



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 ^{раскладываем разложение на простые множители:} Пусть $a = 2^{d_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\delta_1} \cdot p_1$, $b = 2^{d_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\delta_2} \cdot p_2$, $c = 2^{d_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\delta_3} \cdot p_3$

$d_1, d_2, d_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{Z}$ и ≥ 0 , $p_1, p_2, p_3 \notin \{2, 3, 5\}$ — остальные простые множители

$$ab = 2^{d_1+d_2} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2} \cdot 5^{\delta_1+\delta_2} \cdot p_1 \cdot p_2$$

$$ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} = \cancel{p_1 p_2}$$

$$(p_1 p_2, 2) = (p_1 p_2, 3) = (p_1 p_2, 5) = 1 \Rightarrow 2^{d_1+d_2} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2} \cdot 5^{\delta_1+\delta_2} : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$\text{НОД}(2, 3, 5) = 1 \Rightarrow 2^{d_1+d_2} : 2^6, 3^{\beta_1+\beta_2} : 3^{13}, 5^{\delta_1+\delta_2} : 5^{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1+d_2 \geq 6, \beta_1+\beta_2 \geq 13, \delta_1+\delta_2 \geq 11.$$

Аналогично из группы 2 условий получим, что

$$d_2+d_3 \geq 14, \beta_2+\beta_3 \geq 21, \delta_2+\delta_3 \geq 13$$

$$d_1+d_3 \geq 16, \beta_1+\beta_3 \geq 25, \delta_1+\delta_3 \geq 28$$

Присуммируем все неравенства для d : $2(d_1+d_2+d_3) \geq 6+14+16=36 \Rightarrow$

$$\text{для } \beta: 2(\beta_1+\beta_2+\beta_3) \geq 13+21+25=59 \Rightarrow \beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq \frac{59}{2} \Rightarrow \beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 30$$

$$\text{для } \delta: 2(\delta_1+\delta_2+\delta_3) \geq 11+13+28=52 \Rightarrow \delta_1+\delta_2+\delta_3 \geq 26. \text{ Но при этом } \delta_1+\delta_3 \geq 28 \text{ и } \delta_2 \geq 0 \Rightarrow \delta_1+\delta_2+\delta_3 \geq 28$$

$$\text{Тогда } abc = 2^{d_1+d_2+d_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\delta_1+\delta_2+\delta_3} \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$$

$$p_1 \geq 1, p_2 \geq 1, p_3 \geq 1 \Rightarrow p_1 p_2 p_3 \geq 1 \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

Пример для равенства: $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{11}$, $b = 2^2 \cdot 3^5$, $c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{17}$

$$\text{Тогда } ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{11} : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} = 3$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{17} : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} = 5^4$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} : 2^{11} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} = 2^5$$

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

Ответ: минимальное значение = $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть } \frac{S_{\triangle CDB}}{S_{\triangle ADC}} = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \quad (S_{\triangle CDB} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot DB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot AD \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot CD = \frac{5}{2} S_{\triangle ADC})$$

$$S_{\triangle CDB} = \frac{5}{2} S_{\triangle ADC}, \quad S_{\triangle CEF} = \frac{1}{4} S_{\triangle CDB} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} S_{\triangle ADC} = \frac{5}{8} S_{\triangle ADC}$$

$$\text{Пусть } S_{\triangle ADC} : S_{\triangle CEF} = 8 : 5$$

Ответ: 8:5

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

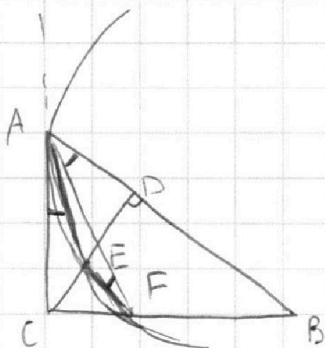
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2



$AB \parallel EF$. $\angle EFA = \angle CAE$, так как AC - касательная,
 $\angle EFA$ опирается на хорду EA (углы между хордой и касательной равны углу, опирающемуся на эту хорду)

$\angle EFA = \angle FAB$, так как это накрест лежащие углы при секущей FA параллельных прямых EF и AB .

