



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

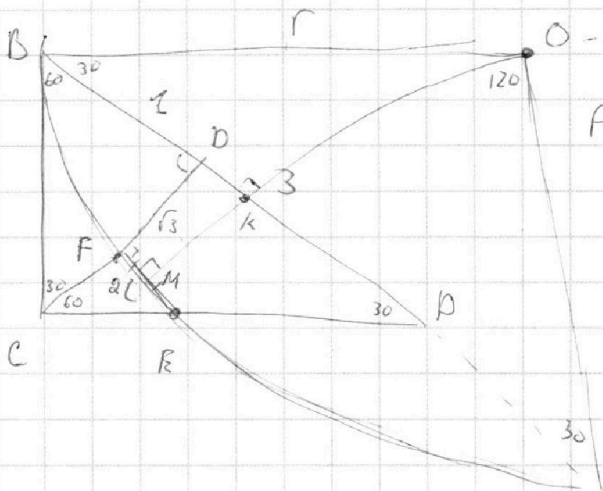
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ИУО $DB \perp I \Rightarrow CD \approx \sqrt{3 \cdot 1^2 + 3^2} \Rightarrow \angle DCB \approx 60^\circ \Rightarrow \angle A \approx 30^\circ \dots \angle OBA \approx 30^\circ$
 (т.к. радиус. Векторы $\sqrt{3}$ и 3) (1)

$FE = 2L$



O - центр окр.
 $FE \perp OK \Rightarrow OM \perp EF \Rightarrow EM = FM$

$DK = FM$, т.к. $FM \perp KO$ (т.к. $FM \perp KO$)

(1) $\Rightarrow BK = r \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow L = 4r \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2L}{\sqrt{3}} = \frac{2+2L}{\sqrt{3}}$

$(L+1)^2 + (\frac{r}{2})^2 = r^2 \Rightarrow L^2 + 2L + 1 + \frac{r^2}{4} = r^2 \Rightarrow L^2 + 2L + 1 = \frac{3}{4}r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{4L^2 + 8L + 4}{3}$

$FO^2 = r^2 = FM^2 + KO^2 \quad \left| \quad r^2 = L^2 + \left(\frac{r}{2} + \frac{3-2L}{\sqrt{3}}\right)^2 \right| \cdot 3$

$MO = \frac{r}{2} + \left(\sqrt{3} - \frac{2L}{3} \cdot \sqrt{3}\right) = \frac{r}{2} + \frac{3-2L}{\sqrt{3}}$
 $KO = (CD - \frac{FE}{DA} \cdot CD)$

$3 + 6L + 2L^2 = \left(\frac{1+L}{\sqrt{3}} + \frac{3-2L}{\sqrt{3}}\right)^2$

$9 + 18L + 6L^2 = (4-L)^2$

$9 + 18L + 6L^2 = 16 - 8L + L^2$

$5L^2 + 26L - 7 = 0$
 $D = 169 + 85 = 254$

$L = \frac{-13 \pm \sqrt{204}}{5} \Rightarrow L = \frac{-13 + \sqrt{204}}{5}$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{CA^2}{FE^2} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{3}{4}}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$
 (не подходит)

\Leftarrow

$3r^2 = 3(L^2 + (4-L)^2)$

$3r^2 = 16 - 8L + 4L^2$

$16 = 12 \Rightarrow L = \frac{3}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ x^2 + (y-6)^2 = 2^2 \end{cases}$$

