



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$\exists ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot k$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot q$$

$$ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot p$$

$$(abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53} \cdot kpr$$

$(abc)^2$ — во 2-ой степени, т.е. каждый множитель должен встречаться четное число раз $\Rightarrow (kpr)$ среди своих простых множителей встречает хотя бы одну тройку и одну пятёрку.

Заметим, что

$$\bullet ac : 5^{30} \Rightarrow abc : 5^{20} \Rightarrow (abc)^2 : 5^{60} \Rightarrow$$

(kpr) содержит хотя бы 5^7

$$\text{т.о. } kpr \geq 3 \cdot 5^7 \Rightarrow (abc)^2 \geq 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{60} \Rightarrow$$

$$abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\exists a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{10}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$$

Легко убедиться, что

$$ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \Rightarrow \text{наим. значение достигается.}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

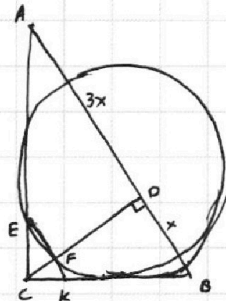
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2.



• $\triangle ACD \sim \triangle CDB \Rightarrow$

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow$$

$$CD^2 = AD \cdot DB, \text{ где } DB = x \Rightarrow$$

$$CD^2 = 3x \cdot x \Rightarrow CD = \sqrt{3}x$$

• $\angle (EF) \cap BC = K$

$\triangle CEK \sim \triangle CAB$, CF — высота $\triangle CEK \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{EF}{FK} = \frac{AD}{DB} = 3 \quad \angle FK = y \Rightarrow EF = 3y \Rightarrow CF = \sqrt{3}y.$$

• по т. об^{отр.} касательной и секущей $KB^2 = KF \cdot KE \Rightarrow$

$$KB^2 = y \cdot 4y \Rightarrow BK = 2y$$

• $CK = \sqrt{CF^2 + FK^2} = \sqrt{3y^2 + y^2} = 2y$ (по т. Пифагора) \Rightarrow

$$CB = 4y$$

• с другой стороны $CB = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x^* \Rightarrow$

$$4y = 2x \Rightarrow x = 2y \Rightarrow$$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}y \cdot 3y = \frac{3\sqrt{3}}{2}y^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8}x^2$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}x \cdot 4x = 2\sqrt{3}x^2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{\frac{3\sqrt{3}}{8}x^2} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

Ответ: $5\frac{1}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \left(1 - x^2\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{2} \geq 0$$

$$25(1 - x^2) = x^2 + \pi x + \frac{\pi^2}{4}$$

$$26x^2 + \pi x + \left(\frac{\pi^2}{4} - 25\right) = 0$$

$$D = \pi^2 - 26\pi^2 + \frac{13 \cdot 25}{2} = \frac{13 \cdot 25 - 25\pi^2}{2} = 25(6,5 - \pi)$$

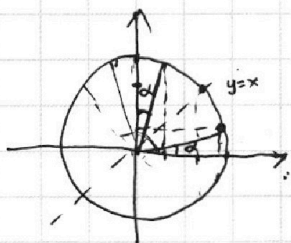
$$x = \frac{-\pi \pm 5\sqrt{6,5 - \pi}}{52}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

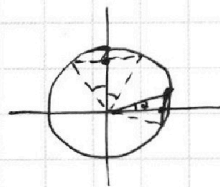
$$\sin x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{6x}{5} = \frac{4\pi}{10} \\ x - \frac{x}{5} = \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{4x}{5} = \frac{6\pi}{10} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Проверка:



$$\square x = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} 5 \cdot \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) = \frac{5\pi}{6} & \square k=0 - \text{решается} \\ 5 \cdot \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right) = \frac{5\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\square x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\begin{cases} 5 \cdot \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right) = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} + 2\pi k = \frac{5\pi}{4} \quad ?! \\ 5 \cdot \left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi k\right) = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{3\pi}{4} + 2\pi k = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a - ? : \exists b :$

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x^2 - 6)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

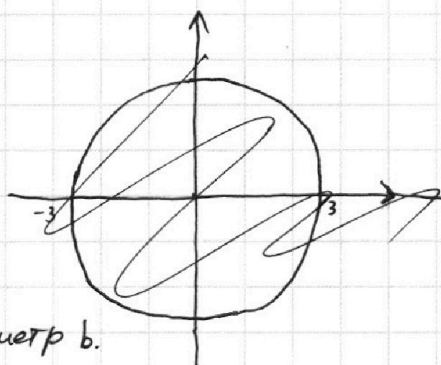
ц. $(0; 0); R = 3$

ц. $(6; 0); R = 2$

- ур-на окружн.

