



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8xz} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{yz} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

если  $ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$  то  $ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \cdot n, n \in \mathbb{N}$

аналогично  $bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \cdot k, k \in \mathbb{N}$

$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \cdot m, m \in \mathbb{N}$

$(abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68} \cdot n \cdot m \cdot k$

т.е.  $(abc)^2 \vdots 3^{55}$

значит  $abc \vdots 3^{55}$  так  $55 \div 2$

т.е.  $(abc)^2 \vdots 3^{110}$

~~также~~ значит  $(abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{110} \cdot 5^{68} \cdot p, p \in \mathbb{N}$

~~то  $(abc)^2 \geq 2^{34} \cdot 3^{110} \cdot 5^{68}$~~

~~$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{34}$~~

т.е.  $abc = 2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{34} \cdot z, z \in \mathbb{N}$

т.е.  $ac \vdots 5^{39}$

$abc = 2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{39} \cdot r, r \in \mathbb{N}$

$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{39}$

пусть  $a = 2^5 \cdot 5^{12} \cdot 3^2$

$b = 2^3 \cdot 5^0 \cdot 3^{12}$

$c = 2^9 \cdot 5^{22} \cdot 3^{41}$

значности выполняются и  $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{39}$

укажем наименьшее значение  $abc$  соответственно;

$2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{39}$

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

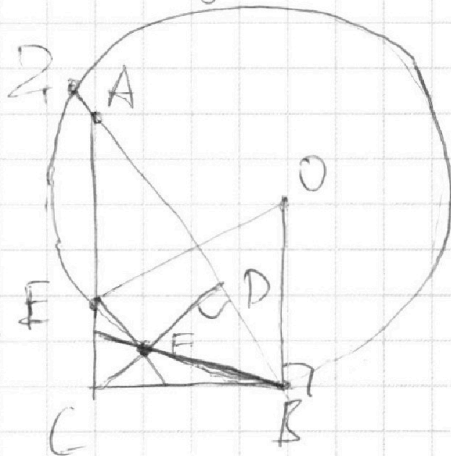
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №2 (мсм1)



1) Пусть  $\angle CBF = \alpha$

т.к.  $CB$  - кас к окр, то угол между хордой  $BF$  и кас.  $CB$  ( $\angle CBF$ ) =  $\frac{1}{2} \angle BOF$

$O$  - центр окр

$CB$  - кас  $\Rightarrow OB \perp CB$

2)  ~~$\angle E$~~

1)  $EF \parallel CB \Rightarrow \angle E = \angle FCB$

поэтому  $\angle CBF = \alpha = \angle FCB$   
(углы между хордой и касательной)

$\angle CBF = \angle FCB = \angle E = \angle EBF$

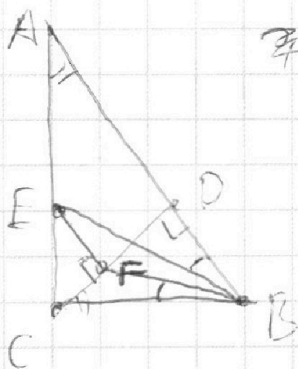
2)  $\triangle ABC \sim \triangle CDB$   
( $\angle CBA$  - общий и  $\parallel$ )

$\angle DCB = \angle CAB$

$\triangle EBA \sim \triangle CFB$

$\angle CAB = \angle DCB$ ;  $\angle CBF = \angle EBA$

$$\frac{CB}{AB} = \frac{CE}{EA}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3)  $\triangle CAB$  -  $\triangle$  (CD - высота)  
Задача №2 (м.с.м.2)

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB}$$

пусть  $AD = 5x$  и  $DB = 2x$

$$CD = \sqrt{10}x$$

$$CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = \sqrt{14}x$$

( $\triangle CDB$  -  $\triangle$ )

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{25x^2 + 10x^2} = \sqrt{35}x$$

$$4) \frac{CB}{AB} = \frac{CF}{EA} = \frac{\sqrt{14}x}{7x} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