поиск точек касания

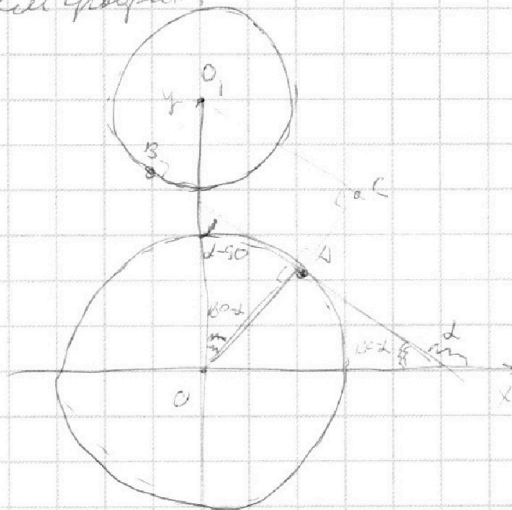
поиск точки касания, $\vec{O_1O}$ на секущую формулу, $\vec{O_1O}$ или формула

формула $-\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \geq y$

найти уравнение касательной

найти уравнение касательной

$$y = ax + b$$



AB -касательная, $OC \parallel BA$ $\Rightarrow AC \perp BO_1$ и BO_1, CO -высоты.

$$OO_1 = 6$$

$$OC = R_1 + R_2 = 3 + 2 = 5$$

$$BA = OC = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$$

$$\alpha = \text{tg}^{-1} \alpha = -\text{tg}(180 - \alpha) = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

найти уравнение касательной в силу условия

$$a = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{11}}{5} \leq \frac{-a}{2} \leq \frac{\sqrt{11}}{5} \Rightarrow \frac{2\sqrt{11}}{5} \geq a \geq \frac{-2\sqrt{11}}{5}$$

и формула

$$a \in \left(-i\omega^2; -\frac{2\sqrt{11}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{11}}{5}; +i\omega^2\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \frac{\ln^4 x}{\ln^4 3} + \frac{6 \ln 3}{\ln x} = \frac{\ln 3^5}{2 \ln x} - 8 \\ \frac{\ln^4 2}{\ln^4 3} + \frac{2 \ln 3}{\ln 2} = \frac{\ln 3^{11}}{2 \ln 2} - 8 \end{cases}$$

$$\text{пусть } L(x) = \log_3(x)$$

$$\text{где } z = 5y$$

$$\begin{cases} L^4 x + \frac{6}{Lx} = \frac{5}{2Lx} - 8 \\ L^4 z + \frac{2}{Lz} = \frac{11}{2Lz} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Lz = a \\ Lx = \frac{1}{4}a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8 \\ b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^5 + 47a = 5 - 16a \\ 2b^5 + 4b = 11 - 16b \end{cases} \begin{cases} 2a^5 + 7 = -16a \\ 2b^5 - 7 = -16b \end{cases} \begin{cases} \text{(возм. 0 и } \sqrt[5]{2} \text{)} \\ \rightarrow \text{Итого } \end{cases}$$

если t корень $2a^5 + 7 = -16a$, то

$-t$ - корень $2b^5 - 7 = -16b$

↓

$$a^5 + b^5 = -8(ab)$$

↑

$$a+b=0 \Rightarrow Lx + Lz = 0 \Rightarrow \log_3(x \cdot z) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3(x \cdot 5y) = 0 \Rightarrow x \cdot 5y = 1 \Rightarrow \boxed{x \cdot y = \frac{1}{5}}$$