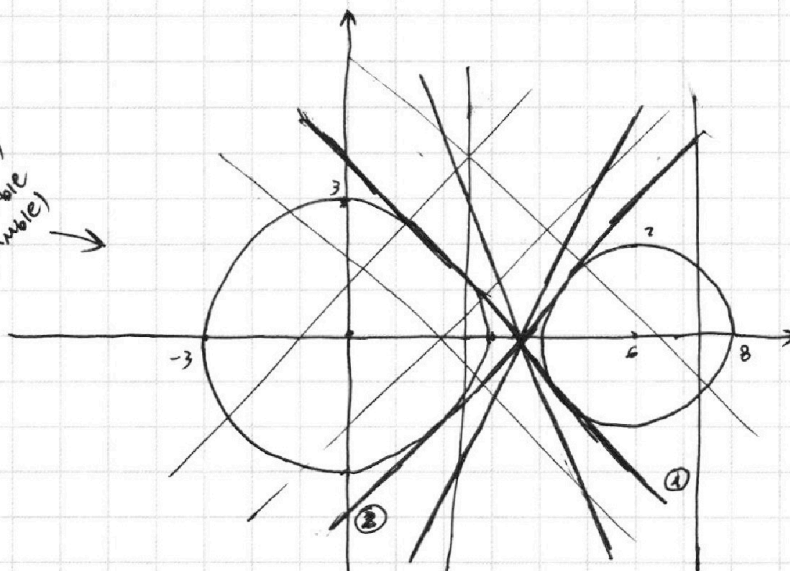
(1) $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$ —

Прямая, за угол наклона отвечает параметр a , за смещение — параметр b .



Будем смотреть на возможные расст. прямых на плоскости и искать при каких a найдется такое b , чтобы прямая пересекла окружности ровно 4 раза

(это не зачеркнуто, это проведенные прямые)



Заметим, что все прямые проходящие через точку пересечения внутренних обш. касательных к окр. не могут пересечь окр. более чем в 2-х точках при $\forall b$. Остальные прямые могут.

См. далее.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\rho(O_1; L) = 3 \quad \rho(O_2; L) = 2$$

$$\exists L: y = kx + c$$

$$\begin{cases} \frac{|c|}{\sqrt{1+k^2}} = 3 \\ \frac{|6k+c|}{\sqrt{1+k^2}} = 2 \end{cases} \Rightarrow \left| \frac{c}{6k+c} \right| = \frac{3}{2}$$
$$\frac{6k+c}{c} = \pm \frac{2}{3}$$
$$\frac{6k}{c} + 1 = \pm \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} \frac{6k}{c} = -\frac{1}{3} \\ \frac{6k}{c} = -\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6k = -\frac{c}{3} \\ 6k = -\frac{5c}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -18k \\ c = -\frac{18}{5}k \end{cases}$$

$$\bullet \frac{+8k}{\sqrt{1+k^2}} = 3 \Rightarrow \frac{6k}{\sqrt{1+k^2}} = 1 \Rightarrow \frac{36k^2}{1+k^2} = 1 \Rightarrow$$

18

$$\frac{1+k^2}{36k^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{36k^2} + \frac{1}{36} = 1$$

$$\frac{1}{36k^2} = \frac{35}{36} \Rightarrow$$

$$\bullet \frac{\frac{18}{5}k}{\sqrt{1+k^2}} = 3 \Rightarrow \frac{6k}{\sqrt{1+k^2}} = 5 \Rightarrow$$

$$k^2 = \frac{1}{35} \Rightarrow k = \pm \sqrt{\frac{1}{35}}$$

$$= \frac{36k^2}{\sqrt{1+k^2}} = 25 \Rightarrow \frac{1+k^2}{36k^2} = \frac{1}{25} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{36k^2} + \frac{1}{36} = \frac{1}{25}$$

$$\frac{1}{36k^2} = \frac{36-25}{36 \cdot 25} \Rightarrow \frac{1}{k^2} = \frac{11}{25} \Rightarrow k = \pm 5 \sqrt{\frac{1}{11}}$$

