



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-15; 90)$, $Q(2; 90)$ и $R(17; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8. ———

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача № 1:

$$ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

Обозначим за $v_k(n)$ - степень

входящего числа k в n .

$$(т.е. $v_2(2^3 \cdot 5^2) = 3$)$$

\Rightarrow Тогда $v_k(m \cdot n) = v_k(m) + v_k(n)$, т.к. степени при перемножении складываются.

$$\Rightarrow v_2(ab) \geq 6, \text{ т.к. } ab: 2^6$$

$$v_2(bc) \geq 14, \text{ т.к. } bc: 2^{14}$$

$$v_2(ac) \geq 16, \text{ т.к. } ac: 2^{16}$$

$$\Rightarrow v_2(a) + v_2(b) \geq 6$$

$$+ v_2(b) + v_2(c) \geq 14$$

$$+ v_2(a) + v_2(c) \geq 16$$

$$2(v_2(a) + v_2(b) + v_2(c)) \geq 6 + 14 + 16 = 36$$

$$\Rightarrow v_2(abc) \geq \frac{36}{2} = 18$$

Аналогично для делителя 5:

$$v_5(ab) \geq 11$$

$$v_5(ac) \geq 28$$

$$v_5(bc) \geq 13$$

$$\Rightarrow v_5(abc) \geq \frac{11 + 28 + 13}{2} = 26, \text{ однако}$$

$$v_5(ac) \geq 28 \Rightarrow v_5(abc) \geq 28, \text{ т.к. } abc: ac$$

Аналогично для делителя 3:

$$v_3(ab) \geq 13$$

$$v_3(bc) \geq 21$$

$$v_3(ac) \geq 25$$

$$\Rightarrow v_3(abc) \geq \frac{13 + 21 + 25}{2} \geq \frac{59}{2} \geq 29,5$$

$$\Rightarrow v_3(abc) \geq 30, \text{ т.к. } abc \in \mathbb{N}$$

(натуральное)

Из всех 3 неравенств на $v_{2,3,5}(abc)$:

$$\Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

Пример:

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$$

$$\Rightarrow ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14}$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

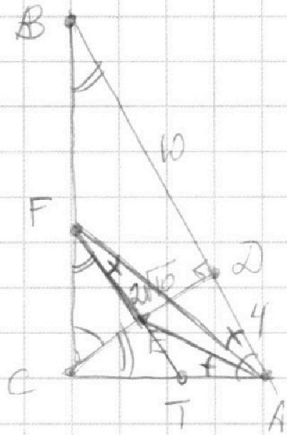
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2



$AB:BD = 1,4$, Заметим, что мы можем ^{в k раз} изменить масштаб картинки и от-
 кающиеся площади не измен., т.к. \angle из
 них увел. в k^2 раз. \Rightarrow Пусть $BD = 10$
 $AD = 4$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{14}{10} = 1,4.$$

\Rightarrow из подобия $\triangle BDC$ и $\triangle CDA$ (по двум углам)
 90° и $\angle 1 = \angle 2$
 и $\angle BDC = \angle DAC$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{DC}{DA} \Rightarrow DC^2 = BD \cdot DA = 40$$

$$\Rightarrow DC = 2\sqrt{10}$$

$$AC^2 = 16 + 40 = 56 \Rightarrow AC = 2\sqrt{14}$$

$$BC^2 = 100 + 40 = 140 \Rightarrow BC = 2\sqrt{35}$$

$$\begin{aligned} (*) S(ACD) &= \frac{CD \cdot DA \cdot \frac{1}{2}}{S(CEF)} = \frac{CD \cdot DA \cdot \frac{1}{2}}{CE \cdot EF \cdot \frac{1}{2}} = \frac{DA}{BD \cdot k(1-k)} \\ (**) &= \frac{4}{10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{16}{10} = 1,6 \end{aligned}$$

