right.$



$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{3\pi}{4} \end{array}\right.$

Проверка:

$\exists\ x = \frac{\pi}{3}$



$\left[\begin{array}{l} 5\cdot\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right) = \frac{5\pi}{6} \\ 5\cdot\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right) = \frac{5\pi}{6} \end{array}\right.$ — $\exists\ k=0$ — решается, $k\in\mathbb{Z}$

$\exists\ x = \frac{3\pi}{4}$

$\left[\begin{array}{l} 5\cdot\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi k\right) = \frac{5\pi}{4} \\ 5\cdot\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi k\right) = \frac{5\pi}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4}+2\pi k = \frac{5\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k = \frac{5\pi}{4} \end{array}\right.$?!

Ответ: $\frac{\pi}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

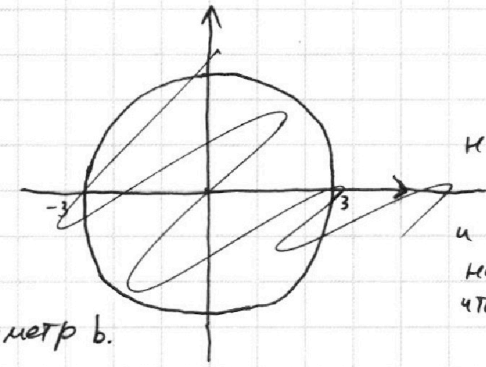
$a - ?$: $\exists b$:

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 & (1) \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 & (2) \end{cases}$$

(2) $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2 \\ (x-6)^2+y^2=2^2 \end{array}\right.$ — ур-ия окружн. ц. $(0;0)$; $R=3$; ц. $(6;0)$; $R=2$

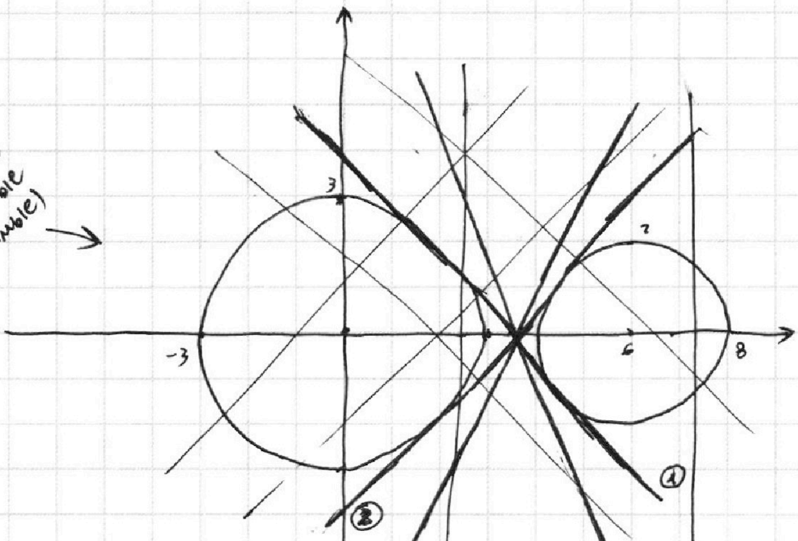
(1) $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$ —

Прямая, за угол наклона отвечает параметр a, за смещение — параметр b.



Будем смотреть на возможные расп. прямых на плоскости и искать при каких a найдется такое b, чтобы прямая пересекла окружности ровно 4 раза

(это не зачеркнуто, это проведенные прямые)



Заметим, что все прямые, проходящие через точку пересечения внутренних общ. касательных к окр. не могут пересечь окр. более чем в 2-х точках при $\forall b$. Остальные прямые могут.