У внутр. кас. $|k|$ больше, т.к. тангенс угла наклона

больше \Rightarrow нас интересуют $k = \pm 5 \sqrt{\frac{1}{11}}$, т.е. нам не

$$k \begin{cases} -\frac{a}{2} > -5\sqrt{\frac{1}{11}} \\ -\frac{a}{2} < 5\sqrt{\frac{1}{11}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{2} > \frac{5}{\sqrt{11}} \\ -\frac{a}{2} < -\frac{5}{\sqrt{11}} \end{cases} \text{ нас интересуют } \Rightarrow \begin{cases} a < -\frac{10}{\sqrt{11}} \\ a > \frac{10}{\sqrt{11}} \end{cases} \text{ Ответ: } \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$\log_3 x = A$$

$$\log_3 5y = B$$

$$\begin{cases} A^4 + \frac{12}{2A} = \frac{5}{2A} - 8 \\ B^4 + \frac{4}{2B} = \frac{4}{2B} - 8 \end{cases}$$

$$A^4 + B^4 + 7A + 7B = 0$$

$$\begin{cases} A^5 + 7 + 8A = 0 \\ B^5 - 7 + 8B = 0 \end{cases}$$

$$A^5 + B^5 + 8(A+B) = 0$$

$$(A+B)(A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4 + 8) = 0$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4 = -8 \end{cases} \quad | : B^4 \quad \Rightarrow t = \frac{A}{B}$$

$$t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 = -\frac{8}{B^4}$$

$$\nabla \left(t^2 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}t + 1 \right) \left(t^2 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}t + 1 \right) =$$

$$= t^4 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}t^3 + t^2 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}t^3 + \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-1)}{4}t^2 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}t +$$

$$+ t^2 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}t + 1 = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 = -\frac{8}{B^4}$$

$$\nabla \left(t^2 + \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) t + 1 \right)$$

$$D = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} - 4 = \frac{6+2\sqrt{5}-16}{4} = \frac{-10+2\sqrt{5}}{4} < 0 \Rightarrow t^2 + \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) t + 1 > 0$$

$$\nabla \left(t^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) t + 1 \right)$$

$$D = \frac{1+5-2\sqrt{5}-16}{4} = \frac{-10-2\sqrt{5}}{4} < 0 \Rightarrow \left(t^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) t + 1 \right) > 0$$

$$-\frac{8}{B^4} < 0, \text{ а } t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 > 0 \Rightarrow \text{решений нет} \Rightarrow$$

$$\boxed{A+B=0} \Rightarrow \log_3 x + \log_3 5y = 0 \Rightarrow \log_3 x \cdot 5y = 0 \Rightarrow x \cdot 5y = 1 \Rightarrow xy = \left(\frac{1}{5} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

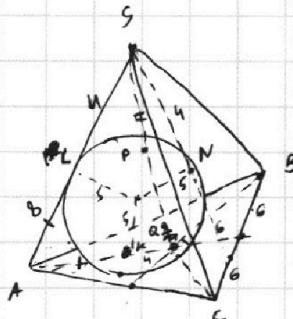
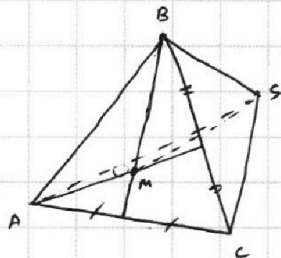
1 2 3 4 5 6 7



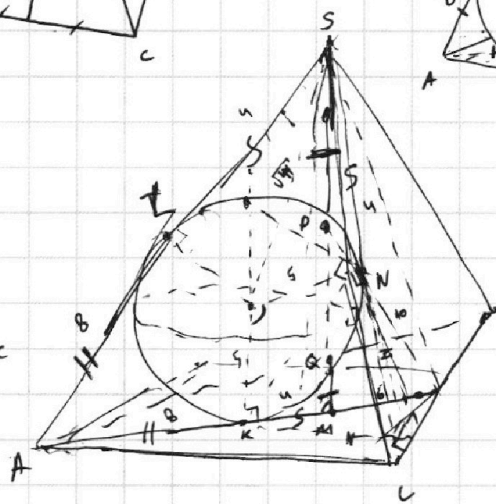
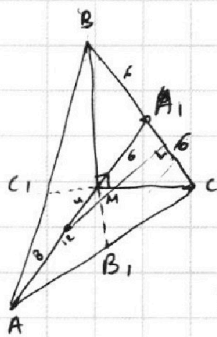
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7.