А это если $\angle CAE = \angle FAB$

Обозначим $\angle CAB$ за α .

Тогда $\angle ABC = \angle ACD = 90^\circ - \alpha$ (из прямоугольного $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$)

Тогда $\triangle AEC \sim \triangle AFB$ по 2 углам

($\angle CAE = \angle FAB = \angle FAB$, $\angle ECA = \angle DCB = 90^\circ - \alpha = \angle FBA = \angle CBA$)

Тогда $\frac{AE}{AF} = \frac{EC}{FB} = \frac{CA}{BA} = \cos \alpha$ (отношение прилежащего катета к гипотенузу)

$\angle DCB = 90^\circ - \angle DCA = \alpha = \angle ECF$ ($E \in CD$, $F \in CB$)

Тогда $\angle CEF = \angle CDB = 90^\circ$, так как $EF \parallel AB$, CD - секущая

Значит $\frac{CE}{CF} = \cos \alpha$ - отношение прилежащего катета к гипотенузу \rightarrow

$$\Rightarrow \frac{CE}{CF} = \cos \alpha = \frac{CE}{BF} \quad (CE \neq 0) \Rightarrow CF = BF$$

(так как CA - касательная, то A - единственная точка пересечения (CA) и окружности $\rightarrow E \notin (CA)$)

$$\text{Тогда } \frac{CE}{BC} = \frac{CF}{CF+BF} = \frac{CF}{2CF} = \frac{1}{2}$$

$\triangle CEF \sim \triangle CDB$ ($\angle FCE = \angle BCD$ - общий, $\angle CEF = \angle CDB = 90^\circ$) $K = \frac{FC}{BC} = \frac{1}{2}$.

$$\text{Тогда } \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CDB}} = K^2 = \frac{1}{4} \quad | \quad S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} CD \cdot \frac{1}{2} BD = \frac{1}{4} S_{\triangle CDB}$$

$\triangle CDB \sim \triangle ADC$ ($\angle CDB = \angle ADC = 90^\circ$, $\angle BCD = \alpha = \angle CAD$, по 2 углам)

С коэффициентом подобия $= \frac{DB}{DC}$. Также из подобия следует, что $\frac{CD}{DB} = \frac{AD}{DC}$

$$AB : BD = 1,4 = \frac{7}{5} \Rightarrow BD = \frac{5}{7} AB \Rightarrow AD = AB - BD = \frac{2}{7} AB$$

$$CD^2 = BD \cdot AD$$

$$CD^2 = BD \cdot AD = \frac{10}{49} AB^2 \Rightarrow CD = \frac{\sqrt{10}}{7} AB. \quad \text{Тогда } \frac{BD}{CD} = \frac{\frac{5}{7} AB}{\frac{\sqrt{10}}{7} AB} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$n^3 \quad 10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$0 \leq x < 2\pi, \quad -1 \leq \sin x \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right). \quad \text{Тогда } \arccos(\sin x) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$$

$$10 \arccos(\sin x) = 10 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \quad \text{--- ~~аргументы~~ ---}$$

(arccos определен на интервале $[0, \pi]$)

$$\text{--- ~~аргументы~~ ---} \quad \text{--- ~~аргументы~~ ---} \quad \text{--- ~~аргументы~~ ---}$$

$$\Leftrightarrow 10 \left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \leq \pi \quad \text{--- множество значений arccos ---}$$

$$5\pi - 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x$$

$$8x = -4\pi + 20\pi k \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k$$

$$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k = \pi - \frac{5}{2}\pi k + 2\pi k = \pi - \frac{1}{2}\pi k$$

$$0 \leq \pi - \frac{1}{2}\pi k \leq \pi \Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{2}k \leq 1$$

$$1) \quad 1 - \frac{1}{2}k \geq 0 \quad \frac{1}{2}k \leq 1 \quad k \leq 2$$

$$2) \quad 1 - \frac{1}{2}k \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}k \leq 0 \Rightarrow k \geq 0$$

