



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

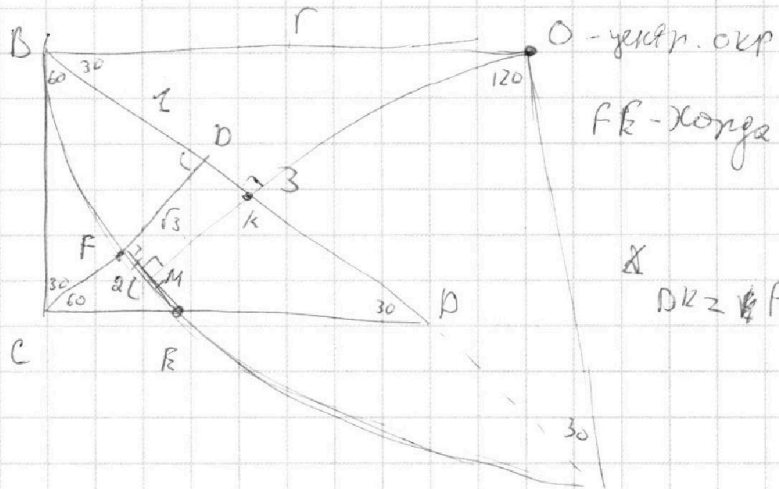
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle ABC \text{ — равнобедренный}$
 $\angle B = 120^\circ \Rightarrow \angle C = \angle A = 30^\circ$
 $BC = 1 \Rightarrow CD = \sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3}$
 $\angle DCA = 60^\circ \Rightarrow \angle A = 30^\circ$
 $\angle OBA = 30^\circ$
 (1)



$FE = 2L$

$FE \perp AC \Rightarrow OM \perp BF \Rightarrow EM = FM$

$DK = FM$, т.к. $FM \perp KO$ (т.к. $FM \perp BF$ и $KO \perp BF$)

$(1) \Rightarrow BK = r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow L = 4 \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2L}{\sqrt{3}} = \frac{2+2L}{\sqrt{3}}$

$(L+1)^2 + (\frac{r}{2})^2 = r^2 \Rightarrow L^2 + 2L + 1 + \frac{r^2}{4} = r^2 \Rightarrow L^2 + 2L + 1 = \frac{3}{4}r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{4L^2 + 8L + 4}{3}$

$FO^2 = r^2 = FM^2 + MO^2$

$MO = \frac{r}{2} + (\sqrt{3} - \frac{2L}{3} \cdot \sqrt{3}) = \frac{r}{2} + \frac{3-2L}{\sqrt{3}}$

$r^2 = L^2 + (\frac{r}{2} + \frac{3-2L}{\sqrt{3}})^2 \cdot 3$

$3 + 6L + 2L^2 = (\frac{1+L}{\sqrt{3}} + \frac{3-2L}{\sqrt{3}})^2 \cdot 3$

$9 + 18L + 6L^2 = (4-L)^2$

$9 + 18L + 6L^2 = 16 - 8L + L^2$

$5L^2 + 26L - 7 = 0$

$D = 169 + 85 = 254$

$L = \frac{-13 \pm \sqrt{254}}{5} \Rightarrow L = \frac{-13 + \sqrt{254}}{5}$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{CD^2}{FE^2} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{3}{4}}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

\Leftrightarrow

$3r^2 = 3L^2 + (4-L)^2$

$3r^2 = 16 - 8L + 4L^2$

$16(=12) \Rightarrow L = \frac{3}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ x^2 + (y-6)^2 = 2^2 \end{cases}$$

поиск точек касания

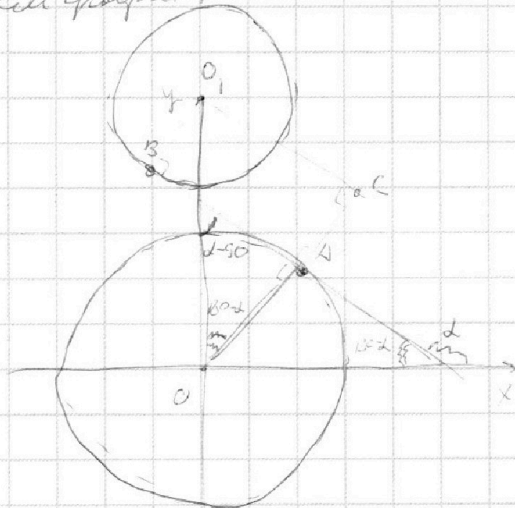
поиск точки касания, т.е. на секущей. Форма
в, т.е. если уравнение