Так как AC касательная к окружности $FEA \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAE = \angle EFA$, также $\angle EFA = \angle FAB$ из $FE \parallel AB$

Пусть $\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB} = k \Rightarrow BF = CB - k \cdot CB = CB(1-k)$ (*)
 $CE = CD(1-k)$
 ~~$FE = k \cdot BD$~~ $FE = k \cdot BD$

Продлим FE до пересечения с AC : T ($FE \cap AC = T$)

\Rightarrow ~~$DA(1-k)$~~ ; ~~$AD(1-k)$~~ $TE = DA \cdot k$; $TF = BA \cdot k$
 $TA = CA(1-k)$

$TE \cdot TF = TA^2$ (степеней 1) T отн. (FEA) .

$$\Rightarrow DA \cdot BA \cdot k^2 = CA^2(1-k)^2$$

$$\Rightarrow \frac{4 \cdot 14}{4 \cdot 14} = \frac{(1-k)^2}{k^2} \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = k^2 \Rightarrow k = \frac{1}{2} (**)$$

Ответ: 1,6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Задача 1~~ Задача 3:

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

Поскольку $\arccos(\cdot)$ возвращает значения от 0 до $\pi \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$\Rightarrow 9\pi - 2x \leq 10\pi \Rightarrow -\pi \leq 2x \Rightarrow x \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$9\pi - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{9\pi}{2} = 4,5\pi$$

$$10 \arccos(\sin x) = 10 \arccos\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\text{Или тогда } -4\pi \leq -x + \frac{\pi}{2} \leq \pi$$

\Rightarrow Чтобы раскрыть $\arccos(\cdot)$ $\neq 5$ случаев:

$$1) 0 \leq -x + \frac{\pi}{2} \leq \pi \Rightarrow 10 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 5\pi - 10x$$

$$= 5\pi - 10x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x \Rightarrow -4\pi = 8x \Rightarrow$$

$$x = -\frac{4\pi}{8} = -\frac{\pi}{2}$$

и действительно $0 \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \leq \pi$

$$2) -\pi \leq -x + \frac{\pi}{2} \leq 0 \Rightarrow 10 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 10\left(\frac{\pi}{2} - x + \pi\right) =$$

$$= 5\pi - 10x + 10\pi = 15\pi - 10x$$

$$15\pi - 10x = 9\pi - 2x \Rightarrow 6\pi = 8x \Rightarrow$$

$$x = \frac{6\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$$

- подходит.

$$-\pi \leq -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} < 0$$

$$-\frac{\pi}{4}$$

$$3) -2\pi \leq -x + \frac{\pi}{2} < -\pi \Rightarrow 10 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi\right)$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi\right) = 5\pi + 20\pi - 10x = 25\pi - 10x$$

$$-\pi \leq -2\pi + \frac{\pi}{2} < -\pi$$

$$25\pi - 10x = 9\pi - 2x \Rightarrow 8x = 16\pi \Rightarrow$$

$$x = 2\pi$$

см. на след. листе

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи № 3:

$$4) \quad -3\pi \leq -x + \frac{\pi}{2} < -2\pi$$

$$\Rightarrow 10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 10(\frac{\pi}{2} - x + 3\pi) = 35\pi - 10x$$

$$35\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$\Rightarrow 8x = 26\pi \Rightarrow x = \frac{26\pi}{8} = \frac{13\pi}{4}$$

$$-\frac{13\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{-13\pi + 2\pi}{4} = \frac{-11\pi}{4} < -2\pi \quad \text{и} \quad \frac{-11\pi}{4} \geq -3\pi$$

\Rightarrow подходит

$$5) \quad -4\pi \leq -x + \frac{\pi}{2} < -3\pi$$

$$10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 10(-\frac{\pi}{2} - x + 4\pi) = 45\pi - 10x$$

$$45\pi - 10x = 9\pi - 2x \Rightarrow 8x = 36\pi \Rightarrow x = \frac{36\pi}{8} = \frac{9\pi}{2} = 4,5\pi$$

$$-4,5\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{-4\pi}{1} < -3\pi \quad \text{и} \quad \frac{-4\pi}{1} \geq -4\pi \Rightarrow$$