Поэтому возможны $k = 0, 1$ и 2

$$x_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_2 = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} = 2\pi, \quad x_3 = -\frac{\pi}{2} + 5\pi = \frac{9\pi}{2}$$

$$\text{Проверка: } 10 \arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 10 \arccos(-1) = 10\pi = 9\pi - 2\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$10 \arccos(\sin 2\pi) = 10 \arccos 0 = 10 \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi = 9\pi - 2 \cdot 2\pi$$

$$10 \arccos\left(\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)\right) = 10 \arccos(1) = 0 = 9\pi - 2 \cdot \frac{9\pi}{2}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_2 = 2\pi, \quad x_3 = \frac{9\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Смешанная парабола вниз - вверх.

По условию $-\frac{7\sqrt{2}}{8} \leq -\frac{5}{5a} \leq \frac{7\sqrt{2}}{8}$, т.к. 4 корня не будет

$$1) -\frac{7\sqrt{2}}{8} \leq -\frac{5}{5a}$$

$$\frac{7\sqrt{2}}{8} \cdot 3a \geq 5$$

$$a \geq \frac{20}{2+5\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{21}$$

$$2) -\frac{5}{5a} \leq \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

$$-5 \leq \frac{7\sqrt{2}}{4} \cdot 3a$$

$$a \geq \frac{-20}{2+5\sqrt{2}} = \frac{-10\sqrt{2}}{21}$$

Пересечение: $a \geq \frac{10\sqrt{2}}{21}$

Тогда 4 корня при $a < \frac{10\sqrt{2}}{21}$. $a = 0$ бесконечное количество.

Ответ: $a < \frac{10\sqrt{2}}{21}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases} \quad 4 \text{ корня}$$

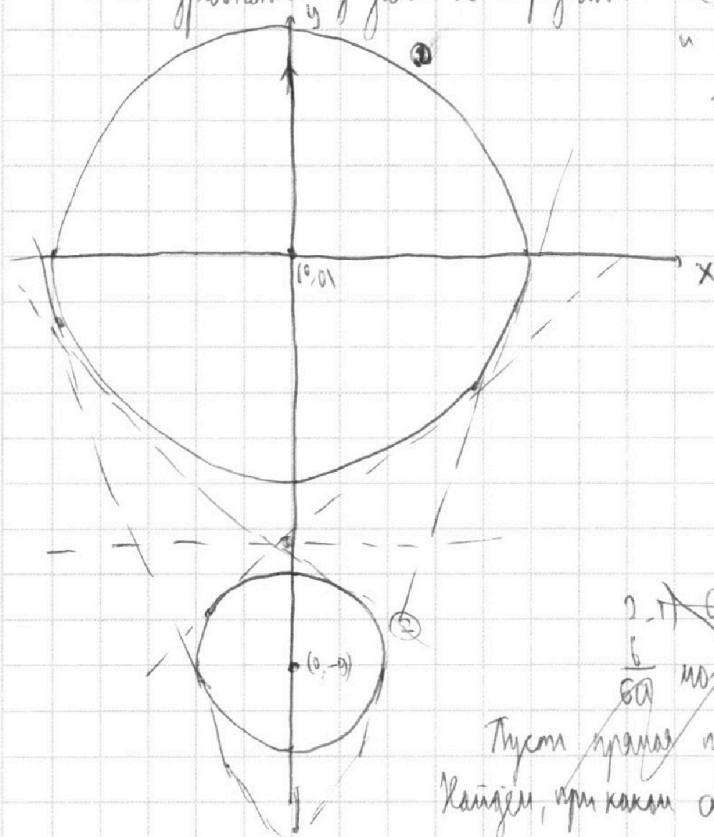
Распишем второе уравнение. Произведение = 0 (\Rightarrow одна из скобок = 0)