См. далее.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\rho(O_1; l) = 3 \qquad \rho(O_2; l) = 2$

$\exists\ l:\ y = kx + c$

$$\begin{cases} \dfrac{|c|}{\sqrt{1+k^2}} = 3 \\ \dfrac{|6k+c|}{\sqrt{1+k^2}} = 2 \end{cases} \Rightarrow \left|\frac{c}{6k+c}\right| = \frac{3}{2}$$

$$\frac{6k+c}{c} = \pm\frac{2}{3}$$

$$\frac{6k}{c} + 1 = \pm\frac{2}{3}$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{6k}{c} = -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{6k}{c} = -\dfrac{5}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 6k = -\dfrac{c}{3} \\ 6k = -\dfrac{5c}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c = -18k \\ c = -\dfrac{18}{5}k \end{array}\right.$$

- $\dfrac{18k}{\sqrt{1+k^2}} = 3 \Rightarrow \dfrac{6k}{\sqrt{1+k^2}} = 1 \Rightarrow \dfrac{36k^2}{1+k^2} = 1 \Rightarrow$

$$\frac{1+k^2}{36k^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{36k^2} + \frac{1}{36} = 1$$

$$\frac{1}{36k^2} = \frac{35}{36} \Rightarrow$$

$$k^2 = \frac{1}{35} \Rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{1}{35}}$$

- $\dfrac{\frac{18}{5}k}{\sqrt{1+k^2}} = 3 \Rightarrow \dfrac{6k}{\sqrt{1+k^2}} = 5 \Rightarrow$

$$= \frac{36k^2}{\sqrt{1+k^2}} = 25 \Rightarrow \frac{1+k^2}{36k^2} = \frac{1}{25} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{36k^2} + \frac{1}{36} = \frac{1}{25}$$

$$\frac{1}{36k^2} = \frac{36-25}{36\cdot 25} \Rightarrow \frac{1}{k^2} = \frac{11}{25} \Rightarrow k = \pm 5\sqrt{\frac{1}{11}}$$

У внутр. кас. $|k|$ больше, т.к. тангенс угла наклона больше $\Rightarrow$ нас интересуют $k = \pm 5\sqrt{\frac{1}{11}}$, т.е. нам ~~не~~ подойдут такие

$$\begin{cases} -\dfrac{a}{2} > -5\sqrt{\dfrac{1}{11}} \\ -\dfrac{a}{2} < 5\sqrt{\dfrac{1}{11}} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{a}{2} > \dfrac{5}{\sqrt{11}} \\ -\dfrac{a}{2} < -\dfrac{5}{\sqrt{11}} \end{array}\right. \text{ — нас интересуют } \Rightarrow \begin{array}{l} a < -\dfrac{10}{\sqrt{11}} \\ a > \dfrac{10}{\sqrt{11}} \end{array}$$

Ответ: $\left(-\dfrac{10}{\sqrt{11}}; \dfrac{10}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$\exists \log_3 x = A$

$\log_3 5y = B$

$$\begin{cases} A^4 + \frac{12}{2A} = \frac{5}{2A} - 8 \\ B^4 + \frac{4}{2B} = \frac{11}{2B} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^5 + 7 + 8A = 0 \\ B^5 - 7 + 8B = 0 \end{cases} \Bigg| +$$

$$A^5 + B^5 + 8(A+B) = 0$$

$$(A+B)(A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4 + 8) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} A+B=0 \\ A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4 = -8 \end{array}\right. \quad \Big| : B^4 \qquad \exists\, t = \frac{A^4}{B}$$

$$t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 = -\frac{8}{B^4}$$

$$\forall \left(t^2 + \frac{-\sqrt5 - 1}{2} t + 1\right)\left(t^2 + \frac{-1+\sqrt5}{2} t + 1\right) =$$

$$= t^4 + \frac{-\sqrt5-1}{2} t^3 + t^2 + \frac{-1+\sqrt5}{2} t^3 + \frac{(-\sqrt5-1)(\sqrt5-1)}{4} t^2 + \frac{-1-\sqrt5}{2} t +$$

$$+ t^2 + \frac{-1+\sqrt5}{2} t + 1 = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 = -\frac{8}{B^4}$$