$$S_{ABC} = 90$$



$$KM^2 = QM \cdot MP = SP \cdot PQ =$$

$$= ST^2 \Rightarrow \text{(Т.Тангента касания к АС)}$$

$$KM = ST \Rightarrow$$

$$AM = AS = 12 \Rightarrow$$

$$AA_1 = 12 \cdot \frac{3}{2} = 18 \Rightarrow$$

$$MA = 6 \Rightarrow \triangle CMB - \text{прямоуг.}$$

$$CC_1 \perp BB_1 = CC_1 \perp BM$$

$$CC_1 \perp BM = \frac{1}{2} S_{ABC} \Rightarrow CC_1 \cdot BM = 90 \Rightarrow \angle CMC_1 \perp \angle BMC_1 = 90$$

$$BB_1 \perp CM = S_{ABC} \Rightarrow BB_1 \cdot CM = 90 \Rightarrow$$

$$C_1C \cdot B_1B = CM \cdot BM = 90^2 \Rightarrow$$

~~$$C_1C \cdot B_1B = 90^2 \Rightarrow C_1C \cdot B_1B = 90^2 \Rightarrow C_1C \cdot B_1B = 90^2 \Rightarrow$$~~

$$C_1C \cdot B_1B \cdot \frac{2}{3} C_1C \cdot \frac{2}{3} B_1B = 90^2 \Rightarrow$$

a) Тогда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 135 = 2430$

$$\begin{array}{r} \times 135 \\ 18 \\ \hline 1080 \\ 1350 \\ \hline 2430 \end{array}$$

б)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

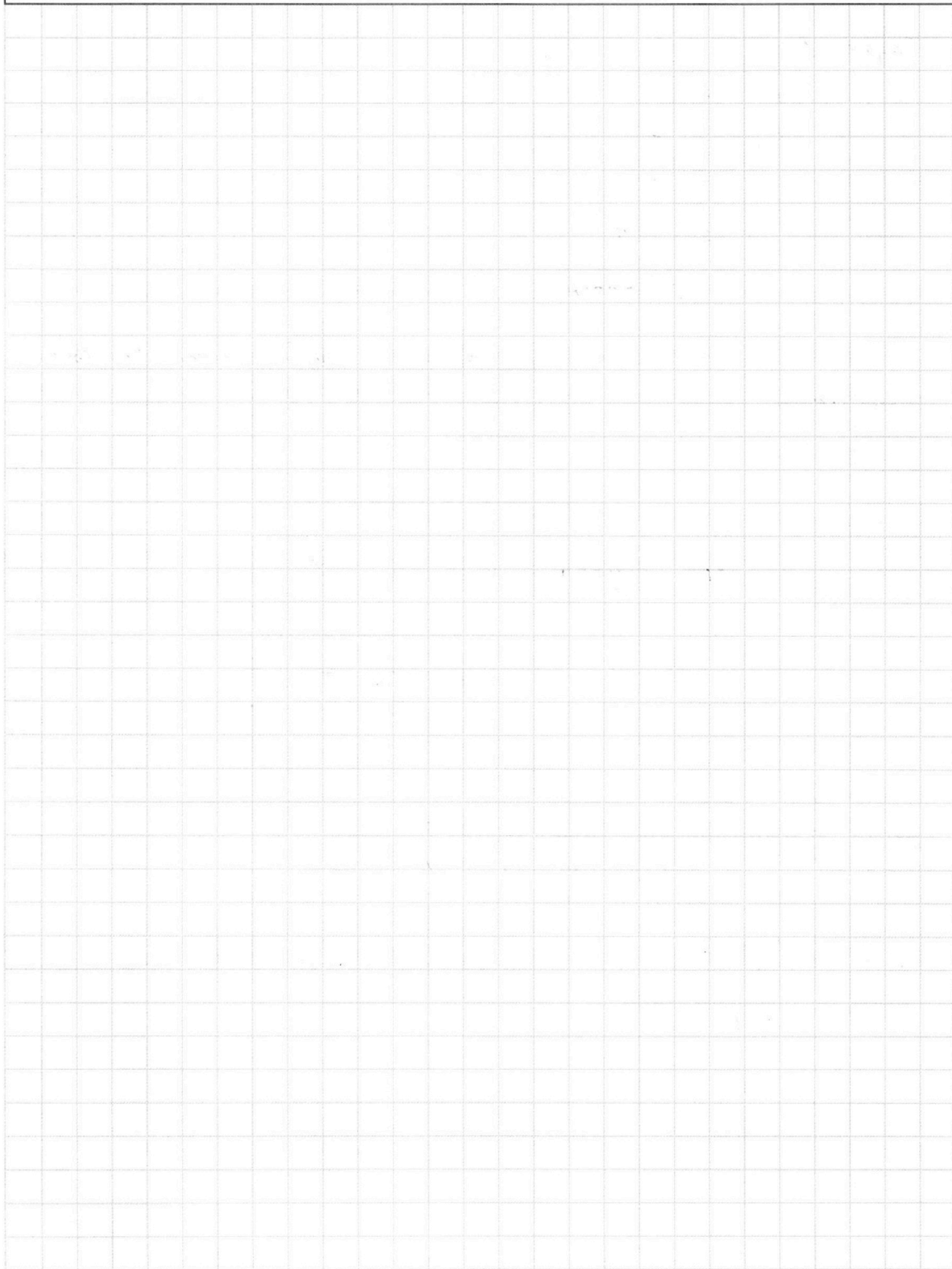
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