пусть  $EA = y$

$$y \cdot \frac{\sqrt{14}}{7} = CF \Rightarrow CF = \frac{\sqrt{14}y}{7}$$

5)  $EF \parallel AB \Rightarrow \angle CEF = \angle CAB$  (как соответственные углы)

$\triangle CEF \sim \triangle CAD$

$\angle CEF = \angle CAB$ ,  $\angle C$  - общий

$$\frac{CF}{CD} = \frac{CE}{AC}$$

$$\frac{CF}{\sqrt{10}x} = \frac{\sqrt{35}x - y}{\sqrt{35}x} \Rightarrow \frac{\sqrt{14}y}{7} = \frac{\sqrt{35}x - y}{\sqrt{35}x}$$

$$\frac{\sqrt{14}y}{35x} = \frac{\sqrt{35}x - y}{\sqrt{35}x} \Rightarrow \frac{\sqrt{14}y}{35} = \frac{\sqrt{35}x - y}{\sqrt{35}}$$

$$7\sqrt{10}xy = 35\sqrt{35}x - 35y \Rightarrow 14\sqrt{10}y = 35\sqrt{35} - 7y$$

$$7\sqrt{10}y = 5\sqrt{35}x - 7y \Rightarrow y(\sqrt{10} + 7) = 5\sqrt{35}x$$

$$y = \frac{5\sqrt{35}x}{\sqrt{10} + 7}$$

$$y = \frac{35\sqrt{14}x}{14\sqrt{10}} = \frac{35\sqrt{7}x}{14\sqrt{5}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №2 (линия 3)

$$\frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta ADC}} = \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 \quad (\text{из подобия})$$

$$S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} \cdot 5x \cdot \sqrt{10} \cdot x = \frac{5\sqrt{10}}{2} x^2$$

$$CF = \frac{7\sqrt{10} \cdot 5x \cdot 5\sqrt{10}x}{7(\sqrt{10} + 5) \cdot 25 \cdot 10 \cdot x^2} = \frac{7\sqrt{10} \cdot 5x \cdot 5\sqrt{10}x}{7(\sqrt{10} + 5) \cdot 25 \cdot 10 \cdot x^2} = \frac{5\sqrt{10}}{2} x^2$$

$$S_{\Delta CEF} = \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 \cdot S_{\Delta ADC} = \frac{25 \cdot 10 \cdot x^2}{(25\sqrt{10} + 10\sqrt{10}) \cdot 10 \cdot x^2} \cdot \frac{5\sqrt{10}}{2} \cdot x^2 = \frac{25 \cdot 5 \cdot \sqrt{10} \cdot x^2}{(35 + 10\sqrt{10}) \cdot 2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{35} \cdot \sqrt{14} x^2 = \frac{7\sqrt{10}}{2} x^2$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{28 \cdot 5 \cdot \sqrt{10} \cdot x^2}{(35 + 10\sqrt{10}) \cdot 2 \cdot \frac{7\sqrt{10}}{2} x^2} = \frac{125}{248 + 70\sqrt{10}}$$

$$CF = \frac{35\sqrt{14} \cdot \sqrt{14} \cdot x}{14\sqrt{5} \cdot 7} = \frac{5 \cdot 7\sqrt{2}x}{14\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{2} x$$

$$S_{\Delta CEF} = \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 \cdot S_{\Delta ADC} = \frac{5x^2}{2 \cdot 10 \cdot x^2} \cdot 2 \cdot \frac{5\sqrt{10}x^2}{2} = \frac{5\sqrt{10}x^2}{8}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{35} \cdot \sqrt{14} x^2 = \frac{7\sqrt{10}}{2} x^2$$

$$6) \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{5\sqrt{10}x^2 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot \sqrt{10}x^2} = \frac{5}{28} \cdot \frac{7\sqrt{10}x^2 \cdot 8}{2 \cdot 5\sqrt{10}x^2} = \frac{28}{5}$$