\Rightarrow ответ: $x = -\frac{\pi}{2}; \quad x = \frac{13}{4}\pi;$

$$x = \frac{3\pi}{4}; \quad x = \frac{9}{2}\pi.$$

$$x = 2\pi;$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

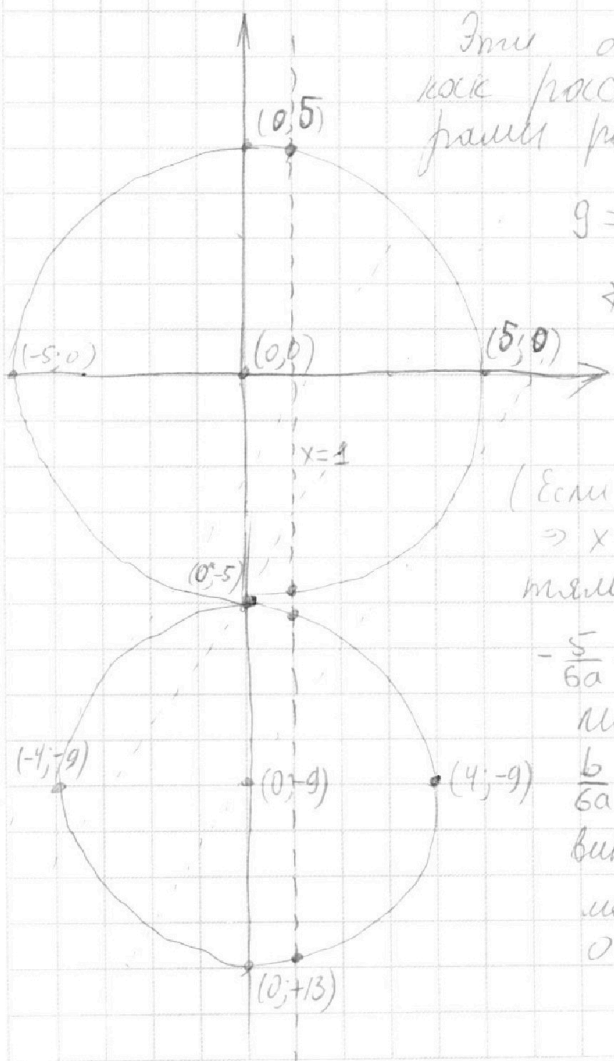
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4:

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 & \text{— это какая-то прямая} \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 44) = 0 & \text{— а это 2 окружности:} \end{cases}$$

Короче $x^2 + y^2 - 25 = 0$ — уравнение окружности с центром $(0; 0)$ и радиусом 5.

$x^2 + y^2 + 18y + 44 = x^2 + (y + 9)^2 - 16 = 0$ — уравнение окружности с центром $(0; -9)$ и радиусом 4.



Эти окружности касаются, так как расстояние между их центрами равно сумме радиусов:

$$9 = 4 + 5.$$

и прямую $5x + 6ay - b = 0$

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a} \quad (\text{если } a \neq 0)$$

(Если $a = 0$, то $5x = b \Rightarrow x = b/5 \Rightarrow$ 4 пересечения с окружностями есть)

$-\frac{5}{6a}$ — наклон прямой (может быть любым, кроме 0)

$\frac{b}{6a}$ — то, насколько эта прямая сдвинута по вертикальной оси, если может быть любым, в том числе 0 ($b = 0$). $\frac{b}{6a} = k \Rightarrow b = 6ak$.