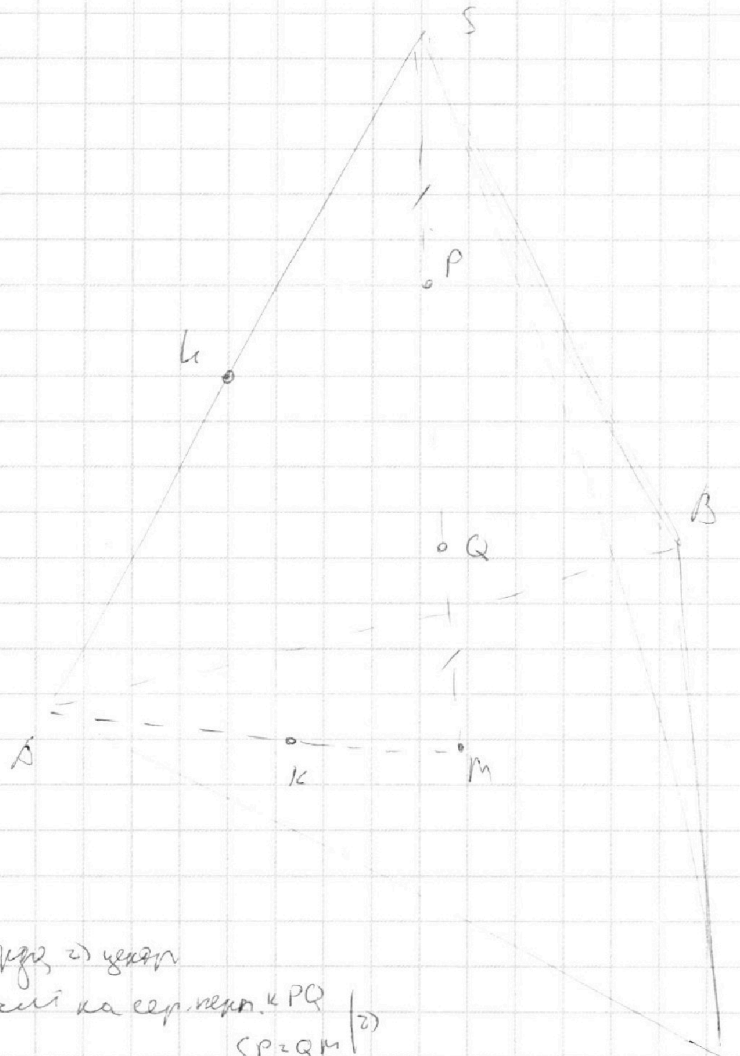
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



PQ - хорда \Rightarrow угол

Ω лежит на сер-перп. к PQ
 $SP = QM$ (2)

\Rightarrow на сер-перп. к SM .

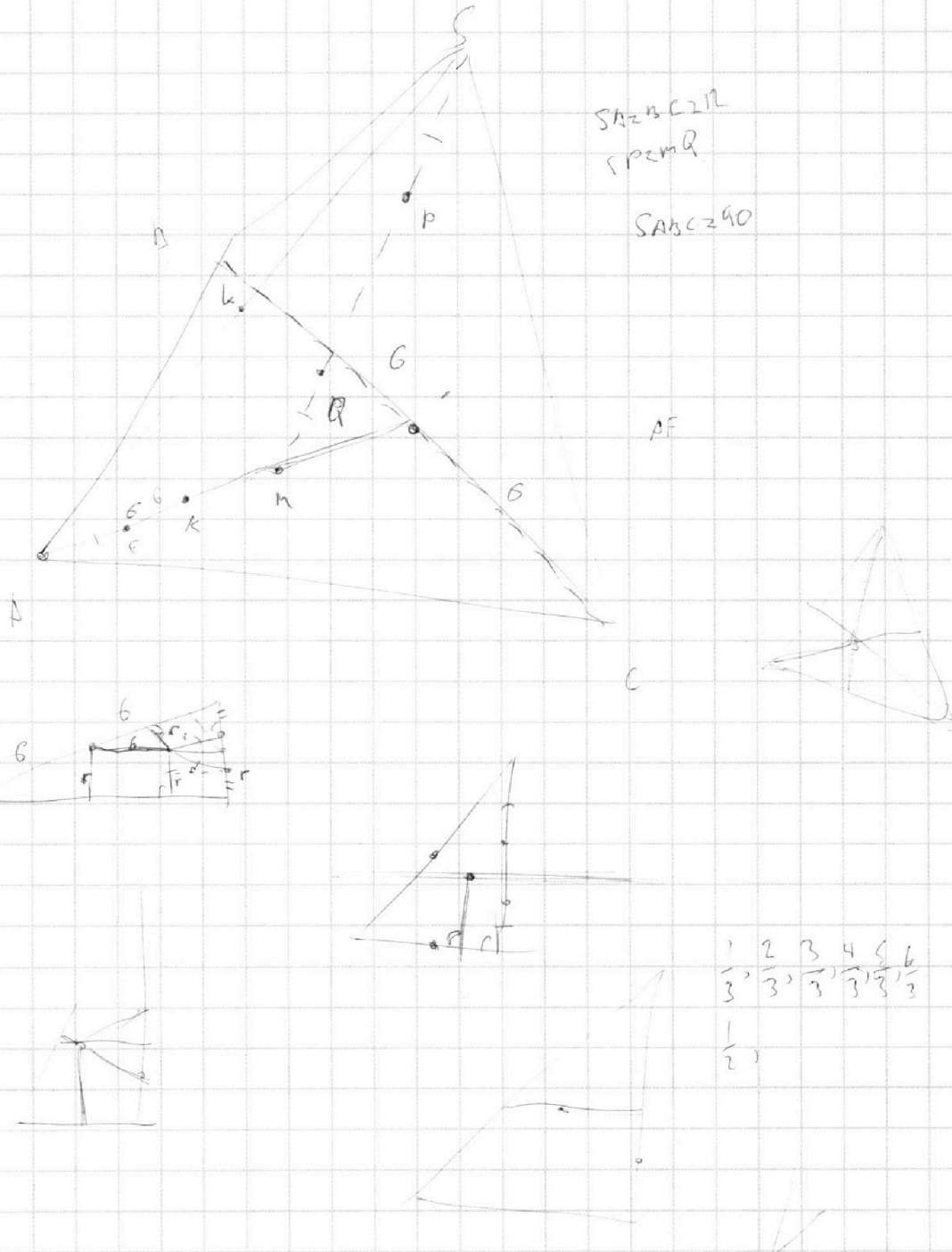
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