То есть либо $x^2 + y^2 = 25$, либо $x^2 + y^2 + 18y + 77 = x^2 + (y+9)^2 - 4 = 0$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$

Эти 2 уравнения задают 2 окружности: ① с центром в $(0,0)$ и $r=5$

и ② с центром в $(0,-9)$ и $r=2$



Уравнение $5x + 6ay - b = 0$ задаёт прямую.

Выберём 2 случая:

1) $a=0$ $5x - b = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{5}$

вертикальная прямая

возьмём $b=0$

прямая $x=0$ пересечёт окружности

4 раза = 2 точки и корня \checkmark

2) $a \neq 0$ $y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$

~~2.1) $a < 0$ $-\frac{5}{6a} > 0$ — угол наклона прямой $\frac{b}{6a}$ может подстроится в зависимости от a .~~

~~Пусть прямая проходит через $(0, -7)$, то есть $\frac{b}{6a} = -7$~~

~~Каждый, при каком a она будет касательной к ①~~

$$x^2 + \left(-\frac{5}{6a}x - 7\right)^2 = x^2 + \frac{25}{36a^2}x^2 + \frac{35}{3a}x + 49 = 25$$

$$(36a^2 + 25)x^2 + 420ax + 864 = 0 \quad \text{имеет } D=0$$

$$\frac{D}{4} = 210^2 \cdot a^2 - 864(36a^2 + 25) = 0$$

$$a^2 = \frac{210^2 \cdot 25 - 864 \cdot 36}{35^2 - 864} = \frac{25 \cdot 24}{35^2 - 864} = \frac{25 \cdot 24}{361}$$

$$a = \pm \frac{10\sqrt{6}}{19} \quad \text{Если } a^2 > \frac{600}{361}, \text{ то есть } -a < -\frac{10\sqrt{6}}{19}, \text{ то}$$

будет 2 точки пересечения

Заметим, что если $b < -7$, то точек пересечения с второй окружностью имеет только одна.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

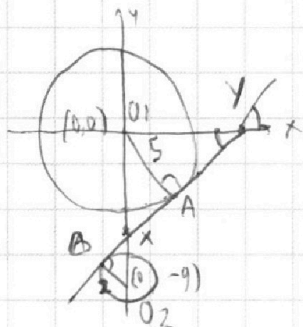
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



У 2 окружностей может быть максимум 4 общие касательные: 2 "внутренние" и 2 "внешние". Давайте их для данных окружностей



A, B - точки касания, $\triangle O_1AX \sim \triangle O_2BX \Rightarrow \frac{O_1X}{O_2X} = \frac{5}{2} = \frac{O_1A}{O_2B}$
 $O_1O_2 = 9, O_1X = \frac{5}{2} O_2X = \frac{45}{2} \quad (X = AB \cap OY)$

Пусть если X имеет координаты $(0, -\frac{45}{7})$

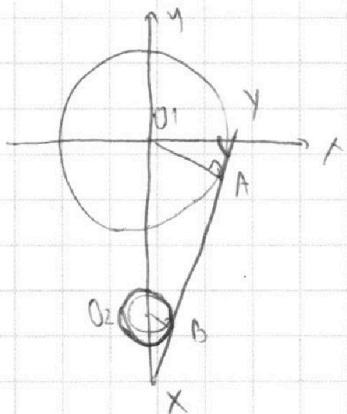
$\cos \angle AO_1X = \frac{AO_1}{O_1X} = \frac{5}{\frac{45}{2}} = \frac{2}{9} \quad y = AB \cap OX$