Ответ:  $\frac{28}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №3 (матр 1)

$$10 \arcsin(\sin(\cos x)) = \sqrt{2} - 2x$$

$$x = \frac{-10 \arcsin(\sin(\cos x)) + \sqrt{2}}{2}$$

$$x = -5 \arcsin(\sin(\cos x)) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq -5 \arcsin(\sin(\cos x)) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-2\sqrt{2} \leq -5 \arcsin(\sin(\cos x)) \leq 3\sqrt{2}$$

$$\text{m.e. } -2\sqrt{2} \leq x \leq 3\sqrt{2}$$

$$10 \arcsin(\sin(\cos x)) = 10 \arcsin(\sin(\frac{\sqrt{2}}{2} - x))$$

$$1) \underline{-2\sqrt{2} \leq x \leq -\sqrt{2}}$$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\sqrt{2}}{2} - x - 2\sqrt{2})) = \sqrt{2} - 2x$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} - x - 2\sqrt{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$10(\frac{\sqrt{2}}{2} - x - 2\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 2x$$

$$-16\sqrt{2} = 8x$$

$$\underline{x = -2\sqrt{2}}$$

$$2) \underline{-\sqrt{2} \leq x \leq 0}$$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\sqrt{2}}{2} + x)) = \sqrt{2} - 2x$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$10(\frac{\sqrt{2}}{2} + x) = \sqrt{2} - 2x$$

$$4\sqrt{2} = -12x$$

$$\underline{x = -\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

$$3) \underline{0 \leq x \leq \sqrt{2}}$$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\sqrt{2}}{2} - x)) = \sqrt{2} - 2x$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} - x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$10(\frac{\sqrt{2}}{2} - x) = \sqrt{2} - 2x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №3 (лист 2)

$$5\sqrt{4} - 10x = \sqrt{4} - 2x$$

$$4\sqrt{4} = 8x$$

$$x = \frac{4\sqrt{4}}{2}$$

4)  $\sqrt{4} \leq x \leq 2\sqrt{4}$

$$10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\sqrt{4}}{2} + x - 2\sqrt{4}\right)\right) = \sqrt{4} - 2x$$

$$-\frac{\sqrt{4}}{2} \leq \frac{\sqrt{4}}{2} + x - 2\sqrt{4} \leq \frac{\sqrt{4}}{2}$$

$$10\left(\frac{\sqrt{4}}{2} + x - 2\sqrt{4}\right) = \sqrt{4} - 2x$$

$$5\sqrt{4} + 10x - 20\sqrt{4} = \sqrt{4} - 2x$$

$$-16\sqrt{4} = -12x$$

$$x = \frac{4\sqrt{4}}{3} \quad \left[ \frac{\sqrt{4}}{2}, 2\sqrt{4} \right] \quad x = \frac{4}{3}\sqrt{4}$$

5)  $2\sqrt{4} \leq x \leq 3\sqrt{4}$

$$10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\sqrt{4}}{2} - x + 2\sqrt{4}\right)\right) = \sqrt{4} - 2x$$

$$-\frac{\sqrt{4}}{2} \leq \frac{\sqrt{4}}{2} - x + 2\sqrt{4} \leq \frac{\sqrt{4}}{2}$$

$$10\left(\frac{\sqrt{4}}{2} - x + 2\sqrt{4}\right) = \sqrt{4} - 2x$$

$$5\sqrt{4} - 10x + 20\sqrt{4} = \sqrt{4} - 2x$$

$$24\sqrt{4} = 8x$$

$$x = 3\sqrt{4}$$

Ответ:  $x = \frac{4}{3}\sqrt{4}$ ;  $x = -2\sqrt{4}$ ;  $x = -\frac{\sqrt{4}}{3}$ ;  $x = \frac{\sqrt{4}}{2}$ ;  $x = 3\sqrt{4}$

