



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если хотя бы одно из чисел a, b и c делится на простое, отличное от 2, 3 и 5, то можно рассмотреть подобную тройку a, b, c , где из разложения числа, в котором было это простое, это простое убрать. Тогда условия не нарушатся, а произведение уменьшится.

Пусть $a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}$; $b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}$; $c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$, где x_i, y_i, z_i - натуральные числа.

$$\text{Из условия } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_2 + x_3 \geq 13 \\ x_1 + x_3 \geq 14 \end{cases}$$

Если сложить все нерав.

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 34 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 \geq 17$$

Трехки 17 достигается при $x_1 = 4; x_2 = 3; x_3 = 10$ (и все условия выполняются)

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 11 \\ y_2 + y_3 \geq 15 \\ y_3 + y_1 \geq 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 43 \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq 21.5 \end{cases} \Rightarrow$$

Но это натуральные числа

Пример на 22: $y_1 = 7; y_2 = 5; y_3 = 10$

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 22$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 \geq 14 \\ z_2 + z_3 \geq 18 \\ z_1 + z_3 \geq 43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 \geq 43 \\ z_2 \geq 0 \end{cases}$$

Пример, когда достигается: $z_1 = 20; z_2 = 0; z_3 = 23$.

т.о. $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$, причем равенство достигается.

Ответ: наим. знач. равно $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

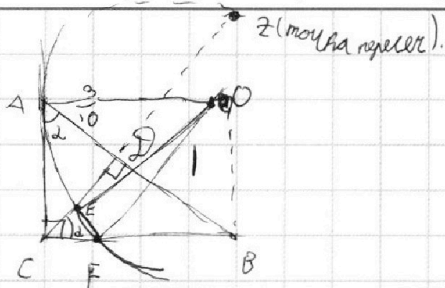
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: CD - высота

$(AB) \parallel (EF)$

$$\frac{|AB|}{|BD|} = 1.3$$

Найти: $\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$?

И.к. нам не даны размеры, а лишь отношения, применим

~~свойства~~ подобия $\triangle BCD$ и $\triangle ACD$ условия. Тогда $|AD| = 0.3$

$\angle DCB = \alpha$. Тогда в силу подобия $\angle CAB = \alpha$

Тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{|CD|}{0.3} = \frac{1}{|CD|} \Rightarrow |CD| = \sqrt{0.3} = \frac{\sqrt{30}}{10}$

Следовательно $|BC| = \sqrt{0.3 + 1} = \frac{\sqrt{130}}{10}$

$|AC| = \sqrt{0.3 + 0.09} = \sqrt{0.39} = \frac{\sqrt{39}}{10}$

По $(EF) \parallel (AB) \Rightarrow \angle CEF = \angle CAB = \alpha$

Значит, $\triangle CEF \sim \triangle CDB$ (угол α коэффициент k)

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ACD}}{k^2 S_{CDB}} = \frac{\frac{1}{2} |CD| \cdot |AD|}{k^2 \cdot \frac{1}{2} |CD| \cdot |BD|} = \frac{0.3}{k^2}$$

Сначала найдем k

(AC) - кас-ая OK -мн $\Rightarrow (AO) \parallel (CB)$

$\angle CEF = \alpha \Rightarrow \angle FEZ$ определяет OK диаметр $\Rightarrow [FZ]$ - диаметр OK -мн.

Тогда $|EF| =$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Известно, что $\forall x \in [0; \pi]$ $\arccos(\sin x) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x))$

Тогда $\forall x \in [0; \pi]$ $5 \arccos(\sin x) \in [0; 5\pi]$

Тогда $\frac{3\pi}{2} + x \in [0; 5\pi] \Leftrightarrow x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$

Рассмотрим различные варианты x :

1. $x \in [-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}]$

Тогда $\frac{\pi}{2} - x \in [2\pi; \pi]$. Ур-ие имеет вид:

$$5 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow 5 \cdot (2\pi - (\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow \frac{15\pi}{2} + 5x = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{2}$$

2. $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Тогда $\frac{\pi}{2} - x \in (0; \pi]$. Ур-ие имеет вид:

$$5 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow 5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow \pi = 6x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

3. $x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$

Тогда $\frac{\pi}{2} - x \in (-\pi; 0]$. Ур-ие имеет вид:

$$5 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow 5 \cdot (x - \frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow 4x = 4\pi \Leftrightarrow x = \pi$$

4. $x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$

Тогда $\frac{\pi}{2} - x \in (-2\pi; -\pi]$. Ур-ие имеет вид:

$$5 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow 5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x + 2\pi) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow \frac{25\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 6x \Leftrightarrow x = \frac{11\pi}{6}$$

5. $x \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$

Тогда $\frac{\pi}{2} - x \in (-3\pi; -2\pi]$. Ур-ие имеет вид:

$$5 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow 5 \cdot (x - \frac{\pi}{2} + 2\pi) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow \frac{25\pi}{2} + 5x = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Запомним, что мы проверим все возможные для x значения исходя
из ограничений. Все найденные значения выпишем и нам представят.