уравнения $-\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}bzy$

два уравнения касательных

поиск углов касательных

$$y = ax + b$$



AB-хорда, $OC \parallel BA$ и $AC \perp BO_1$ и BO_1, CO -высоты.

$$OO_1 = 6$$

$$OC = R_1 \cos \alpha = 3 \cos \alpha$$

$$BA = O_1C = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$$

$$\alpha = \arctan \alpha = -\arctan(180 - \alpha) = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

способ. у точек касательных в силу геометрии

$$a = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{11}}{5} \leq \frac{-a}{2} \leq \frac{\sqrt{11}}{5} \Rightarrow \frac{2\sqrt{11}}{5} \geq a \geq \frac{-2\sqrt{11}}{5}$$

и т.д.

$$a \in \left(-\frac{2\sqrt{11}}{5}; \frac{2\sqrt{11}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{11}}{5}; +\infty\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \frac{\ln^4 x}{\ln^4 3} + \frac{6 \ln 3}{\ln x} = \frac{\ln 3^5}{2 \ln x} - 8 \\ \frac{\ln^4 2}{\ln^4 3} + \frac{2 \ln 3}{\ln 2} = \frac{\ln 3^{11}}{2 \ln 2} - 8 \end{cases}$$

$$\text{пусть } L(x) = \log_3(x)$$

$$\text{где } z = 5y$$

$$\begin{cases} L^4 x + \frac{6}{Lx} = \frac{5}{2Lx} - 8 \\ L^4 z + \frac{2}{Lz} = \frac{11}{2Lz} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Lz = a \\ Lx = \frac{1}{4}a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8 \\ b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^5 + 47z = 5 - 16a \\ 2b^5 + 4z = 11 - 16b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^5 + 7z = -16a \\ 2b^5 - 7z = -16b \end{cases} \begin{matrix} (\text{возм. } 0 \text{ и } 5z) \\ \rightarrow \text{Итого} \end{matrix}$$

если t корень $2a^5 + 7z = -16a$, то

$-t$ - корень $2b^5 - 7z = -16b$

↓

$$2a^5 + b^5 = -8(a+b)$$

↑

$$a+b=0 \Rightarrow Lx + Lz = 0 \Rightarrow \log_3(x \cdot z) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3(x \cdot 5y) = 0 \Rightarrow x \cdot 5y = 1 \Rightarrow \boxed{x \cdot y = \frac{1}{5}}$$



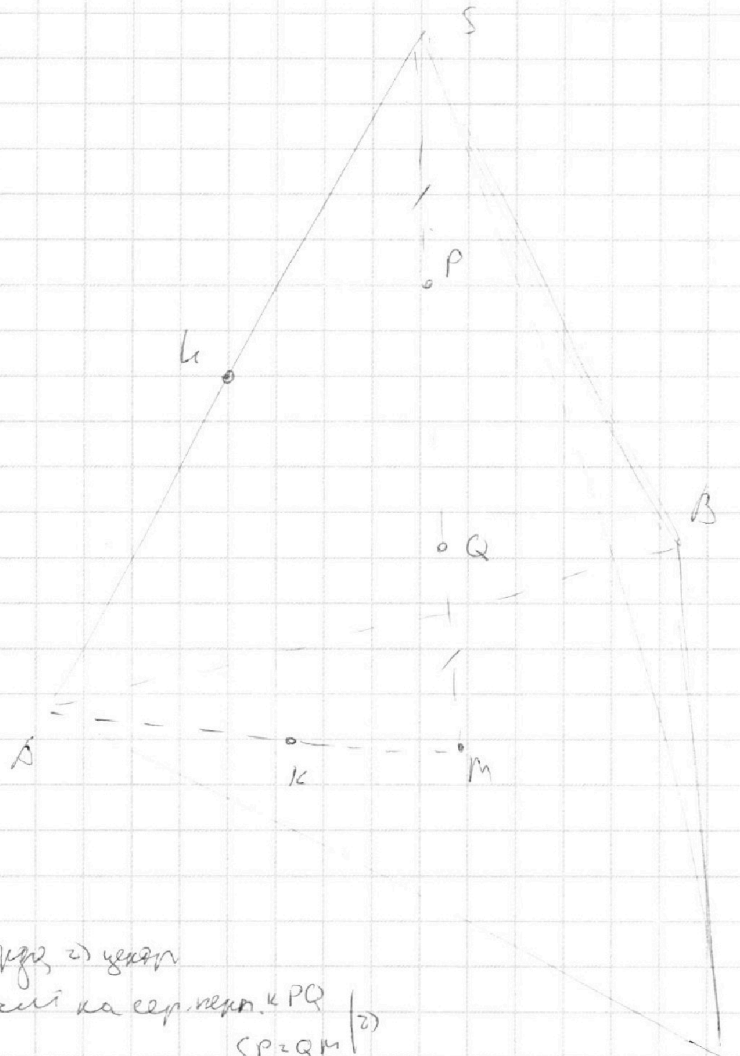
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



PQ - хорда, \Rightarrow угол

Ω лежит на сер-перп. к PQ
 $SP = QM$ (2)

\Rightarrow на сер-перп. к SM .