Ответ:  $-2\sqrt{4}$ ;  $-\frac{\sqrt{4}}{3}$ ;  $\frac{\sqrt{4}}{2}$ ;  $3\sqrt{4}$ ;  $\frac{4}{3}\sqrt{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

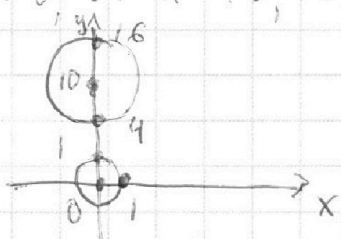


Задача №4 (школа)

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (2) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 & (1) \end{cases}$$

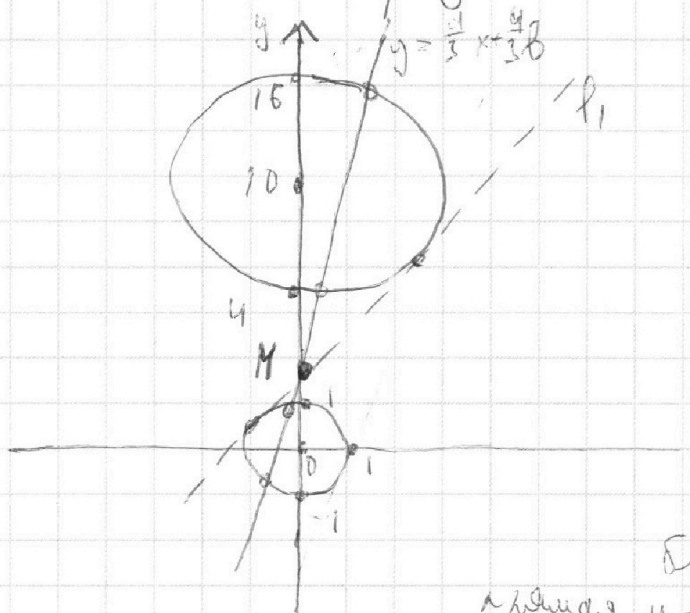
$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$$

Это две окр с радиусами 1 и 5 и центрами  $(0; 0)$  и  $(0; 10)$  соответственно



$$(2) y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

это семейство прямых, как вращающаяся ось  $(0; \frac{4}{3}b)$ , для  $a \geq 0$ !



1) при  $a = 0$   
≤ 2 решения

2)  $0 < \frac{a}{3} \leq k$ ,

где  $k$  — значение коэффициента при  $x$  для прямой  $l_1$  (касательной к обеим окр.)

тоже ≤ 2 решения  
3)  $\frac{a}{3} > k$

будет 4 реш, если прямая  $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$  пройдет через M



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



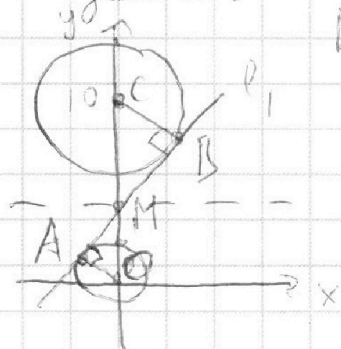
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 (см. стр. 2)  
 где  $M$  - точка пересечения  $l_1$  и  $Ox$ , т.е.  $3b = \sqrt{3} \cdot y_M$   
 $l_2$  - ось симметрии если подставить  $a_1 \geq 0$ ,  
 то получим  $a = -a_1$

Итак имеем:

$$\begin{cases} \frac{d}{3} > k \\ -\frac{d}{3} < k \end{cases} \quad \begin{cases} d > 3k \\ d < -3k \end{cases}$$

Найдем  $k$ !