$$\forall \left(t^2 + \left(\frac{-1-\sqrt5}{2}\right) + 1\right)$$

$$D = \frac{1+5+2\sqrt5}{4} - 4 = \frac{6+2\sqrt5-16}{4} = \frac{2\sqrt5-10}{4} < 0 \Rightarrow t^2 + \left(\frac{-1-\sqrt5}{2}\right) + 1 > 0$$

$$\forall \left(t^2 + \left(\frac{-1+\sqrt5}{2}\right) t + 1\right)$$

$$D = \frac{1+5-2\sqrt5-16}{4} = \frac{-2\sqrt5-10}{4} < 0 \Rightarrow \left(t^2 + \left(\frac{-1+\sqrt5}{2}\right) t + 1\right) > 0$$

$-\frac{8}{B^4} < 0$, а $\underbrace{t^4 - t^3 + t^2 - t + 1}$ $> 0 \Rightarrow$ решений нет $\Rightarrow$

$\boxed{A+B=0} \Rightarrow \log_3 x + \log_3 5y = 0 \Rightarrow \log_3 x \cdot 5y = 0 \Rightarrow x \cdot 5y = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$

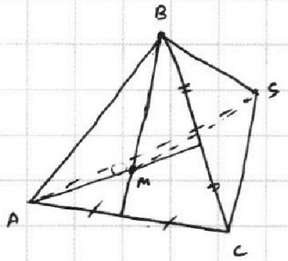
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

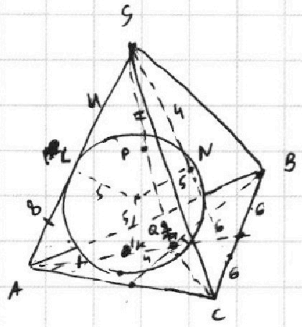
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

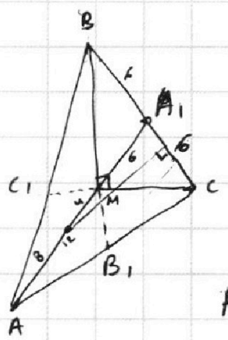
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

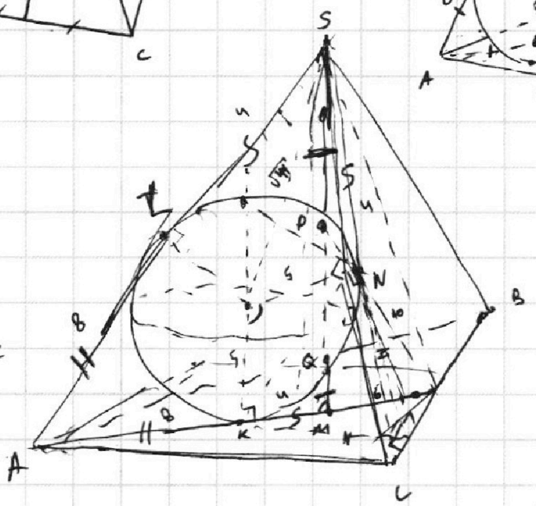
Задача 7.





$S_{ABC} = 90$





$KM^2 = QM \cdot MP = SP \cdot SQ =$

$= SL^2 \Rightarrow$ (L — точка касания с AS)

$KM = SL \Rightarrow$

$AM = AS = 12 \Rightarrow$

$AA_1 = 12 \cdot \frac{3}{2} = 18 \Rightarrow$

$MA = 6 \Rightarrow \triangle CMB$ — прямоуг.

~~$CC_1 \cdot BB_1 = 2CC_1 \cdot BM$~~

$CC_1 \cdot BM = S_{ABC} \Rightarrow CC_1 \cdot BM = 90 \Rightarrow$ ~~$(KM + MC_1)(BM) = 90$~~

$BB_1 \cdot CM = S_{ABC} \Rightarrow BB_1 \cdot CM = 90 \Rightarrow$ (

$C_1C \cdot B_1B \cdot CM \cdot BM = 90^2 \Rightarrow$

~~$C_1C \cdot B_1B = \frac{90^2}{CM \cdot BM} = \frac{90^2}{2S_{\triangle BCM}} = \frac{90^2}{6 \cdot 1}$~~