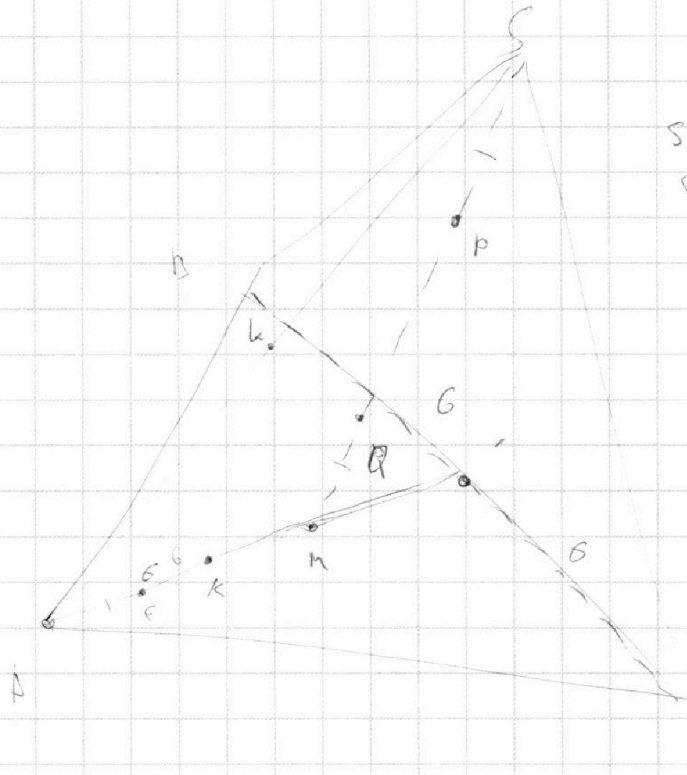
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

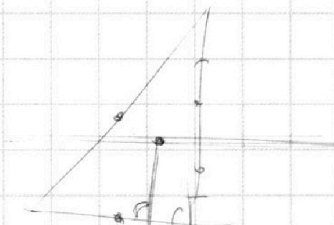
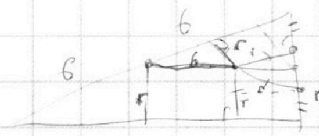
- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



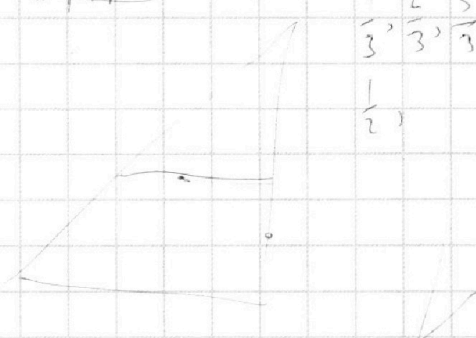
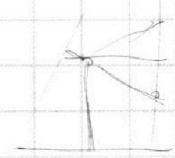
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$SA_1B_1C_1 \parallel$
 Γ_{PQR}
 $SA_1B_1C_1 \perp 90$



1 2 3 4 5 6
3' 3' 3' 3' 3' 3'
1
2)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

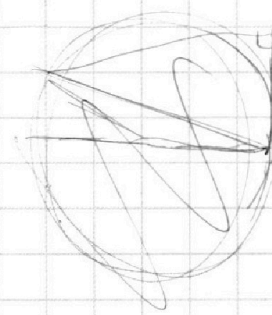


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$205 + 159 = 364$$

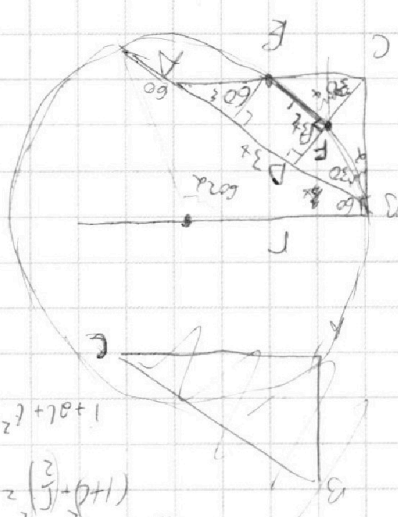


$$16 - 8\sqrt{3} + 2 = 9 + 18\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$$