$\sin \angle O_1YA = \cos \angle AO_1X = \frac{2}{9}, \cos \angle O_1YA = \sqrt{1 - \frac{4}{81}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\tan \angle O_1YA = \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$ - угол наклона прямой

Прямая уравнение

$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{8}x - \frac{45}{7}$



$\triangle O_1AX \sim \triangle O_2BX, \text{ с } k = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{5}{2}$

$\frac{O_1X}{O_2X} = \frac{5}{2}$

$O_1X = O_1O_2 + O_2X = 9 + O_2X = \frac{5}{2}O_2X \Rightarrow O_2X = 6$

$O_1X = 15 \quad X(0, -15)$

$\sin \angle O_1XA = \frac{O_1A}{O_1X} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = \cos \angle O_1YX$

$\sin \angle O_1YX = \frac{1}{3}$

$\sin \angle O_1YX = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan \angle O_1YX = 2\sqrt{2}$ - угол наклона прямой

$y_2 = 2\sqrt{2}x - 15$

Две другие касательные получаются симметрией относительно OY (так как обе окружности симметричны):

$y_3 = -\frac{\sqrt{2}}{8}x - \frac{45}{7}, \quad y_4 = -2\sqrt{2}x - 15$

Если угол наклона прямой меньше, чем $\frac{\sqrt{2}}{8}$, то как бы мы были расположились правее, она не пересечет обе окружности по 2 точкам.

Аналогично, если угол меньше 0 и больше $-\frac{\sqrt{2}}{8}$, то тоже не будет 4 корней. Другие касательные не выписаны, так как мы только начали, но если

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5} \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{21} - 5 \quad \text{ОДЗ: } x > 0, x \neq 1$$

$$\log_x 11 = \frac{1}{\log_{11} x}, \quad \log_{x^3} \frac{1}{21} = -\frac{2}{3} \log_x 11 \quad (\text{выделим степень}) = -\frac{2}{3} \frac{1}{\log_{11} x}$$

Обозначим $\log_{11} x$ за t . $t \neq 0$ ($x \neq 1$)

Тогда уравнение примет следующий вид:

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{t} - 5$$

$$t^4 - \frac{16}{3t} + 5 = 0 \quad | \cdot 3t$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

Аналогично для y :

обозначим $\frac{1}{2} y$ за z .

$$\log z 11 = \frac{1}{\log_{11} z}, \quad \log_{0,125z^3} (11^{-13}) =$$

$$= \log z (11^{-13}) = -\frac{13}{3} \log z 11$$

Обозначим $\log_{11} z$ за m . $m \neq 0$

$$m^4 + \frac{1}{m} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{m} - 5 \Rightarrow m^4 + \frac{16}{3m} + 5 = 0 \quad | \cdot 3m$$

$$3m^5 + 15m + 16 = 0$$

Сумма:

$$3t^5 + 3m^5 + 15t + 15m = 0 \quad t^5 + m^5 + 5(m+t) = 0$$

$$m^5 + t^5 = (m+t)(m^4 - m^3t + m^2t^2 - mt^3 + t^4)$$

$$\text{Тогда } (m+t)(m^4 - m^3t + m^2t^2 - mt^3 + t^4 + 5) = 0$$

Знак $m^5 + t^5$ определяется знаком $m+t$

$$(m+t < 0 \Rightarrow m < -t \Rightarrow m^5 < -t^5 \Rightarrow m^5 + t^5 < 0$$

$$\text{Тогда } (m^4 - m^3t + m^2t^2 - mt^3 + t^4) \geq 0$$

$$(m+t > 0 \Rightarrow m > -t \Rightarrow m^5 > -t^5 \Rightarrow m^5 + t^5 > 0$$

$$m^4 - m^3t + m^2t^2 - mt^3 + t^4 + 5 > 0.$$

Тогда, раз произведение равно 0 и вторая скобка > 0 , то $m+t=0$

$$m = -t \Rightarrow \log_{11} \frac{1}{2} y = -\log_{11} x \Rightarrow \frac{1}{2} y = \frac{1}{x} \Rightarrow \underline{xy = 2}$$