ан. на след. листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

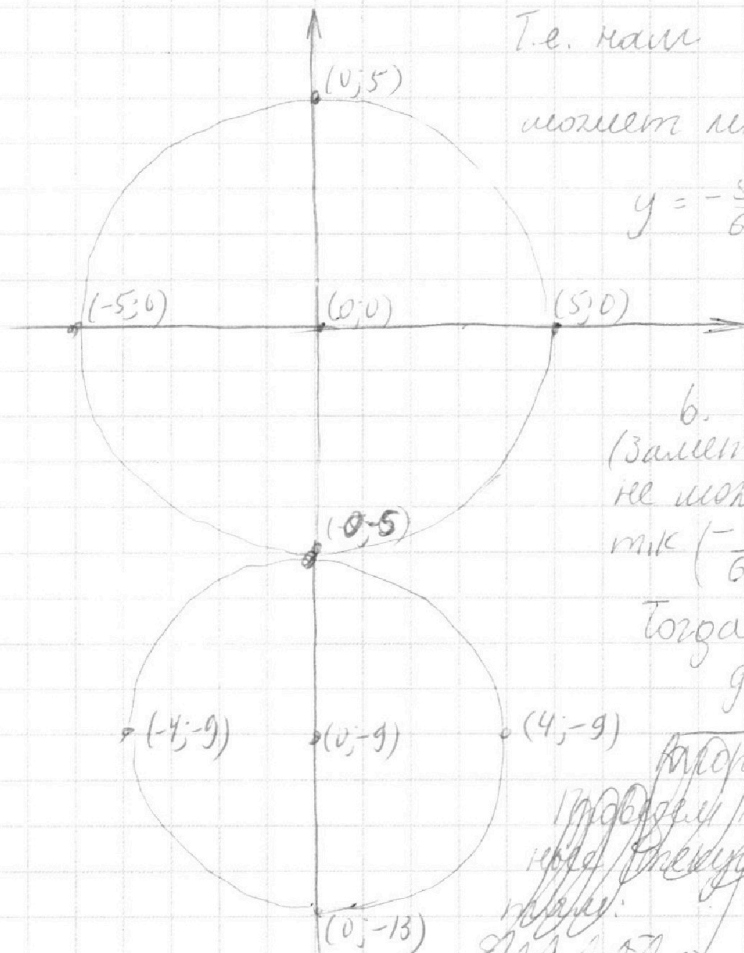
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продолжение 54:



Т.е. нам необходимо понять,
может ли прямая

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a}$$

пересечь эти
окружности в 4
точках при изменении

b .

(Заметим, что прямая
не может быть горизонтальной,
так как $-\frac{5}{6a} \neq 0$.)

Тогда (!) что это возможно
для любой прямой.

~~Вероятно, касательные параллельны
касательным, проведенным к окружностям.
Для $-\frac{5}{6a} < 0$:
то проведен касательная~~

~~Для $-\frac{5}{6a} < 0$:
то проведен~~

Для \forall направления ^{прямой} найдется
такое положение, что она
пересечет \forall из окружн. в
двух точках.

см. след. стр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

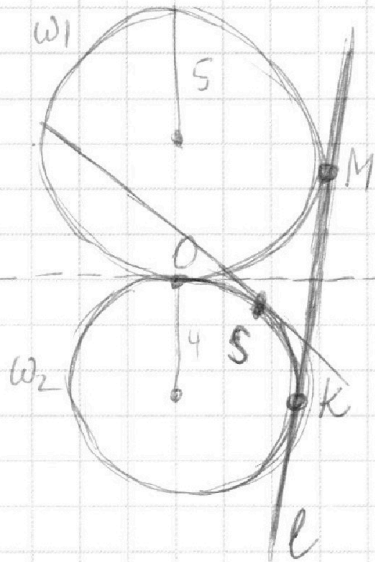
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение № 4.

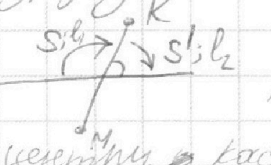


Проведем к окружностям ω_1 и ω_2 общую внешнюю касательную l , а точку пересечения обозначим за M , а точки касания l с окружностями — за M и K , (где $M \in \omega_1$ к окружн. радиуса 5 , а $K \in \omega_2$ — радиуса 4).