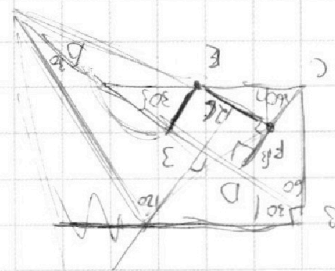
$$\left(\frac{16}{4} - \frac{8\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{4}\right)^2 = \left(\frac{9}{2} + \frac{18\sqrt{3}}{2} + \frac{6\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\left(4 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{2} + 12\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\right)^2$$

ABDE
AD = 1/3
DB = 2/3



$$1 + 2\sqrt{3} + 3 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$



$$\frac{225}{25} = 9$$

$$\frac{21}{3} = 7$$

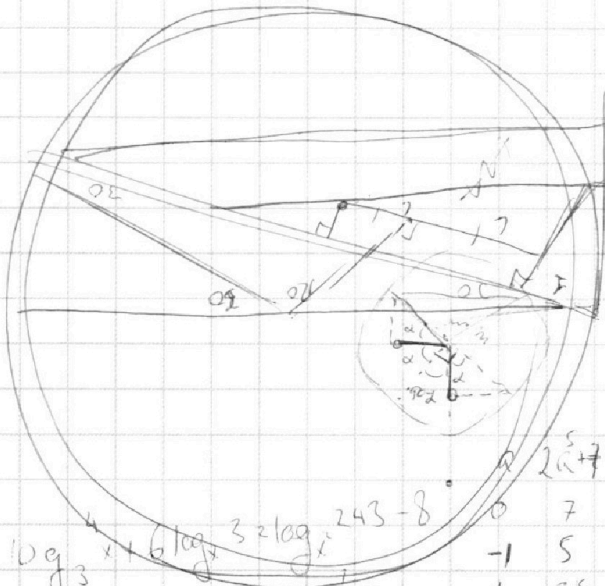
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

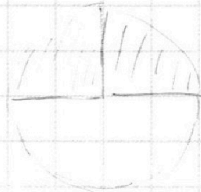
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

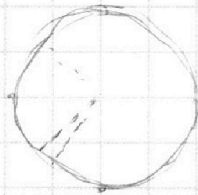


$$a^5 + b^5 = -8(a+b)$$



$$2(a^4 + 8) = -7$$

$$a(a^4 + 8) = -3,5$$

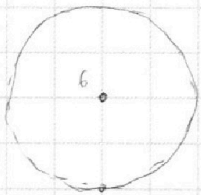
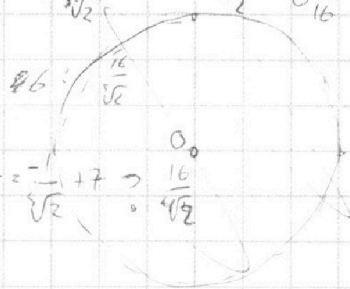


2	5	7	-16a
0	7	0	0
-1	5	16	

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3^2 243 - 8$$

$$(4+a)8 = -2(9+b)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$



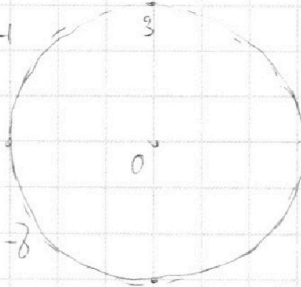
$$a \leq 12y - 3b \leq 0$$

$$-\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b = y$$

$$3(21 - 3^5) - 3(8 + 5^8)$$

$$3(21 - 3^5) - 3(8 + 5^8) = 3(21 - 1) - 3(8 + 5^8) = 3(20) - 3(8 + 5^8)$$

$$t = (8 + 5^8) \cdot 3$$



$$243 = 81 \cdot 3 = 3^5$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_3 3 = \log_3^2 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3^2 243 - 8$$

$$\frac{\ln^4 x}{\ln^4 3} + \frac{6 \ln x}{\ln 3} = \frac{\ln^2 243}{2 \ln 3} - 8$$

$$\frac{\ln^4 (5y)}{\ln^4 3} + \frac{2 \ln 3}{\ln (5y)} = \frac{\ln^2 3}{2 \ln 5y} - 8$$

$$\frac{1}{2} - 4 = (8 + 5^8) \cdot 4 + 2(1 + 2^4)$$

$$-2 = 2^1$$

$$2^5 - 8$$

$$2^5 - 31$$

$$2^5 + 1$$

$$-1 \cdot 2^6$$

$$2^5 - 31$$

$$-01 + 2 \leftarrow 2^5 - 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

будем считать сумму денег A и количество всевозможных
денег B .