(логарифм по основанию 11)

Ответ: $xy = 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



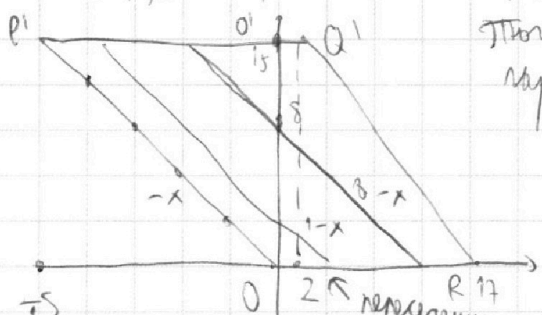
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кола недопустима!

№6 $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ $y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$.

$6(x_2 - x_1) : 6, 48 : 6 \Rightarrow y_2 - y_1 \in 6$ $y_2 - y_1 = 6k = 6z_2 - 6z_1$

Тогда $x_2 - x_1 + k = 8 = x_2 - x_1 + z_2 - z_1 = 8 = (x_2 + z_2) - (x_1 + z_1)$

При этом каждая пара (z_1, z_2) задает пару (y_1, y_2) . И, так как $0 \leq y_1, y_2 \leq 90$, то $0 \leq z_1, z_2 \leq 15$



Тогда $(x_1, z_1), (x_2, z_2)$ лежат в одном параллелограмме $O(0,0), P(-15,15), Q(2,15), R(17,0)$.

$R(17,0)$. $OP' \parallel y = -x$
 $(P', O) \in$ той же прямой

$\angle(Ox, OP') = 135^\circ$
 (по направлению прямой)

2 пересечения
 2 точки: от $y = -x$ до $17 - x$
 и от $y = 0$ до $y = 15$

~~или~~ ~~или~~ ~~или~~
 $x_1 + z_1 = 0 \Rightarrow x_2 + z_2 = 8$

А если (x_2, z_2) лежат на прямой $y = 8 - x$,

каждая проходит через 16 точек с целыми координатами, так как параллельна стороне ромба OP' (или OP' лежит на $(0,0), (-1,1), \dots, (-15,15)$)

$x_1 + z_1 = 0$ 16 различных точек на прямой $y = -x$, заданной стороной OP'
 $16 \cdot 16 = 256$

2) $x_1 + z_1 = 1$ на прямой $y = 1 - x$, также параллельна стороне параллелограмма пересекающая в 16 точек $(1,0), \dots, (-14,15)$

$x_2 + z_2 = 7$ $-11 - 11 -$
 лежат внутри ромба

10) $x_1 + z_1 = 9 \Rightarrow x_2 + z_2 = 17$ ~~или~~ ~~или~~ ~~или~~ 256 точек $y = 9 - x$ и $y = 17 - x$ пересекают в 16 точек $(-11, -11), \dots, (14, 2)$

11) $x_1 + z_1 < 0$ - эта прямая не пересекает параллелограмм, так как параллельна стороне параллелограмма, но лежит вне "точек" (пересечение с осью абсцисс в точке $x < 0$)

12) $x_1 + z_1 > 9 \Rightarrow x_2 + z_2 > 17$, нет пересечения с параллелограмм (пересечение с осью абсцисс правее R)

Тогда всего пар точек 2560 из первых 10 случаев
 $A'(x_1, z_1)$ задает $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ \Rightarrow и всего 2560 пар.
 $B'(x_2, z_2)$

Ответ: 2560

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab: 2^6 3^{13} 5^{11}$, $bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13}$, $ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28}$
 $abc = 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

$2+\beta \geq 6$ $\beta + \gamma \geq 14$
 $\alpha + \gamma \geq 16$
 $2\alpha + 2\beta + 2\gamma \geq 36$
 $\alpha = 4$ $\beta = 2$ $\gamma = 12$