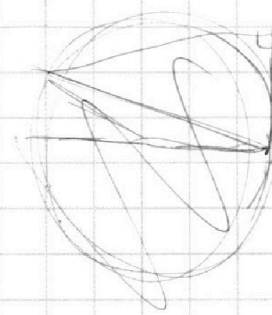
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$205 + 159 = 364$$



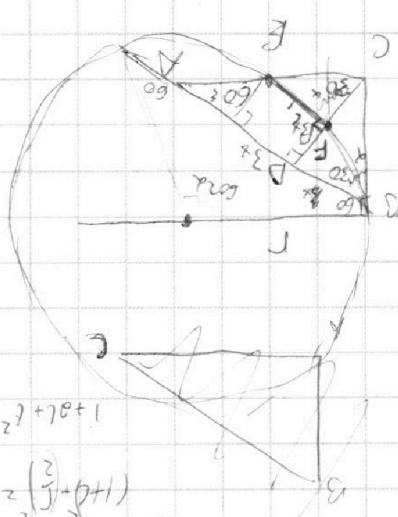
$$16 - 8\sqrt{3} + 2 = 9 + 18\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 = 3 + 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$

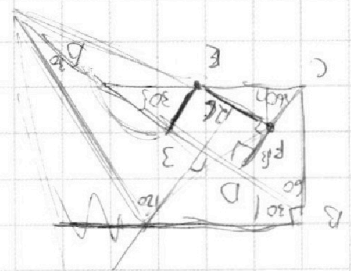
$$\left(2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$316\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 318\sqrt{3}$$