замечим, что для m -го случая B будет \parallel^* OP

Число денег замечим, что мы можем выбрать деньги A ,

которые находятся под m -й $(9, 0)$. (и только $m, 1, 2$ и т.д. м.б. есть
иногда будет две
пом-ма, тогда $2 \cdot 10$)

Примем, для каждого случая A будет определенное кол-во денег B ,

а именно: $1 + 7 \cdot 2 = 15$ $(9 \cdot 3 + 1) = 420$

денег A мы можем выбрать $15 \cdot 420 = 6300$ вариантов.

того всего: ~~$420 \cdot 150 = 2250$~~ вариантов.
 $15 \cdot 420 = 6300$

или мы можем выбрать деньги B . B может принимать * $(N, 0)$
 $0 \leq N \leq 9$

т.е. мы должны рассмотреть варианты * $(N, 0)$ и $(N+1, 3, 0)$ если

еще * $(N, 1)$ и $(N, 2)$ ~~есть~~
 $(0 \leq N \leq 9)$.

так как * $(N, 0)$ мы можем выбрать 15 денег, $1, 2$.

$42 \equiv 0 \pmod 3$, а 15 , т.к. $\frac{42}{3} + 1 = 15$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin(\arcsin(\cos(x))) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))) = x + \frac{\pi}{2} \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2\pi = 6x + 2\pi k$$

$$x = \frac{2\pi + 2\pi k}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3} \text{ и } -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\sin(\pi - (\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2\pi = -4x + 2\pi k$$

$$x = \frac{-2\pi + 2\pi k}{4}$$

$$(\arcsin(x): [-1; 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}])$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



фракталы

наблюдим, но что значит $a^2 b^2 c^2 = 2^9 3^{10} 5^{10} = 2^{14} 3^{13} 5^{15} = 2^{18} 3^{18} 5^{30}$
 $= 2^{42} 3^{41} 5^3$

т.к. мы у нас НОД этих чисел 3 раза поделится $2^2 3^1 5^3$ на
 $(2^9 3^{10} 5^{10})^2 = 2^{18} 3^{21} 5^{20}$

будем предположить такие входы (a, b, c) , тогда получится $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$

$a^2 b^2 c^2 = (23, 23, 23)$
 $ac = (19, 18, 30)$ 2) $a b^2 c = (23, 23, 30) \Rightarrow \text{НННН}$

линейные тригонометрия

$a = (a_1, a_2, a_3)$
 $b = (b_1, b_2, b_3)$
 $c = (c_1, c_2, c_3)$
 $a_1 + b_1 \geq 9$
 $a_2 + b_2 \geq 10$
 $a_3 + b_3 \geq 10$
 $a_1 + c_1 \geq 19$
 $a_2 + c_2 \geq 18$
 $a_3 + c_3 \geq 30$
 $b_1 + c_1 \geq 14$
 $b_2 + c_2 \geq 13$
 $b_3 + c_3 \geq 13$

$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 9 & a_1 + b_1 = 9 \\ a_1 + c_1 \geq 19 & \Rightarrow a_1 + c_1 = 19 \\ b_1 + c_1 \geq 14 & b_1 + c_1 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 7 \\ b_1 = 2 \\ c_1 = 12 \end{cases}$

$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 10 & a_2 + b_2 = 10 \\ a_2 + c_2 \geq 18 & a_2 + c_2 = 18 \\ b_2 + c_2 \geq 13 & b_2 + c_2 = 13 \end{cases}$

$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 10 & a_3 + b_3 = 10 \\ a_3 + c_3 \geq 30 & a_3 + c_3 = 30 \\ b_3 + c_3 \geq 13 & b_3 + c_3 = 13 \end{cases}$

т.к. для максимизации суммы $a_2 + b_2 + c_2 = 30$ (НОД) идем по пути выбора, когда система данных не противоречит

стандально, т.к.
 $a_3 + b_3 + c_3 \geq \max(a_3 + b_3, a_3 + c_3, b_3 + c_3)$

$\Rightarrow \begin{cases} a_3 + b_3 + c_3 \geq 30 \\ a_3 + c_3 \geq 30 \\ a_3 = 15 \\ c_3 = 15 \\ b_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 10 \\ a_2 + c_2 \geq 18 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 7 \\ b_2 = 3 \\ c_2 = 11 \end{cases}$

$a_3 + c_3 + b_3 \geq \frac{30+30}{2} \geq 30$
 $a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{7+3+11}{1} = 21$
 $a_1 + b_1 + c_1 = 7+2+12 = 21$

2) $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$