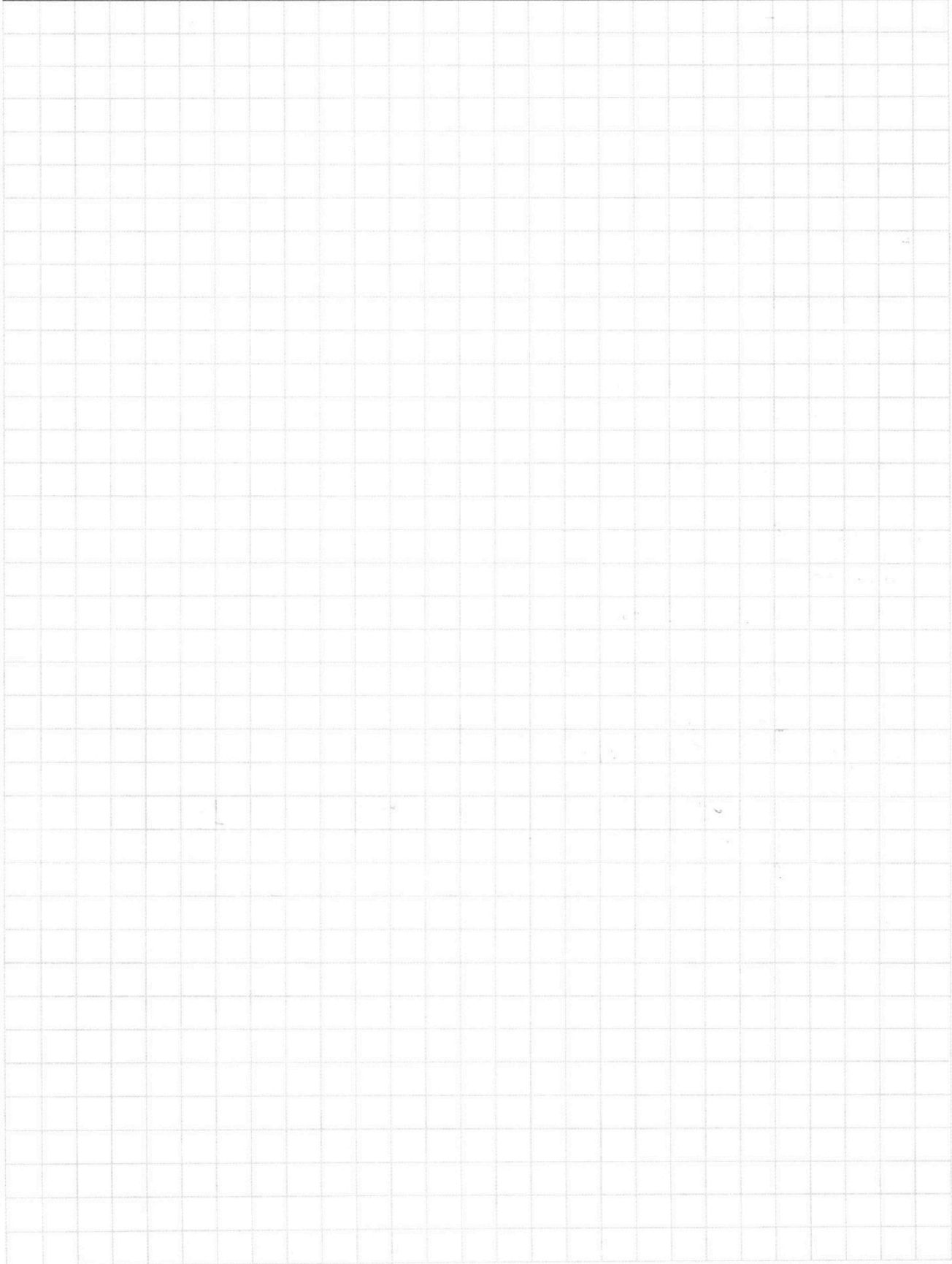
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