$l \Rightarrow$ некоторую точку S , которая будет бегать по дуге OK . Проведем касательную l_1 в S к ω_2 (ω_1 — радиуса 5 , ω_2 — радиуса 4). Заметим что l_1 пересечет ω_1 в двух точках, пока S не попадет в K .

~~Таким образом для~~ Аналогично некоторую точку S' , которая будет бегать по дуге OM , некоторую касательную l_2 в S' к ω_1 . Заметим, что l_2 пересечет ω_2 в двух точках.

Таким образом для ~~каждого~~ прямой l направления, мы найдем положение, в котором они касаются одной окружности и пересекают другую.

(Каждого направления, т.к. ) Теперь для l такой прямой достаточно подвинуть её чуть ближе к центру O касательной окружн. Аналогично и с MK :

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

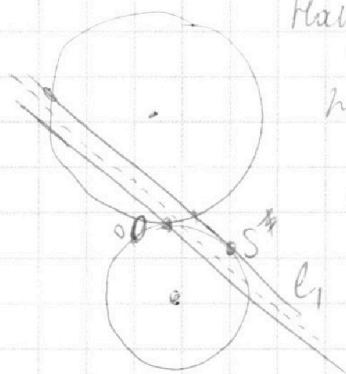
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

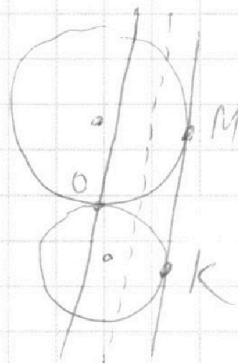
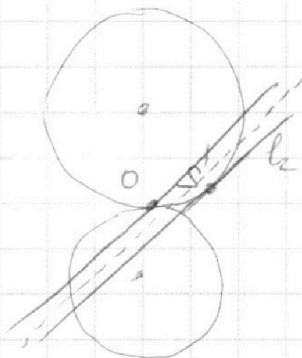
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продолжи №4:



Например, двигать можно так: провести
параллельную линию линии l_1 через ND
и взять среднюю линию
Аналогично, ~~в~~ с l_2 .



($\frac{b}{2a}$ - любое!)

\Rightarrow Ответ: $a \in (-\infty; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача $\sqrt{5}$:

$$1) \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5$$

$$\left[\log_a^b c = \frac{\log_c b}{\log_c a} \Rightarrow \log_x^3 \frac{1}{121} = \frac{\ln \frac{1}{121}}{\ln x^3} = \frac{\ln \left(\frac{1}{11}\right)^2}{\ln x^3} = \frac{2}{3} \log_x \frac{1}{11} = -\frac{2}{3} \log_x 11 = -\frac{2}{3} \frac{1}{\log_{11} x}$$

$$\Rightarrow \log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\log_{11} x} - 5 \quad | \cdot \log_{11} x$$

$$\log_{11}^5 x - 6 = -\frac{2}{3} - 5 \log_{11} x$$

$$\log_{11}^5 x + 5 \log_{11} x - 6 + \frac{2}{3} = 0 \quad (1) \quad \log_{11}^5 x + 5 = \frac{-16}{3 \log_{11} x}$$

$$2) \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5 \quad 0,5y = t$$

$$\log_{11}^4 t + \log_t 11 = -\frac{13}{3} \log_t 11 - 5 \quad | \cdot \log_{11} t$$

$$\log_{11}^5 t + 1 + \frac{13}{3} + 5 \log_{11} t = 0 \quad (2)$$

$$(1)+(2): \log_{11}^5 x + \log_{11}^5 t + 5 \log_{11} x + 5 \log_{11} y = 0$$

$$\uparrow 1 + \frac{13}{3} - 6 + \frac{2}{3} = 0$$

Раскроем сумму степеней:

$$(\log_{11} x + \log_{11} t) (\log_{11}^4 x - \log_{11}^3 x \log_{11} t + \log_{11}^2 x \log_{11}^2 t - \log_{11} x \log_{11}^3 t + \log_{11}^4 t) = 0$$