$\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5}$
 $BD = \frac{5}{7} AB$
 $25 - 24 = 1$
 $26(35^2 - 24 \cdot 36) = 12^2 \cdot 6$
 $24 \cdot 1$
 144
 72
 86
 $10 \arccos(\sin X)$
 $\sin X = \cos(\frac{\pi}{2} - X)$
 $10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - X)) = 5\pi - 10X = 9\pi - 2X$
 $4X = -8X$
 $X = -\frac{\pi}{2}$

$\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$
 $\arccos(-1) = \pi$
 $x^2 - \frac{25}{36a^2}x + \frac{10b}{36a^2} + x^2 = 0$
 $x = \frac{1}{5}$
 $x = \frac{1}{5}, 0$

$5x + 6ay - b = 0$
 $(x^2 + y^2 = 25)$ $(x^2 + (y+9)^2 = 4)$
 $ay = b - 5x$
 $y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$
 $x = \frac{1}{5}$
 $(0, \frac{b}{6a})$

$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11}^2 x = \log_3 3$
 $\log_{11}^4 \frac{1}{2} y + \log_{11}^2 \frac{1}{2} y = \log_{11}^2 \frac{1}{5} y^3$
 $t^4 - 6t^2 = -2$
 $t^2 - 3 = -1$
 $t^2 = 2$
 $t = \sqrt{2}$
 $\log_{11}^2 5 = \frac{1}{2}$
 $SP = MQ \Rightarrow SA = MP$
 $SA = PC = 20$
 $72 = 89 = 1627$
 $6 \cdot 2 \cdot 3$
 $12 \sqrt{3}$
 $35 \sqrt{3}$
 36

$6ax^2 + 35x + 22a = 0$
 $D = 35^2 - 6 \cdot 22a^2$
 $a = \frac{\sqrt{35^2 - 132a^2}}{12}$
 $(0, \pi/7)$
 $\frac{1}{ca} = -7$
 $b = -42a$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

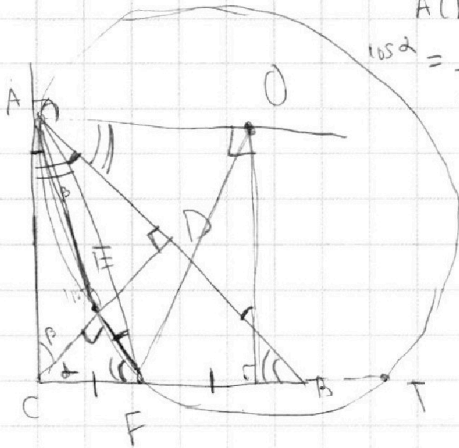
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\triangle ACE \sim \triangle ABF$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BF} = \frac{EA}{AF}$$

$$CD \cdot AB = AC \cdot BC$$

$$\triangle CDB \sim \triangle ADC$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{DC}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle CBD$$

$$\frac{BC}{CA} = \frac{CD}{CB}$$

$$\cos \alpha = \frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{2}{3} AC = AD \cdot AB = AC^2$$

$$AB = AC \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{14}}{7} AB$$

$$BC = -6 + \frac{2}{3} = -\frac{16}{3}$$

$$CD \cdot AC = BC \cdot AD$$

$$CD \cdot AC = \frac{\sqrt{14}}{7} AD \cdot AB$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{14}}{7} \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{CE}{CF} = \frac{CE}{BF}$$

$$1 - x_2 + x_1 - x_1 + z_2 = z_1$$

$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$-17 \leq x_2 - x_1 \leq 17$$

$$-90 \leq y_2 - y_1 \leq 90$$

$$6t + z = 48$$

$$z : 6$$

$$ct + ck = 48$$

$$t + k = 8$$

$$x_1 = 0$$

$$-15$$

$$10\pi = 9\pi$$

$$\arccos(-1) = \pi$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$0 < \arccos x < \pi$$