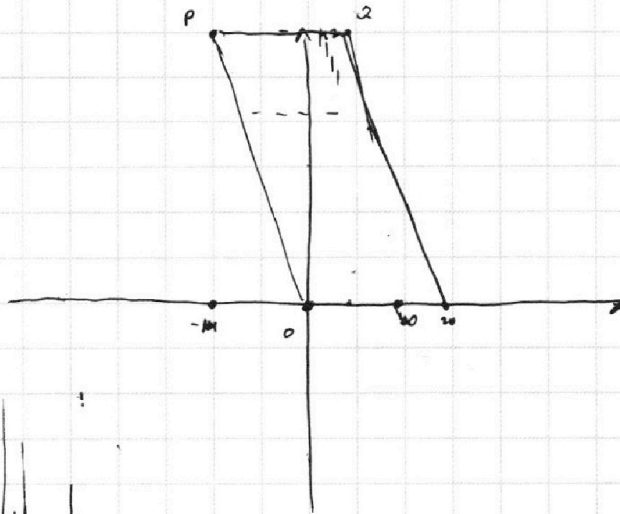
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$(3x_2 + y_2) - (3x_1 + y_1) = 33$$

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

~~$$(y_2 - y_1) : 3$$~~

$$y_2 \in [0; 42]$$

$$y_1 = 0$$

$$y_2 \rightarrow \underbrace{0; 3; \dots; 42}_{15}$$

$$y_1 = 1$$

~~$$3(15 \cdot 3 + 14 \cdot 3 + \dots + 0 \cdot 3) = 3 \cdot 15 \cdot 8$$~~

~~выбрав y так, чтобы~~
 ~~$(y_2 - y_1) : 3$~~

$$y_1 = 42$$

$$y_2 = 15 \quad 16 \dots 40 \quad 41$$

$$3 \frac{42 \cdot 41}{2} - \frac{15 \cdot 16}{2} = 21 \cdot 41 - 8 \cdot 15$$

$$33 - 3 \cdot 20 \leq (33 - 3(x_2 - x_1)) \leq 33 + 3 \cdot 20 = 93$$

||
-27

т.е. $-27 \leq (y_2 - y_1) \leq 42$

способов выбрать y так, чтобы

$$(y_2 \geq y_1) \text{ и } (y_2 - y_1) : 3 : 3 \cdot 15 \cdot 8$$

$$y_2 < y_1 \text{ и } (y_2 - y_1) : 3 : 21 \cdot 41 - 8 \cdot 15$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + \log_3^4 5y + 6 \log_x 3 + 2 \log_{5y} 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 + \frac{11}{2} \log_{5y} 3$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 + \log_{25y^2} 3 - 8 = \log_{x^2 243} 3 - 8 + \log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 + \frac{11}{2} \log_{5y} 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 + \log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 + 3,5 \log_{5y} 3 = \log_3^4 5y$$

$$(\log_3^4 x - \log_3^4 5y) + 3,5 \left(\frac{\log_3 5y + \log_3 x}{\log_3 x \cdot \log_3 5y} \right) = 0$$

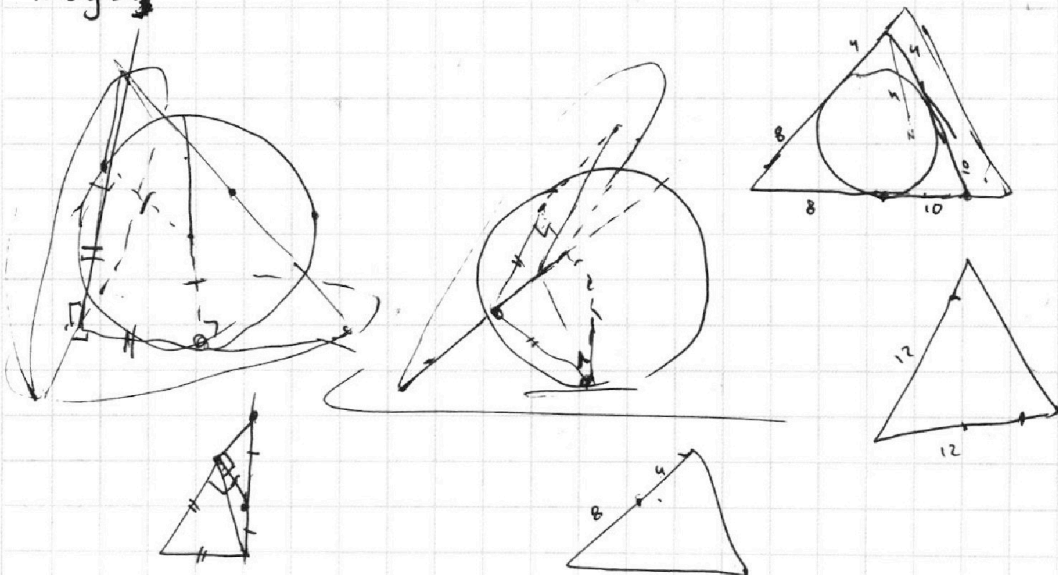
$$(\log_3^2 x - \log_3^2 5y)(\log_3^2 x + \log_3^2 5y) + 3,5 \left(\frac{\log_3 5y + \log_3 x}{\log_3 x \cdot \log_3 5y} \right) = 0$$