$BC = \sqrt{6}$ ,  $OA = 1$   
 $\triangle OCM \sim \triangle OAM$   
 $\frac{OM}{CM} = \frac{OA}{BC} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\alpha \cdot CM = \sqrt{6} \cdot OM$   
 $CM + MO = 10$   
 $\sqrt{6} \cdot OM = 10$   
 $OM = \frac{10}{\sqrt{6}}$

$k = \operatorname{tg} (90^\circ - \angle CMB) = \operatorname{ctg} \angle CMB = \frac{MB}{CB}$

$CM = \sqrt{6} \cdot OM = \frac{100}{\sqrt{6}} \cdot \frac{60}{7}$

$MB = \sqrt{CM^2 - CB^2} = \sqrt{\frac{10000}{121} - 100} = 10 \sqrt{\frac{1}{121} - \frac{121}{121}}$   
 $= \sqrt{\frac{3600}{49} - 36} = 6 \sqrt{\frac{100}{49} - 1} = \frac{6\sqrt{51}}{7}$

$k = \frac{6\sqrt{51}}{7 \cdot 6} = \frac{\sqrt{51}}{7}$

$\begin{cases} a > \frac{3\sqrt{51}}{7} \\ a < -\frac{3\sqrt{51}}{7} \end{cases}$

Ответ:  $a \in (-\infty, -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}, +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5 (лист 1)

1)  $\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$   
 $\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 - 3$   
 $3 \log_5^4(2x) = 13 \log_{2x} 5 - 9$

2)  $\log_5^4(y) + 4 \log_y 5 = \log_y 3(0,2) - 3$   
 $\log_5^4(y) + 4 \log_y 5 = -\frac{1}{3} \log_y 5 - 3$   
 $3 \log_5^4(y) + 12 \log_y 5 = -\log_y 5 - 9$   
 $3 \log_5^4(y) = -13 \log_y 5 - 9$

(1) пусть  $t = \log_5^4(2x)$

$$3t^4 = 13t - 9$$

$$3t^4 = \frac{13}{t} - 9$$

$$\frac{3t^5 + 9t - 13}{t} = 0$$

$$3t^5 + 9t - 13 = 0$$

пусть  $f(m) = 3m^5 + 9m - 13$

$$f(\log_5^4(2x)) = 0$$

(2) пусть  $k = \log_5^4(2x) \leftarrow \log_y k = -\log_5 y$

$$3k^4 = \frac{13}{k} - 9$$

$$\frac{3k^5 + 9k - 13}{k} = 0$$

$$3k^5 + 9k - 13 = 0$$

$$f(-\log_5 y) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5 (лист 2)