\Rightarrow Если $\log_{11} x + \log_{11} t \neq 0$ - можно сократить

$$\text{Если } \log_{11} x + \log_{11} t = 0 \Rightarrow xt = 1 \Rightarrow 0,5xy = 1 \Rightarrow \boxed{xy = 2}$$

Сократим: ~~$\log_{11}^5 x + \log_{11}^5 t + 5 \log_{11} x + 5 \log_{11} y = 0$~~
 ~~$(\log_{11}^4 x - \log_{11}^3 x \log_{11} t + \log_{11}^2 x \log_{11}^2 t - \log_{11} x \log_{11}^3 t + \log_{11}^4 t) = 0$~~
 ~~$\log_{11}^4 x - \log_{11}^3 x \log_{11} t + \log_{11}^2 x \log_{11}^2 t - \log_{11} x \log_{11}^3 t + \log_{11}^4 t = 0$~~
 ~~$\log_{11}^4 x - \log_{11}^3 x \log_{11} t + \log_{11}^2 x \log_{11}^2 t - \log_{11} x \log_{11}^3 t + \log_{11}^4 t = 0$~~
 ~~$\log_{11}^4 x - \log_{11}^3 x \log_{11} t + \log_{11}^2 x \log_{11}^2 t - \log_{11} x \log_{11}^3 t + \log_{11}^4 t = 0$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение №5:

Сократим на $\log_{11} x + \log_{11} t$

$$\begin{aligned} \log_{11} x = a &\Rightarrow a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4 + 5 = 0 && ab \geq 0, \text{ иначе} \\ \log_{11} t = b & && \leftarrow \text{положим.} \end{aligned}$$

$$\text{или } (a^2 + b^2)^2 - ab(a^2 + b^2) - a^2 b^2 + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - ab) - a^2 b^2 + 5 = 0$$

$$\text{или т.к. } 2ab \leq a^2 + b^2$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - ab) - ab(a^2 + b^2) + 5 = \text{// Заменим,}$$

$$= (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - 2ab) + 5 = 0$$

$$\text{т.к. } \begin{cases} a^2 + b^2 \geq 0 \\ a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \\ 5 > 0 \end{cases}$$

$$= (a - b)^2$$

$$= (a - b)^2$$

$$5 > 0$$

// что $ab \geq 0$,

// т.к. иначе $ab < 0$

// ~~если в той строке~~

// $ab^3 < 0$

// \Rightarrow изнач. выраж. > 0 .