$C_1C \cdot B_1B \cdot \frac{2}{3} C_1C \cdot \frac{2}{3} B_1B = 90^2 \Rightarrow$

$C_1C \cdot B_1B \cdot \frac{2}{3} = 90 \Rightarrow \quad C_1C \cdot B_1B = 45 \cdot 3 = 135$

а) Тогда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 135 = \boxed{2430}$

$$\begin{array}{r} \times\ 135 \\ 18 \\ \hline 1080 \\ 135\ \ \\ \hline 2430 \end{array}$$

б)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

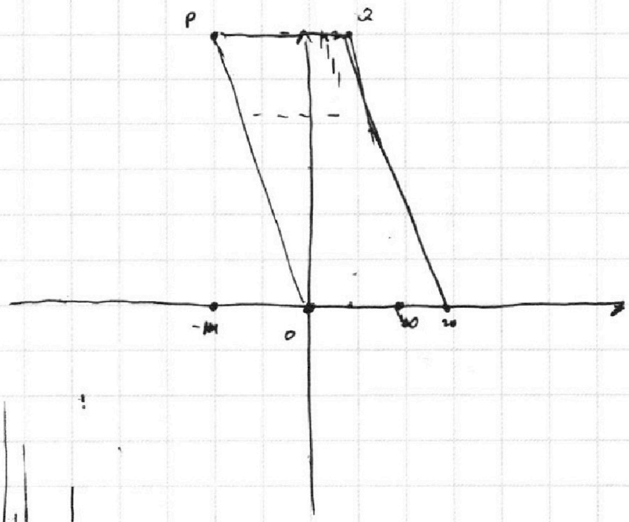
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

$(3x_2 + y_2) - (3x_1 + y_1) = 33$

$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$

$(y_2 - y_1) \vdots 3$

$y \in [0; 42]$

$y_1 = 0$

$y_2 \to \underbrace{0; 3; \ldots 42}_{15}$

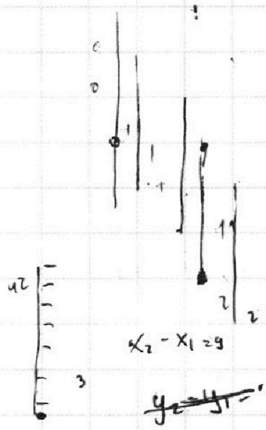
$y_1 = 1$

$15 \cdot 3 + 14 \cdot 3 + \ldots + 0 \cdot 3$

$\cancel{3(1 + \ldots + 15)} = 3 \cdot 15 \cdot 8$ — способов

~~Выбрать y так,~~ чтобы

$\cancel{(y_2 - y_1) \vdots 3}$



$x_2 - x_1 = 9$

$\cancel{y_2 = y_1}$

$\cancel{x_2 - x_1 \le 20}$

$-20 \le x_2 - x_1 \le 20$

$-42 \le (y_2 - y_1) \le 42$

$33 - 3 \cdot 20 \le (33 - 3(x_2 - x_1)) \le 33 + 3 \cdot 20 = 93$

$33 - 3 \cdot 20 = -27$

т.е. $-27 \le (y_2 - y_1) \le 42$

$y_1 = 42$

$y_2 = 15 \quad 16 \ldots 40 \quad 41$

$3 \quad \frac{42 \cdot 41}{2} - \frac{15 \cdot 16}{2}$

$21 \cdot 41 - 8 \cdot 15$

Способов выбрать y так, чтобы

$(y_2 \geqslant y_1)$ и $(y_2 - y_1) \vdots 3$: $3 \cdot 15 \cdot 8$

$y_2 < y_1$ и $(y_2 - y_1) \vdots 3$: $21 \cdot 41 - 8 \cdot 15$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\cancel{\log_3^4 x + \log_3^4 5y + 6\log_x 3 + 2\log_{5y} 3 = \frac{5}{2}\log_x 3 + \frac{11}{2}\log}$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 + \log_{25y^2} 3^{11} - 8 = \log_{x^2} 243 - 8 + \log_3^4 5y + 2\log_{5y} 3$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 + \frac{11}{2}\log_{5y} 3 = \frac{5}{2}\log_x 3 + \log_3^4 5y + 2\log_{5y} 3$