Ответ: $\left\{ -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2} \right\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что условие $x + 3ay - 7b = 0$ задает прямую, а

условие $(x^2 + 14x + b^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$ - две окружн.

Тогда ровно 4 решения, если дискриминант каждого из этих двух

уравнений больше 0, после подстановки x , выразившего из уравнения прямой.

4) Как не ~~было~~ нет ограничений на a и b (целость и т.п.), тогда заменим для удобства $3a$ на a , $7b$ на b , а затем в конце решения перейдем обратно

т.е. $x = b - a, y$.

1-ое уравне: $(b - a, y + 7)^2 + y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (b + 7)^2 - 2(b + 7)a + (a^2 + 1)y^2 - 4 = 0$

$D_1 = 4(b + 7)^2 a^2 - 4((b + 7)^2 - 4) \cdot (a^2 + 1) = 4 \cdot (4a^2 - (b + 7)^2 + 4)$

$D_1 > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 + 1} > |b + 7| \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 1} > \frac{|b + 7|}{2}$

2-ое уравне: $b^2 - 2ab + y^2(1 + a^2) - 9 = 0$

$D_2 = 4a^2 b^2 - 4 \cdot (b^2 - 9) \cdot (1 + a^2) = 4 \cdot (9a^2 - b^2 + 9)$

$D_2 > 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{a^2 + 1} > |b| \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 1} > \frac{|b|}{3}$

Заметим, что мы выбрали b , исходя из выбора a , но существует ограничение, что

$\sqrt{a^2 + 1} > \max\left(\frac{|b|}{3}; \frac{|b + 7|}{2}\right)$. Но в силу вида этих функций, максимум

из них минимален в точке их пересечения, т.е. $\frac{|b|}{3} = \frac{|b + 7|}{2} \Leftrightarrow$

$2|b| = 3|b + 7| \Leftrightarrow -2b = 3b + 21 \Rightarrow b = -\frac{21}{5}$ - оптимальный выбор.

Тогда $\sqrt{a^2 + 1} > \frac{|b|}{3} = \frac{7}{5} \Rightarrow a^2 + 1 > \frac{49}{25} \Leftrightarrow a > \frac{2\sqrt{6}}{5}$

Возвращаясь к $a : 3a = b, \Rightarrow \begin{cases} a > \frac{2\sqrt{6}}{5} \\ a < -\frac{2\sqrt{6}}{5} \end{cases}$

Ответ: $(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{5}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{5}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим первое уравнение:

ОДЗ: $x + \frac{1}{6} > 0$
 $x > 0$

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_7 7 = \log_{36}^2 343 - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_7^4(6x) = 2 \log_7 7 + \frac{3}{2} \log_7 6x^2 - 4 \Leftrightarrow \log_7^4(6x) = 2 + 3 \log_7 6x^2 - 4 \Leftrightarrow \log_7^4(6x) = 3 \log_7 6x^2 - 2$$

Переходим к второму:

ОДЗ: $y \neq 1$
 $y > 0$

$$\log_7^4 y + 6 \log_7 7 = \log_{49}^2(7^5) - 4 \Leftrightarrow \log_7^4 y = -\frac{7}{2} \log_7 7 - 4 \Leftrightarrow \log_7^4 y = -\frac{7}{2} - 4 \Leftrightarrow \log_7^4 y = -\frac{15}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^4 = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{a} - 4 \Leftrightarrow 2a^5 + 7a + 7 = 0 \quad (a)$$

Пусть a , u , t - корни ~~уравнения~~ полученные нами ур-ий.

Тогда $a + t = \log_7(6xy) \Leftrightarrow 7^{a+t} = 6xy \Leftrightarrow xy = \frac{7^{a+t}}{6}$

Значит, если мы найдем всевозможные корни a и t , то найдем и все возможные произведения xy .