$$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$$

$$5\pi - 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x$$

$$8x = -4\pi + 20\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{4}\pi k$$

$$11 \quad 17$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{5}{4}\pi k$$

$$0 < \pi - \frac{5}{4}\pi k < \pi$$

$$1 - \frac{5}{4}k > 0$$

$$\frac{5}{4}k < 1$$

$$k < \frac{4}{5}$$

$$\frac{5}{4}\pi k > 0$$

$$k > 0$$

$$\log_{11} \frac{1}{x} + \log_{11} x = \log_{11} \frac{1}{x} + \log_{11} x = 0$$

$$1 - 6 = -\frac{2}{3} - 5 \quad 32 - 3$$

$$x_2 + z_2 = 6 \quad -\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}y = z \quad 7 \quad 5$$

$$\frac{1}{3}y^3$$

$$m^4 + \frac{1}{m} = -39 \cdot \frac{1}{m} - 5 \cdot \frac{1}{m} = -\frac{44}{m}$$

$$5^2 + 16^2 = \frac{-6}{\log_{11} x}$$

$$m^5 - 5m + 40 = 0$$

$$m^4 + \frac{40}{m} - 5 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

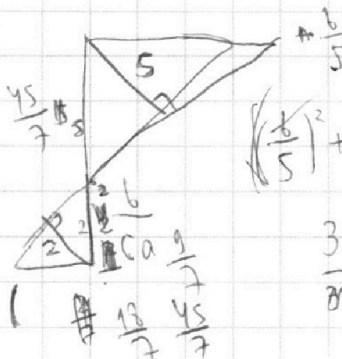
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left(\frac{b}{5}\right)^2 + \frac{b^2}{36a^2} = 25 = \frac{b^2}{5} \cdot \frac{b}{6a}$$

$$\frac{36a^2 + 5}{36} \cdot 5 = \frac{b^2}{30a}$$

$$210a^2 + 25 = 6b^2$$

$$1050a^2 + 125 = 6b^2$$

$$1175 = 6b^2$$

$$\frac{1175}{6} = b^2$$

$$\frac{40 \cdot 20}{42 \sqrt{2}} = \frac{20 \sqrt{2}}{42}$$

$$-g = -\frac{5}{6a} \times -\frac{b}{6a}$$

$$5x + 6 = 54a$$

$$x = \frac{54a}{5} - \frac{6}{5}$$

$$\left(0, \frac{b}{6a}\right)$$

$$\left(\frac{54a}{5} - \frac{6}{5}, -g\right)$$

$$\frac{b}{6a} = -\frac{45}{7}$$

$$b = -\frac{230}{7}a$$

$$a = 1$$

$$-\frac{5}{6a} = -\frac{5}{6}$$

$m \neq$
 max/min found
 $m \leftarrow x$

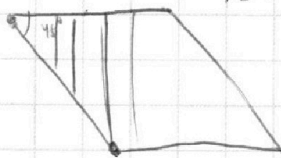
$$\frac{m^5 + 5}{m^4 + 1} \Big/ m + 1$$

$$\frac{m^5 + m^4 + 5 - m^4}{m^4 + 1} = m + \frac{m^2 + 2}{m^4 + 1}$$

$$\frac{m^2 + 2}{m^4 + 1} = \frac{m^2 + 2}{m^2(m^2 + 1)}$$

$$\frac{m^2 + 2}{m^2 + 1} = \frac{m^2 + 1 + 1}{m^2 + 1} = 1 + \frac{1}{m^2 + 1}$$

$(-15, 15)$



$$x_2 - x_1 = 0$$

$$z_2 - z_1 = 8$$

$$z_1 = 0 \rightarrow 7$$

$$x_2 - x_1$$

$$15 \leq z_2 - z_1 \leq 15$$