$$(\log_3 5y + \log_3 x) \left(\log_3^3 x + \log_3^2 5y \cdot \log_3 x - \log_3 5y \cdot \log_3^2 x - \log_3^3 5y + \frac{3,5}{\log_3 x \cdot \log_3 5y} \right) = 0$$

$$\log_3(x \cdot 5y) = 0$$

$$\log_3^4 x \cdot \log_3 5y + \log_3^2 x \cdot \log_3^3 5y - \log_3^2 5y \cdot \log_3^3 x - \log_3^4 5y \cdot \log_3 x = 3,5$$

$$x \cdot 5y = 1$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3'') - 8 \end{cases}$$

$xy = ?$

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \log_{1 \times 1} 3 - 8 \\ \log_3^4 5y + \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8 \end{cases}$$

$$243 = 9 \cdot 27 = 3^5$$

$$\begin{aligned} a+c &= -1 \\ d+ac^2+b^2 &= 1 \\ a^2+d+cb^2 &= -1 \\ b^2+d &= 1 \\ b+d &= 3 \\ b+d &= 1 \end{aligned}$$

$$\log_3^4 x - \log_3^4 5y + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{5}{2} \log_x 3 - \frac{11}{2} \log_{5y} 3$$

\log_x

$$\left(\frac{1}{\log_x 3}\right)^4 - \left(\frac{1}{\log_{5y} 3}\right)^4 + 3,5 \log_x 3 + 3,5 \log_{5y} 3 = 0$$

$$\frac{(\sqrt{5}-1)}{4}$$

$$\frac{(t^2+1)(t^2-t)}{t(t^2+1)(t-1)}$$

$$t^2 + t - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$c = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$D = 5 + 9 - 6\sqrt{5} - 4 < 0$$

$$3,5 \left(\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 5y} \right) + (\log_3^2 x + \log_3^2 5y) (\log_3 x + \log_3 5y) \cdot (\log_3 x - \log_3 5y) = 0$$

$$\frac{3,5 \log_3(5xy)}{\log_3 x \cdot \log_3 5y} + \log_3(5xy) \left((\log_3^2 x + \log_3^2 5y) (\log_3 \frac{x}{5y}) \right) = 0$$

$$\log_3(5xy) \left(\frac{3,5}{\log_3 x \cdot \log_3 5y} + (\log_3^2 x + \log_3^2 5y) (\log_3 \frac{x}{5y}) \right) = 0$$

$$\begin{cases} \log_3 x = A \\ \log_3 5y = B \\ A^4 + \frac{1}{2A} = \frac{5}{2A} - 8 \\ B^4 + \frac{1}{2B} = \frac{11}{2B} - 8 \end{cases}$$

$$A^4 + \frac{7}{2A} + 8 = 0$$

$$B^4 - \frac{7}{2B} + 8 = 0$$

$$\begin{aligned} A^5 + 7A + 8A &= 0 \\ B^5 - 7 + 8B &= 0 \\ A^5 + B^5 + 8(A+B) &= 0 \\ A^4 - B^4 + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A+B)(A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4) &= 0 \\ (A+B) \left(A^4 - \frac{A^3}{B} + \frac{A^2}{B^2} - \frac{A}{B} + B^4 \right) &= 0 \\ t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 &= 0 \\ (t^2 + t + 1)(t - 1) &= 0 \\ t^2 + t + 1 = 0 \quad t - 1 = 0 \\ D = 1 - 4 = -3 < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= -1 \\ b &= 1 \\ d &= 0 \\ d &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4+d &= 1 \\ 0-b+d &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+c &= -1 \\ ac &= 1 \\ a &= -1 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical solution on grid paper for a geometry problem involving a triangle and an inscribed circle.