ответ: $xy = 2$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

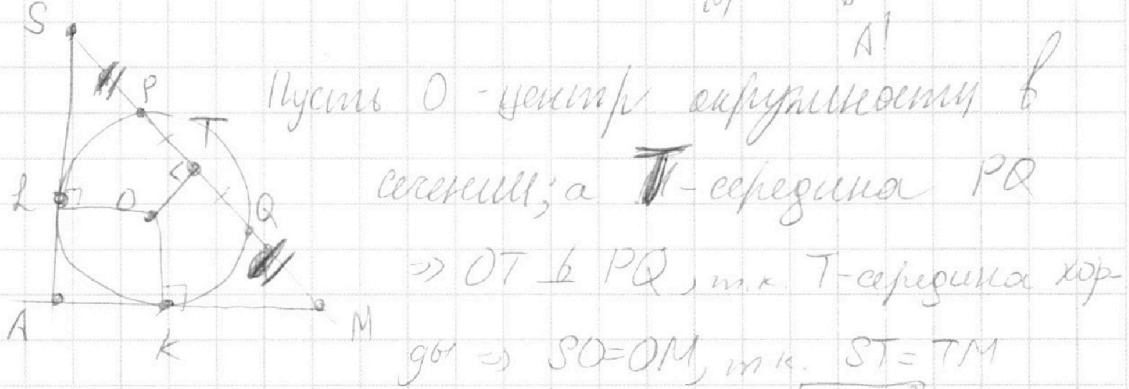
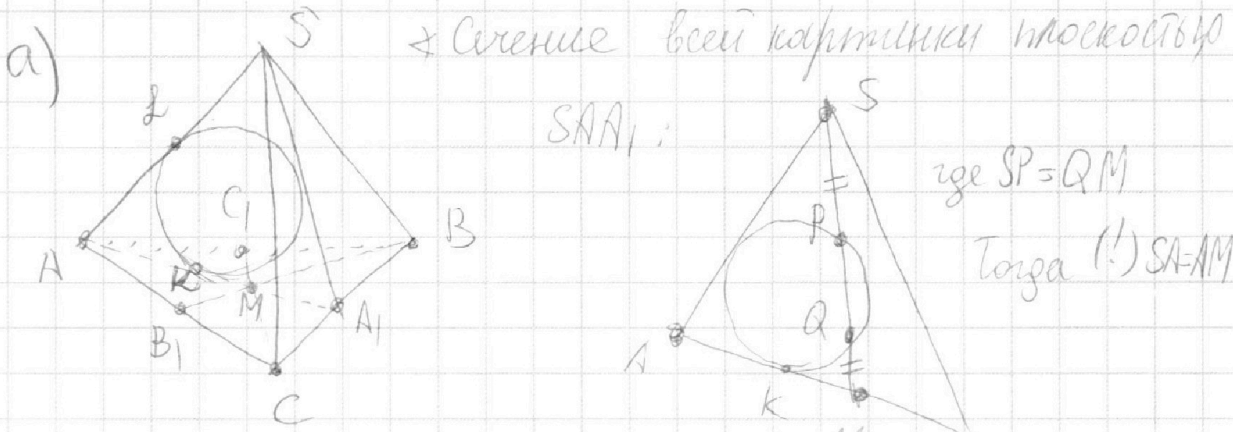
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7:

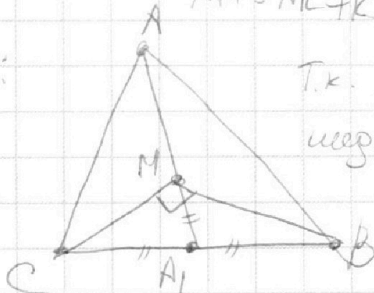


$\Rightarrow SL = MK$, т.к. $SL = \sqrt{SO^2 - OL^2}$ (т.к. касательная)
 $MK = \sqrt{OM^2 - OK^2}$ $\Rightarrow \Delta SOL$ и ΔOKM прямоугольн.
 $SO = \sqrt{ST^2 + OT^2}$
 $OM = \sqrt{TM^2 + OT^2}$

$AL = AK$, т.к. это отрезки касательные из одной точки A

$\Rightarrow SA = AM$, т.к. $SA = AL + LS$
 $AM = AK + KM$

$\neq \Delta ABC$:



Т.к. AA_1 - медиана и M - центр гипотенузы
 медиан $\Rightarrow \frac{AM}{MM} = \frac{2}{1} \Rightarrow AM = \frac{AM}{2} = \frac{SA}{2} = 10$
 $CA_1 = AB = \frac{BC}{2} = 10 \Rightarrow MA_1$ - это медиана на гипотенузу BC

$\Rightarrow \angle CMB = 90^\circ$, или этому $S(\triangle CMB) = \frac{1}{3} S(\triangle ABC)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