$\log_3^4 x + 3{,}5\log_x 3 + 3{,}5\log_{5y} 3 = \log_3^4 5y$

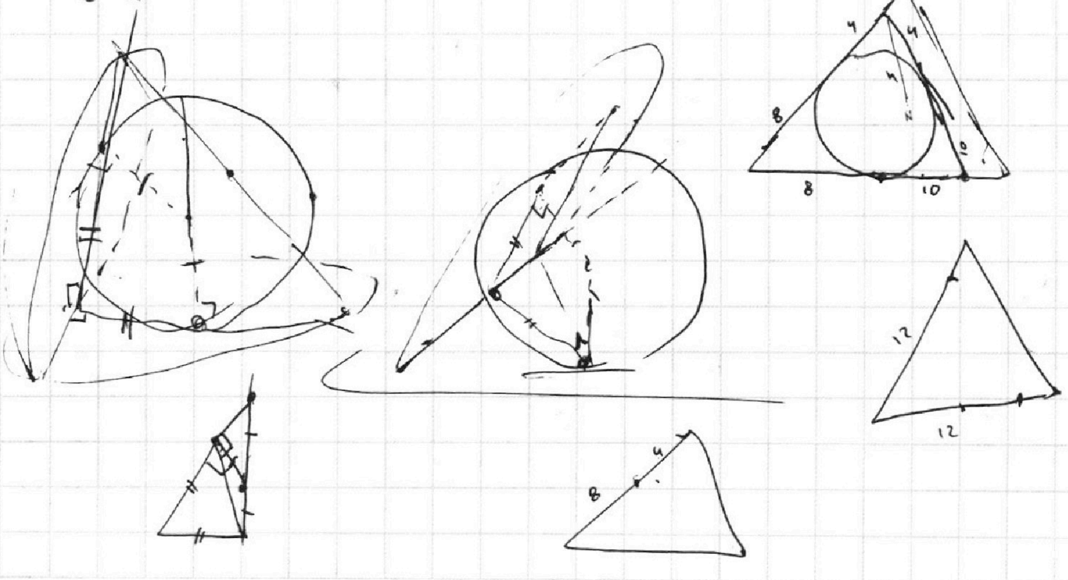
$(\log_3^4 x - \log_3^4 5y) + 3{,}5\left(\frac{\log_3 5y + \log_3 x}{\log_3 x \cdot \log_3 5y}\right) = 0$

$(\log_3^2 x - \log_3^2 5y)(\log_3^2 x + \log_3^2 5y) + 3{,}5\left(\frac{\log_3 5y + \log_3 x}{\log_3 x \cdot \log_3 5y}\right) = 0$

$(\log_3 5y + \log_3 x)\left(\log_3^3 x + \log_3^2 5y \cdot \log_3 x - \log_3 5y \cdot \log_3^2 x - \log_3^3 5y + \frac{3{,}5}{\log_3 x \cdot \log_3 5y}\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \log_3 (x \cdot 5y) = 0 \\ \log_3^4 x \cdot \log_3 5y + \log_3^2 x \cdot \log_3^3 5y - \log_3^2 5y \cdot \log_3^3 x - \log_3^4 5y \cdot \log_3 x = 3{,}5 \end{array}\right.$

$x \cdot 5y = 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$xy - ?$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2}\log_{|x|} 3 - 8 \\ \log_3^4 5y + \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{11}{2}\log_{|5y|} 3 - 8 \end{cases}$$

$243 = 9 \cdot 27 = 3^5$

$$\log_3^4 x - \log_3^4 5y + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{5}{2}\log_x 3 - \frac{11}{2}\log_{5y} 3$$