$$f(m) = 3m^5 + 9m - 13$$

$$f'(m) = 15m^4 + 9 > 0 \text{ при всех } m$$

т.е.  $f(m)$  возрастает

$$f(\log_5(2x)) = 0 = f(-\log_5 y)$$

$$\text{так как } \log_5 2x = -\log_5 y$$

$$\log_5(2xy) = 0$$

$$2xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{2}$$

~~это возможно при  $x=1$  и  $y=\frac{1}{2}$~~

Ответ:  $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Задача №3 (мех)~~

~~$10 \arcsin(\cos x) = \bar{u} - 2x$~~

~~$10 \arcsin(\cos x) = \frac{\bar{u}}{2}$~~

~~$x = \frac{-10 \arcsin(\cos x) + \bar{u}}{2}$~~

~~$x = -5 \arcsin(\cos x) + \frac{\bar{u}}{2}$~~

~~$-\frac{5}{2}\bar{u} \leq -5 \arcsin(\cos x) \leq \frac{5}{2}\bar{u}$~~

~~$-2\bar{u} \leq -5 \arcsin(\cos x) \leq 3\bar{u}$~~

~~т.е.  $-2\bar{u} \leq x \leq 3\bar{u}$~~

$10 \arcsin(\cos x) = 10 \arcsin(\sin(\frac{\bar{u}}{2} - x))$

1)  $-2\bar{u} \leq x \leq -\bar{u}$

$10 \arcsin(\sin(\frac{\bar{u}}{2} - x)) = \bar{u} - 2x$

$-\frac{\bar{u}}{2} \leq \frac{\bar{u}}{2} - x \leq \frac{\bar{u}}{2}$

$10(\frac{\bar{u}}{2} - x - 2\bar{u}) = \bar{u} - 2x$

$5\bar{u} - 10x - 20\bar{u} = \bar{u} - 2x$

$-16\bar{u} = 8x$

$x = -2\bar{u}$

2)  $-\bar{u} \leq x \leq 0$

$10 \arcsin(\sin(\frac{\bar{u}}{2} + x)) = \bar{u} - 2x$

$-\frac{\bar{u}}{2} \leq \frac{\bar{u}}{2} + x \leq \frac{\bar{u}}{2}$

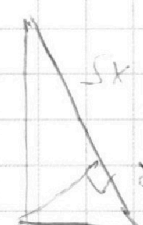
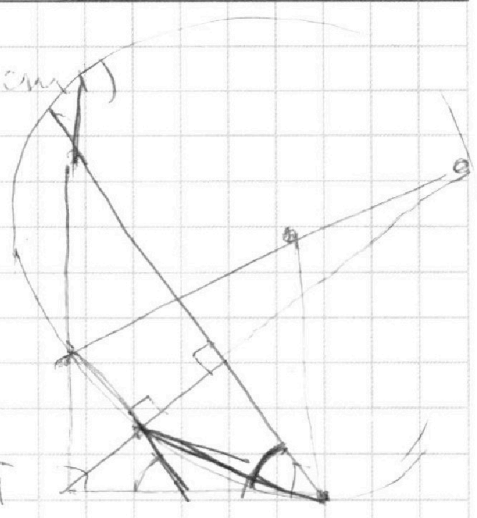
$10(\frac{\bar{u}}{2} + x) = \bar{u} - 2x$

$5\bar{u} + 10x = \bar{u} - 2x$

$4\bar{u} = -12x$

$x = -\frac{\bar{u}}{3}$

3)  $0 \leq x \leq -\bar{u}$



$2\bar{u} \leq x \leq 3\bar{u}$

$\frac{\bar{u}}{2} - x + 2\bar{u}$

$-3\bar{u} \leq -x \leq -2\bar{u}$

$-\bar{u} \leq -x \leq 0$

$25 + 10$

$35x$

$\bar{u} \quad 2\bar{u}$

$-2\bar{u} \leq -x \leq -\bar{u}$

$-x + 2\bar{u} \leq$

$\frac{\bar{u}}{2} + x - 2\bar{u}$

$-\bar{u} \leq x \leq 0$

$-5\bar{u}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including several geometric diagrams and algebraic calculations.

**Top Left:** Logarithmic calculations:  
 $\log_5^4 2 - 3 \log_2 5$   
 $\frac{1 - 5/9}{\log_2 5} \cdot 5$   
 $\frac{2}{3} \log_2 5 - 3$

**Top Right:** Geometric diagram of a triangle with vertices A, B, C, D, E, F. Angles are labeled as  $5x$ ,  $2x$ ,  $90^\circ - \alpha$ , and  $180^\circ - \alpha$ .

**Middle:** A large circle with points A, B, C, D, E, F on its circumference. Angles are labeled as  $5x$ ,  $2\alpha$ , and  $90^\circ - \alpha$ . A calculation shows  $CF = \frac{EB\sqrt{14}}{5}$ .

**Bottom Left:** Algebraic calculations:  
 $\frac{CF}{\sqrt{10}x} = \frac{CE}{\sqrt{35}x}$   
 $\frac{CF}{CE} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}}$   
 $CF = \frac{y\sqrt{10}}{\sqrt{35}}$