$$4\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



$$r^2 + 2r + \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)^2$$



$$\frac{225}{250} = \frac{9}{10}$$

$$1 + 2r + r^2 = \frac{3}{4}$$

$$r^2 + 2r + 1 = \frac{3}{4}$$

$$r = \frac{2}{3}$$

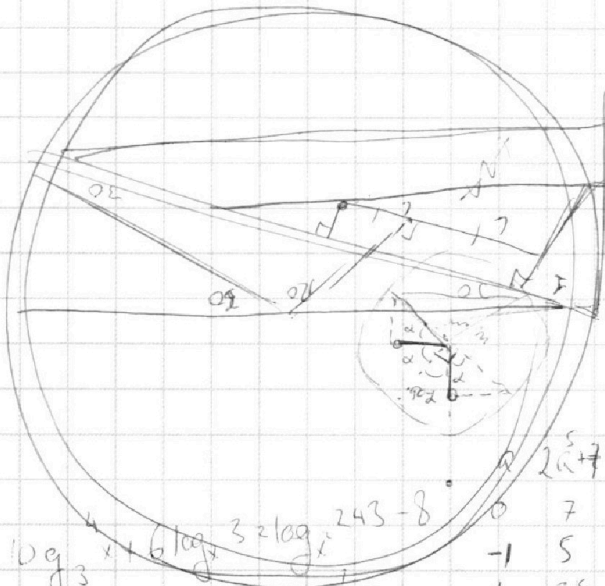
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

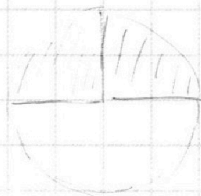
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

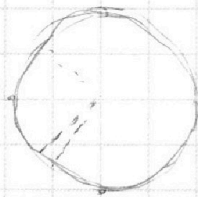


$$a^5 + b^5 = -8(a+b)$$



$$2(a^4 + 8) = -7$$

$$a(a^4 + 8) = -3,5$$

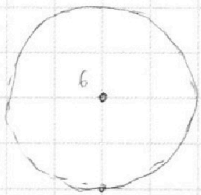
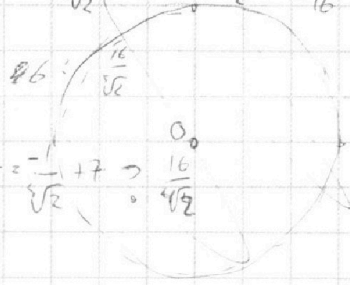


2	5	7	-16a
0	7	0	0
-1	5	16	

$$8x + 29y + 5z = kx + by$$

$$(4+a)z = 2q + b$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

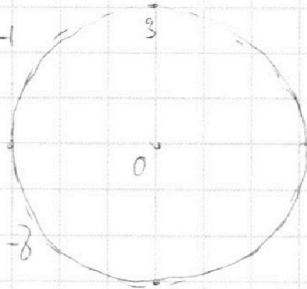


$$a_2 + 12y - 3b = 0$$

$$-\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b = y$$

$$3y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$t = (8+a)z$$



$$243 = 81 \cdot 3 = 3^5$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_3 y = \log_3 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 3 = \log_3 243 - 8$$

$$\frac{\ln^4 x}{\ln^4 3} + \frac{6 \ln 3}{\ln x} = \frac{\ln 243}{2 \ln x} - 8$$

$$\frac{\ln^4(5y)}{\ln^4 3} + \frac{2 \ln 3}{\ln(5y)} = \frac{\ln 3^5}{2 \ln 5y} - 8$$

$$2y - 8$$

$$-180$$

$$-21$$

$$-21$$

$$-21$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

будем считать сумму денег А и никакую сумму все возможные
денег В.

замечим, что сумма денег В будет $\equiv 0 \pmod{9}$

Также заметим, что мы можем выбрать сумму А,

которая поделится на 9 $(9, 0)$. (и только так, т.к. мы берем
только деньги без
ноль-ма, тогда $9 \cdot 10$)

Примем, что сумма денег А будет суммой денег к-то денег В,

а именно: $1 + 7 \cdot 2 = 15$ $(9 \cdot 3 + 1) = 420$

Сумму А мы можем выбрать $15 \cdot 420 = 6300$ вариантов.

Сумма денег: ~~$420 \cdot 15 = 6300$~~ 6300 вариантов.