~~log~~

$$\left(\frac{1}{\log_x 3}\right)^4 - \left(\frac{1}{\log_{5y} 3}\right)^4 + 3{,}5\log_x 3 + 3{,}5\log_{5y} 3 = 0$$

$$3{,}5\left(\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 5y}\right) + \left(\log_3^2 x + \log_3^2 5y\right)\left(\log_3 x + \log_3 5y\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\log_3 x - \log_3 5y\right) = 0$$

$$\frac{3{,}5\log_3(5xy)}{\log_3 x \cdot \log_3 5y} + \log_3(5xy)\left(\left(\log_3^2 x + \log_3^2 5y\right)\left(\log_3 \frac{x}{5y}\right)\right) = 0$$

$$\log_3(5xy)\left(\frac{3{,}5}{\log_3 x \cdot \log_3 5y} + \left(\log_3^2 x + \log_3^2 5y\right)\left(\log_3 \frac{x}{5y}\right)\right) = 0$$

$\log_3 x = A$

$\log_3 5y = B$

$$\begin{cases} A^4 + \frac{13}{2A} = \frac{5}{2A^2} - 8 \\ B^4 + \frac{2}{2B} = \frac{11}{2B^2} - 8 \end{cases}$$

$A^4 + \frac{7}{2A} + 8 = 0$

$B^4 - \frac{7}{2B} + 8 = 0$

$A^5 + 7 + 8A = 0$

$B^5 - 7 + 8B = 0$

$A^5 + B^5 + 8(A+B) = 0$

$A^4 - B^4 + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) = 0$

$(A+B)\left(A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4 + 8\right) = 0$

$A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4 + 8 = 0 \quad | : B^4$

$\frac{A^4}{B^4} - \frac{A^3}{B^3} + \frac{A^2}{B^2} - \frac{A}{B} + 1 = -\frac{8}{B^4} < 0$

$t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 = (t^2 + at + b)(t^2 + ct + d) =$

$= t^4 + t^3(a+c) + t^2(d + ac + b) + t(ad + cb) + bd$

$a + c = -1$

$d + ac + b = 1$

$ad + cb = -1$

$bd = 1$

$D = 1 + 4 = 5$

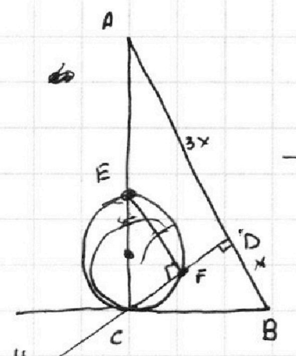
$c = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

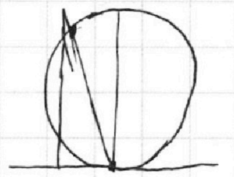
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

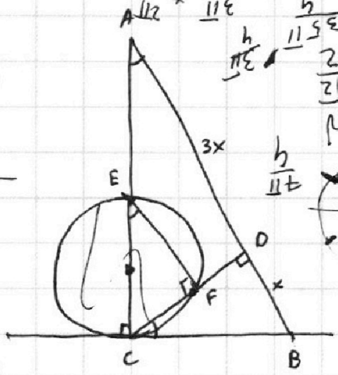
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

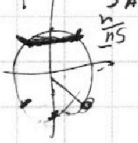






$\frac{4}{11\sqrt{2}}$ $\frac{4}{11\sqrt{5}}$

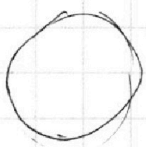
$S_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot 4x = 2\sqrt{3}x^2$