**Bottom Right:** Geometric diagram with a calculation:  $\frac{CF}{\sqrt{35}x - y} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^2} 625 - 3 \quad \frac{165}{15} \Big| 5$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{1}{3} \log_{2x} 5^4 - 3 \quad \frac{15}{15}$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3 \log_5(2x)} - 3$$

$$t = \log_5 2x \quad ; \quad x \neq \frac{1}{2} \quad \log_5 2x + \log_5 y = 0$$

$$t^2 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3+t} - 3 \quad 2xy = 1$$

$$3t^3 - 9 - 4 = 3t^3 - 9 - 4 + 9t = 0$$

$$3t^3 - 9 - 4 = 0 \quad 3t^3 + 9t - 13 = 0$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{13}{3}} \quad (6t + 3t - (3t^2 - 13 + 2t))$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \frac{4}{3} \log_5 5 - 3 \quad 6t^2 - 3t^2$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = -\frac{1}{3} \log_y 5 - 3 \quad \frac{3t^2 - 13}{t^4} > 0$$

$$\log_5^4 y = \log_5^4(2x) =$$

$$3 \log_5^4(2x) = 4 \log_{2x} 5 + 5 \log_{2x} 5 - 3$$

$$3 \log_5^4 y = -\log_y 5 - 12 \log_4 5 - 3$$

$$3 \log_5^4(2x) = 13 \log_{2x} 5 - 3$$

$$3 \log_5^4 y = -12 \log_y 5 - 3$$

$$3(\log_5^4 2x - \log_5^4 y) = 13(\log_{2x} 5 - \log_y 5)$$

$$3t^2 + 3t - 13 = 0 \quad f(\log_5 2x) = 3t = \frac{13}{t} - 3$$

$$165 \quad f(\log_5 y) \quad \frac{3t^2 - 13 + 3t}{t} = 0$$

$$\log_5 2x = -\log_5 y$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3 \log_5^4(2x) = \frac{13}{\log_2 5} - 9$$

$$3 \log_5^4(y) = -\frac{13}{\log_2 5} - 9$$

$$3(\log_5^2(2x) - \log_5^2(2y))(\log_5^2 2x + \log_5^2 2y) =$$

$$= 13 \left( \frac{\log_2 5}{\log_2 5} - \log_2 5 \right) \quad 16$$

$$f(t) = 3t^4 - \frac{13}{t} + 9 \quad 80$$

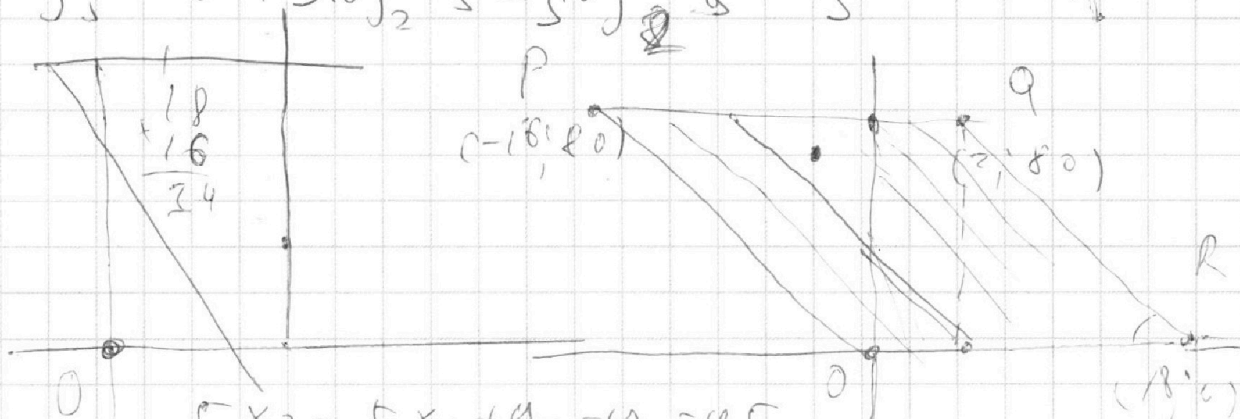
$$= \frac{3t^5 + 9t - 13}{t} = 0 \quad 16$$

$$\log_5 2x \quad 3t^5 + 9t - 13 = 0$$

$$15t^4 + 9 = 0$$

$$x = 1, \quad y = \frac{1}{2}$$

$$\log_5^4 2 = 3 \log_2 5 = \frac{4}{3} \log_2 5^4 - 3$$



$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$$

$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

$$y = -5x + 5x_2 + y_2 - 45$$

$$y = 5x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$y = 3x + 1$   
 $x = -\frac{1}{3}$   
 $- \frac{a}{3}$   
 $-1$   
 $(5\sqrt{3})$