Diagrams: Several diagrams show a triangle ABC with an inscribed circle. The radius is r . The distance from the center to the base BC is x . The distance from the center to the side AC is $3x$. The distance from the center to the side AB is x . The base BC is $2\sqrt{3}x$. The height from A to BC is h . The distance from A to the center is $\frac{h}{\sqrt{3}}$. The distance from the center to the side AC is $\frac{h}{\sqrt{3}}$. The distance from the center to the side AB is $\frac{h}{\sqrt{3}}$.

Equations and Calculations:

- $S_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot h = 2\sqrt{3}x^2$
- $\frac{CD}{x} = \frac{3x}{CD}$
- $CD^2 = 3x^2$
- $CD = \sqrt{3}x$
- $x^2 + 9 = \sqrt{3}x + 9$
- $x^2 = \sqrt{3}x$
- $x = \sqrt{3}$
- $CD = 3$
- $BC = 2\sqrt{3}$
- $AC = 2$
- $AB = 2$
- $h = \sqrt{3}$
- $r = 1$
- $\cos x = \frac{1}{2}$
- $x = \frac{\pi}{3}$
- $\sin(x + \frac{\pi}{10}) = \frac{1}{2}$
- $5\sqrt{1-x^2} = x + \frac{\pi}{2}$
- $\sqrt{1-x^2} = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$
- $\sin \sqrt{1-x^2} = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$
- $\frac{EF}{3x} = \frac{PS}{x}$
- $EF = PS$
- $SB^2 = SF \cdot SE$
- $SB^2 = 4 \cdot 4 = 16$
- $SB = 4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача № 1.

$$I \quad ab \equiv 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot k$$

$$bc \equiv 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot q$$

$$ac \equiv 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot p$$

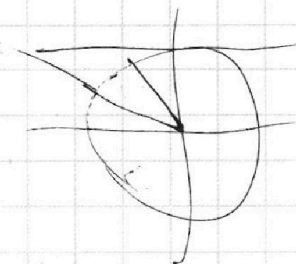
$$(abc)^2 = 2^{(19+14+9)} \cdot 3^{(10+13+18)} \cdot 5^{(10+13+30)} \cdot kpr = \\ = 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53} \cdot kpr$$

$(abc)^2$ — в четной степени, т.е. каждый множитель встречается четное число раз \Rightarrow (kpr) содержит хотя бы одну тройку и одну пятёрку в разложении.

abc наим., когда k, p, q наим.

$$kpr \geq 3 \cdot 5 = 15 \Rightarrow (abc)^2 \geq 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{54}$$

$$I \quad (abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{54}$$



$$\begin{aligned} a+b &= 9 \\ b+c &= 14 \\ a+c &= 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 19 \\ b+c &= 14 \\ a+c &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I \quad a &= 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{10} \\ b &= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \\ c &= 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &= 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{14} \cdot 4 \\ \Rightarrow (abc)^2 \quad bc &= 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{20} \\ ac &= 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \\ (abc)^2 &= 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{60} \\ abc &= 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \end{aligned}$$

Заметим, что сумма степеней пятёрок для чисел ab, bc и ac — 54.

$$I \text{ или } (abc)^2 = t \cdot 5^{54}, \quad t \not\equiv 5$$

$$(abc) = 5^{27} \cdot L, \quad t \not\equiv 5$$

$$\text{Но } ac : 5^{30} \Rightarrow$$

$$(abc) : 5^{30} \Rightarrow (abc)^2 : 5^{60} \Rightarrow$$

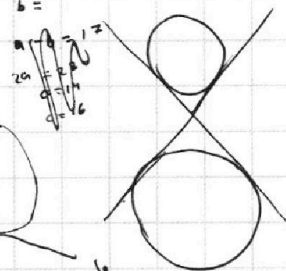
$$kpr \text{ содержит хотя бы } 5^7 \Rightarrow \\ kpr \geq 3 \cdot 5^7$$

Реш. кос:

7
6
5
4
3
2
1
76

$$\begin{aligned} 2(a+b+c) &= 60 \\ a+b+c &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 0 \\ c &= 20 \\ a &= 10 \end{aligned}$$



$$25+16=41$$