$\frac{CD}{x} = \frac{3x}{CD}$

$CD^2 = 3x^2$

$CD = \sqrt{3}x$



$tg(\pi - \alpha) = -tg\,\alpha$

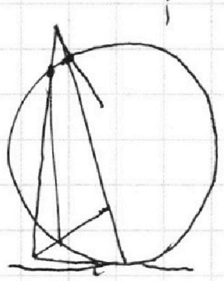
$\arcsin(\cos x)$

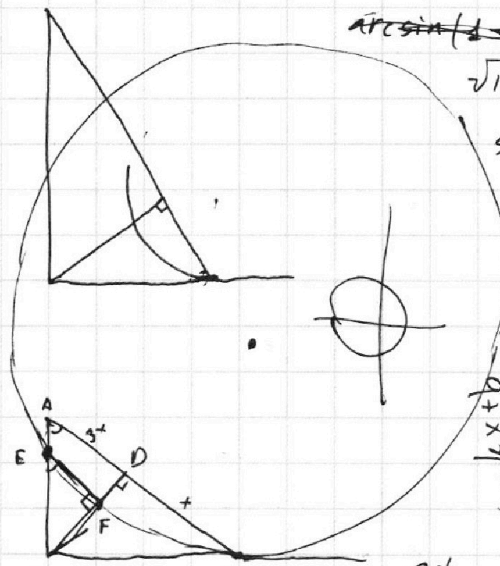
t

$\sin t = \cos x$

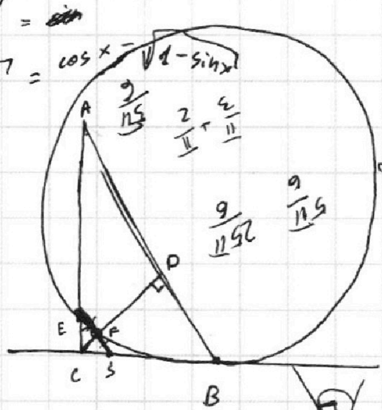
$\sqrt{1-x^2} =$

$\sin\sqrt{\ } = \cos x = \sqrt{1-\sin x}$





$y = kx + b$

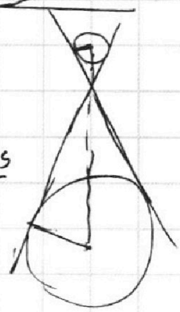


$5\sqrt{1-x^2} = x + \frac{\pi}{2}$

$\sqrt{3}x$

$\frac{EF}{3x} = \frac{FS}{x}$

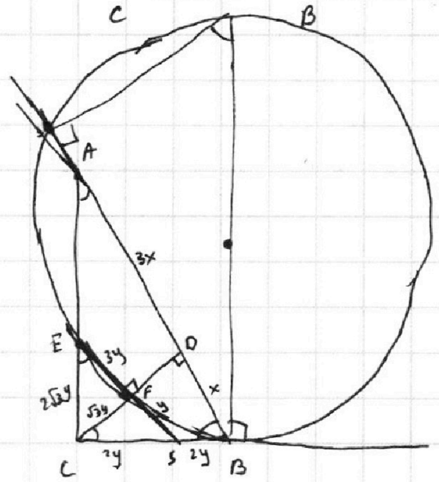
$EF =$

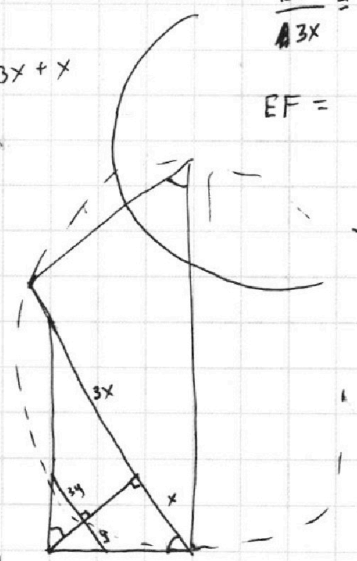


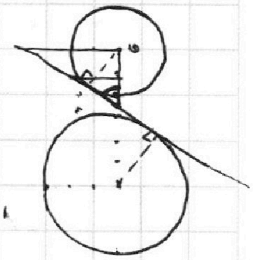
$\cos x =$

$\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$

$3x + x$







$SB^2 = SF \cdot SE$

$SB^2 = 4y^2$

$SB = 2y$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

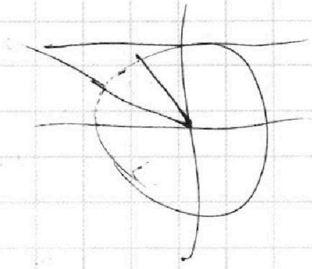
МФТИ

Задача № 1.