или мы можем выбрать сумму В. Сумма денег $(N, 0)$
 $0 \leq N \leq 9$

т.е. мы должны рассмотреть варианты $(N, 0)$ и $(N+3, 0)$ если

еще варианты: $(N, 1)$ и $(N, 2)$ если
 $(0 \leq N \leq 9)$.

Так как сумма денег $(N, 0)$ мы можем выбрать 15 денег, т.к.

$42 \equiv 0 \pmod{3}$, а 15, т.к. $\frac{42}{3} + 1 = 15$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

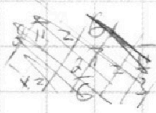


$$\sin(\arcsin(\cos(x))) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))) = x + \frac{\pi}{2} \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$



$$2\pi = 6x + 2\pi k$$

$$x = \frac{2\pi + 2\pi k}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3} \text{ и } -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\sin(\pi - (\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2\pi = -4x + 2\pi k$$

$$x = \frac{-2\pi + 2\pi k}{4}$$

$$(\arcsin(x): [-1; 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}])$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



фракталы

найдем, по чему делится $a^2 b^2 c^2$: $2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{15} = 2^{18} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$
 $= 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^3$

т.к. мы у нас НОД этих чисел 3 раза поделится $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3$ на
 $(2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10})^2 = 2^{18} \cdot 3^{20} \cdot 5^{20}$

будем предположить такие входы (a, b, c) , как поделится $2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$

$a^2 b^2 c^2 \equiv (23, 23, 23)$
 $ac \equiv (19, 18, 30)$
 $a^2 b^2 c^2 \equiv (23, 23, 30) \Rightarrow \text{HCF} = 1$

линейные тригонометрия

$a = (a_1, a_2, a_3)$
 $b = (b_1, b_2, b_3)$
 $c = (c_1, c_2, c_3)$
 \dots
 $\in \mathbb{N}$

$a_1 + b_1 \geq 9$
 $a_2 + b_2 \geq 10$
 $a_3 + b_3 \geq 10$
 $a_1 + c_1 \geq 19$
 $a_2 + c_2 \geq 18$
 $a_3 + c_3 \geq 30$
 $b_1 + c_1 \geq 14$
 $b_2 + c_2 \geq 13$
 $b_3 + c_3 \geq 13$

$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 9 & a_1 + b_1 = 9 \\ a_1 + c_1 \geq 19 & \Rightarrow a_1 + c_1 = 19 \\ b_1 + c_1 \geq 14 & b_1 + c_1 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 7 \\ b_1 = 2 \\ c_1 = 12 \end{cases}$

$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 10 & a_2 + b_2 = 10 \\ a_2 + c_2 \geq 18 & a_2 + c_2 = 18 \\ b_2 + c_2 \geq 13 & b_2 + c_2 = 13 \end{cases}$

$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 10 & a_3 + b_3 = 10 \\ a_3 + c_3 \geq 30 & a_3 + c_3 = 30 \\ b_3 + c_3 \geq 13 & b_3 + c_3 = 13 \end{cases}$

т.к. для максимизации суммы $a_2 + b_2 + c_2 = 30$ (НОД) идем по пути выбора, когда система данных не противоречива

$\Rightarrow \begin{cases} a_3 + b_3 + c_3 \geq 30 \\ a_3 + c_3 \geq 30 \\ a_3 = 15 \\ c_3 = 15 \\ b_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 10 \\ a_2 + c_2 \geq 18 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 7 \\ b_2 = 3 \\ c_2 = 11 \end{cases}$

стандартно, т.к. $a_3 + b_3 + c_3 \geq \max(a_3 + b_3, a_3 + c_3, b_3 + c_3)$

$a_3 + c_3 + b_3 \geq \frac{30+30}{2} \geq 30$
 $a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{7+3+11}{2} = 21$
 $a_1 + b_1 + c_1 = 7+2+12 = 21$

$\Rightarrow abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$