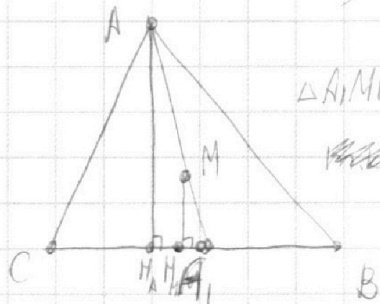
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продолженные S_{Δ} :

$$S(\Delta CMB) = \frac{1}{3} S(\Delta ABC), \text{ так как высота из } A \text{ на } BC \text{ } AH_A = 3MH_M$$



$\Delta A_1MH_M \sim \Delta A_1AH_A$

~~по двум~~ по двум

углам: $\angle M_1A_1M = \angle H_A A_1 A$

$\angle A_1 H_A A_1 = \angle M_1 H_M A_1 = 90^\circ$

$$\Rightarrow \frac{MH_M}{AH_A} = \frac{A_1M}{A_1A} = \frac{1}{3}$$

где MH_M - высота из M на BC .

$$\Rightarrow S(\Delta ABC) = \frac{AH_A \cdot BC}{2}$$

$$\cancel{S(\Delta ABC)} \quad S(\Delta CMB) = \frac{MH_M \cdot BC}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S(\Delta ABC)}{S(\Delta CMB)} = \frac{AH_A}{MH_M} = 3$$

$$\Rightarrow S(\Delta CMB) = \frac{180}{3} = 60.$$

С другой стороны $S(\Delta CMB) = \frac{CM \cdot MB}{2} = \frac{\frac{2}{3} CC_1 \cdot \frac{2}{3} BB_1}{2}$

$$\Rightarrow CC_1 \cdot BB_1 = \frac{9}{2} \cdot 60 = 270$$

$$\Rightarrow AA_1 \cdot CC_1 \cdot BB_1 = 270 \cdot 30 = 8100.$$

Ответ: 8100

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик:

1) a, b, c: $2^6 3^5 5^{11} : ab$ Найти $\min(abc)$

$2^{14} 3^{21} 5^{13} : bc$
 $2^{16} 3^{25} 5^{28} : ac$

$bc : 2^{14} 3^{21} 5^{13}$

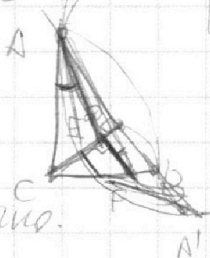
$ab : 2^6 3^5 5^{11}$

$ac : 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

16 $abc : 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

$\Rightarrow abc \geq 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

a: 2^4
 b: 2^2
 c: 2^{12}



16 Кудряшова.

$b+c=13$
 $a+b=11$
 $a+c=28$

$v_5(b) + v_5(c) + v_5(a) \geq 11 + 13 + 28 = 52 \Rightarrow \frac{52}{2} = 26$

12 a:
 b:
 c:

$|b-c| \geq 78$

$|b-a| \geq 11$

$|c-a| \geq 13$

$v_5(b) + v_5(c) + v_5(a) = \frac{28-11+13}{2} = 14 + 14 = 28$

15 $b+c$

$13+21+25 = 59$
 $46+13 = 59$

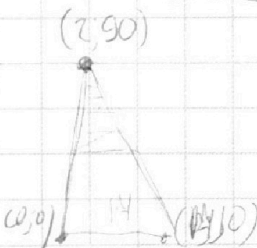
$\frac{2(1+15+25)}{2} = 21$

$a+b \geq 15$

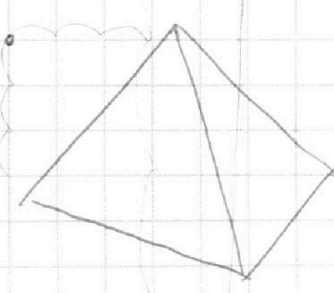
$b+c \geq 21$

$c+a \geq 25$

$4+8100 = 8104$
 $15^2+80^2 = 6625$



$(-90, 15)$



$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$

$a+b \geq 7$
 $a+c \geq 5 \Rightarrow a+b+c \geq 12$
 $b+c \geq 12$

$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$