$\exists$ $ab \vdots 2^{9}3^{10}5^{10}\cdot k$

$bc \vdots 2^{14}3^{13}5^{13}\cdot q$

$ac \vdots 2^{19}3^{18}5^{30}\cdot p$



$(abc)^2 = 2^{(19+14+9)}\cdot 3^{(10+13+18)}\cdot 5^{(10+13+30)}\cdot kpq =$

$= 2^{42}\cdot 3^{41}\cdot 5^{53}kpq$

$(abc)^2$ — в четной степени, т.е. каждый множитель встречается четное число раз $\Rightarrow$ (kpq) содержит хотя бы одну тройку и одну пятерку в разложении.

abc наим., когда k, p, q наим.

$k\cdot p\cdot q \geqslant 3\cdot 5 = 15 \Rightarrow$ ~~abc~~ $(abc)^2 \geqslant 2^{42}\cdot 3^{42}\cdot 5^{54}$

$\exists$ $(abc)^2 = 2^{42}\cdot 3^{42}\cdot 5^{54}$

$a+b=9$
$b+c=14$
$a+c=19$

$a+b=10$
$b+c=14$
$a+c=18$

$\exists$ $a = 2^{7}\cdot 3^{7}\cdot 5^{10}$

$b = 2^{2}\cdot 3^{3}\cdot$

$c = 2^{12}\cdot 3^{11}\cdot 5^{20}$

$ab \vdots 2^{9}\cdot 3^{10}\cdot 5^{10}\cdot 4$

$\Rightarrow$ ~~(abc)~~ $bc \vdots 2^{14}\cdot 3^{14}\cdot 5^{20}$.

$ac \vdots 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30}$

$(abc)^2 = 2^{42}\cdot 3^{42}\cdot 5^{60}$

$abc = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

$a-b=5$
$a=7$
$b=2$
$c=12$

$a-b=4$
$2a=$
$a=$
$c=11$
$b=3$

~~• Заметим, что сумма степеней пятерок для чисел ab, bc и ac — 54.~~

$a+b=10$
$b+c=13$
$a+c=30$

$a-b=16$
$2a=26$
$a=13$
$b=17$
$b=$

$2(a+b+c)=60$
$a+b+c=30$

$a-b=12$
$2a=$

~~Док.~~ $(abc)^2 = t\cdot 5^{54}$, $t \not\vdots 5$

$(abc) = 5^{27}\cdot L$, $t \not\vdots 5$

Но $ac \vdots 5^{30} \Rightarrow$

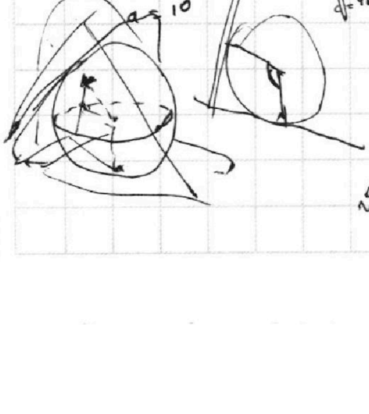
$(abc) \vdots 5^{30} \Rightarrow (abc)^2 \vdots 5^{60} \Rightarrow$

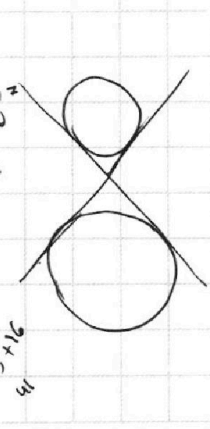
Эх. кос.

kpq содержит хотя бы $5^{7} \Rightarrow$

$kpq \geqslant 3\cdot 5^{7}$

$b=0$
$c=20$
$a=10$





$25+16$
41

1
2
3
4
4
5
6
7а
7б