$y = ax + 4b$   
 $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$   
 $(-\frac{5\sqrt{3}}{3})$   
 $(\frac{5\sqrt{3}}{3})$

$10 \cos(\alpha) \cos(x) = 4 - 2x$   
 $10 \cos(\alpha) \sin(\frac{\pi}{2} - x)$   
 $(\frac{\pi}{2} - x)$

$x^2 + y^2 = 1$   
 $x^2 + (y-10)^2 = 36$   
 $16$   
 $\frac{4}{12}$      $\frac{4}{3\sqrt{3}}$

$-2\sqrt{3} \leq x \leq 3\sqrt{3}$   
 $-10 \leq x \leq 10$   
 $-5\sqrt{3} \leq x \leq 5\sqrt{3}$   
 $-6\sqrt{3} \leq x \leq 4\sqrt{3}$   
 $-2\sqrt{3} \leq x \leq 3\sqrt{3}$

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$   
 $1) 0 \leq x \leq \sqrt{3}$   
 $2) \sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3}$   
 $\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3}$   
 $-\sqrt{3} \leq x \leq 0$

$(y-10)^2 = 36$   
 $y^2 - 20y + 100 = x^2 - 36$   
 $y^2 - 20y + 100 - x^2 + 36 = 0$   
 $y^2 - 20y + 136 - x^2 = 0$   
 $(y-10)^2 - 20(y-10) + 136 - x^2 = 0$   
 $(y-10)^2 - 20(y-10) + 136 - x^2 = 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \cdot 29$   
 $bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$   
 $ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{19}$   
 $(abc)^2: 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$   
 $(abc)^2: 2^1 \cdot 3^{17} \cdot 5^{27} \cdot 29$   
 $(abc)^2: 2^{33} \cdot 3^{33} \cdot 5^{33}$   
 $(abc)^2: 2^{33} \cdot 3^{33} \cdot 5^{33}$

$\frac{b}{a} = \frac{c}{a} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$   
 $\frac{b}{a} = \frac{c}{a} \cdot 30$   
 $b = 30c$   
 $a + b = 12$   
 $b + c = 12$   
 $a + c = 30$

$(abc)^2 = 3 \cdot 55$   
 $abc = 1 \cdot 3 \cdot 55$   
 $abc = 165$   
 $a - b = 22$

$2a = 34$   
 $a = 17$   
 $c = 1$   
 $b = 30$   
 $abc = 17 \cdot 30 \cdot 1 = 510$

$abc \geq 2 \cdot 3 \cdot 5$   
 $a = 2 \cdot 5 = 10$   
 $b = 2 \cdot 3 = 6$   
 $c = 2 \cdot 5 = 10$

$\frac{c}{a} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot d$   
 $\frac{c}{a} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot b$

$a + b + c = 12$   
 $a + b = 8$   
 $b + c = 12$   
 $a + c = 14$   
 $d - b = 2$

$ab = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^{22}$   
 $a^2 = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$   
 $a \cdot 5^{10} = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

$2a = 10$   
 $a = 5$   
 $b = 3$

$abc = a \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5^{22} \cdot a \cdot 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^5 \cdot a$   
 $abc = a^3 \cdot 2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{27}$

$\sqrt[3]{39} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a$   
 $a^2 = 2^{11} \cdot 3^{17} \cdot 5^{17}$

$a + b + c = 55$   
 $a + b = 14$   
 $a = 12$   
 $c = 27$

$a + b + c = 39$   
 $a + c = 39$   
 $a = 12$   
 $c = 27$