Сложим ур-ия (1) и (2), получим: $2a^5 + 2t^5 + 7a + 7t = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a+t)(a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4) + 4(a+t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+t=0 \\ a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4 + 4 = 0 \end{cases}$$

Докажем, что у второго ур-ия нет решений. Пусть, не умаляя общности, $|a| \geq |t|$.

1. $|a| < 1$

Тогда $a^4 \geq 0$

$| -a^3t | < 1$

$a^2t^2 \geq 0$

$| -at^3 | < 1$

$t^4 \geq 0$

$$\Rightarrow a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4 > -2 \Rightarrow a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4 + 4 > 2 > 0$$

2. $|a| \geq 1$

Тогда $a^4 - a^3t \geq 0$

$a^2t^2 - at^3 \geq 0$

$t^4 \geq 0$

$4 > 0$

$$\Rightarrow a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4 + 4 > 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом, в обоих случаях уравнение корней иметь не может.

После необходимых условий, тогда a и t будут корнями ур-ий (2) и (1)

Вытекает $a+t=0$. Заметим, что существуют a и t , ур-е. ОДЗ.

Значит, единственным возможным вариантом (и он достигается) для суммы $a+t$ является $a+t=0$

Но тогда по формуле ранее

$$x_b = \frac{7^{a+t}}{6} = \frac{1}{6}, \text{ что и будет единственным возможным вариантом произведения.}$$

Ответ: $\left\{ \frac{1}{6} \right\}$

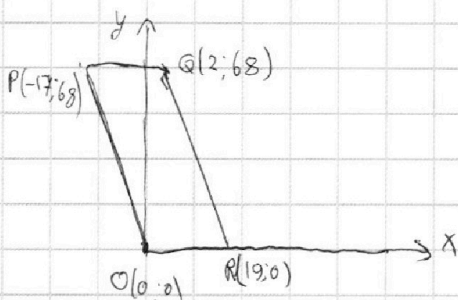
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Для точек $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$

как известно, что

$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40. (1)$$

Зафиксируем точку $A(x_1; y_1)$ и найдем для нее все подходящие точки $B(x_2; y_2)$

Тогда мы найдем ^{подходящую} какую-то точку $B(x_2; y_2)$

Тогда заметим, что нам подойдут также точки $C(x_3; y_3)$:

$$y_3 = -4x_3 + y_2 + 4x_2, \text{ т.е. прямая.}$$

Заметим, что угловый коэффициент этой прямой равен угловому коэффициенту

прямых (PO) и (QR) , а значит наша прямая параллельна этим двум.

Тогда рассмотрим на точку, лежащую на прямой и имеющую абсциссу 0.

Для нее: $x_4 = 0$

$$y_4 = -4x_4 + y_2 + 4x_2 \Leftrightarrow y_4 = -4x_4 + 40 + 4x_1 + y_1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow x_4 = 0; y_4 = 40 + 4x_1 + y_1$$

Если $40 + 4x_1 + y_1 \in [0; 68]$, то для данной точки $A(x_1; y_1)$ не существует подходящих (1) точек B , в силу параллельности прямых.

Если же $40 + 4x_1 + y_1 \in [0; 68]$ рассмотрим два варианта:

1) $40 + 4x_1 + y_1 \leq 4$. Тогда подходящих нам точек B ровно 18.



В силу делимости, точек на краях - целочисленные; при увеличении x на 1 получаем новую целочисленную точку на данной прямой, итого 18 целочисленных точек.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2) 40 + 4x + y \leq 4$$

Тогда ~~подходящих~~ ~~увеличенных~~ точек на 2 меньше, т.е. 16 штук
того, что ~~на~~ ~~на~~ пересечении с (PQ) и (OR) — лишние точки.

Теперь получим кол-во подходящих ~~пар~~ пар точек. Каждая из увеличенных
точек лежит ровно на одной прямой вида $y = -4x + a$, где

$$\text{чтобы в этой точке } (x, y) \text{ была пара } 40 + 4x + y \in [0; 68] \Rightarrow \begin{matrix} a \in [0; 46]; \\ a \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow a \text{ покр } \in [0; 28]$$

При этом для $a: 4$ точек на данной прямой 18, и для каждой
из них есть 18 подходящих им точек B .

Для $a: 4$ точек на прямой 16, и им подходят 16 точек B .

Тогда всего пар: ~~числа~~, увеличивая на ~~4~~ ~~всего~~ 8 штук, а подходящих

$$21 \text{ штук. } S = 8 \cdot 18^2 + 21 \cdot 16^2 = 2592 + 5376 = 7968$$

Ответ: 7968



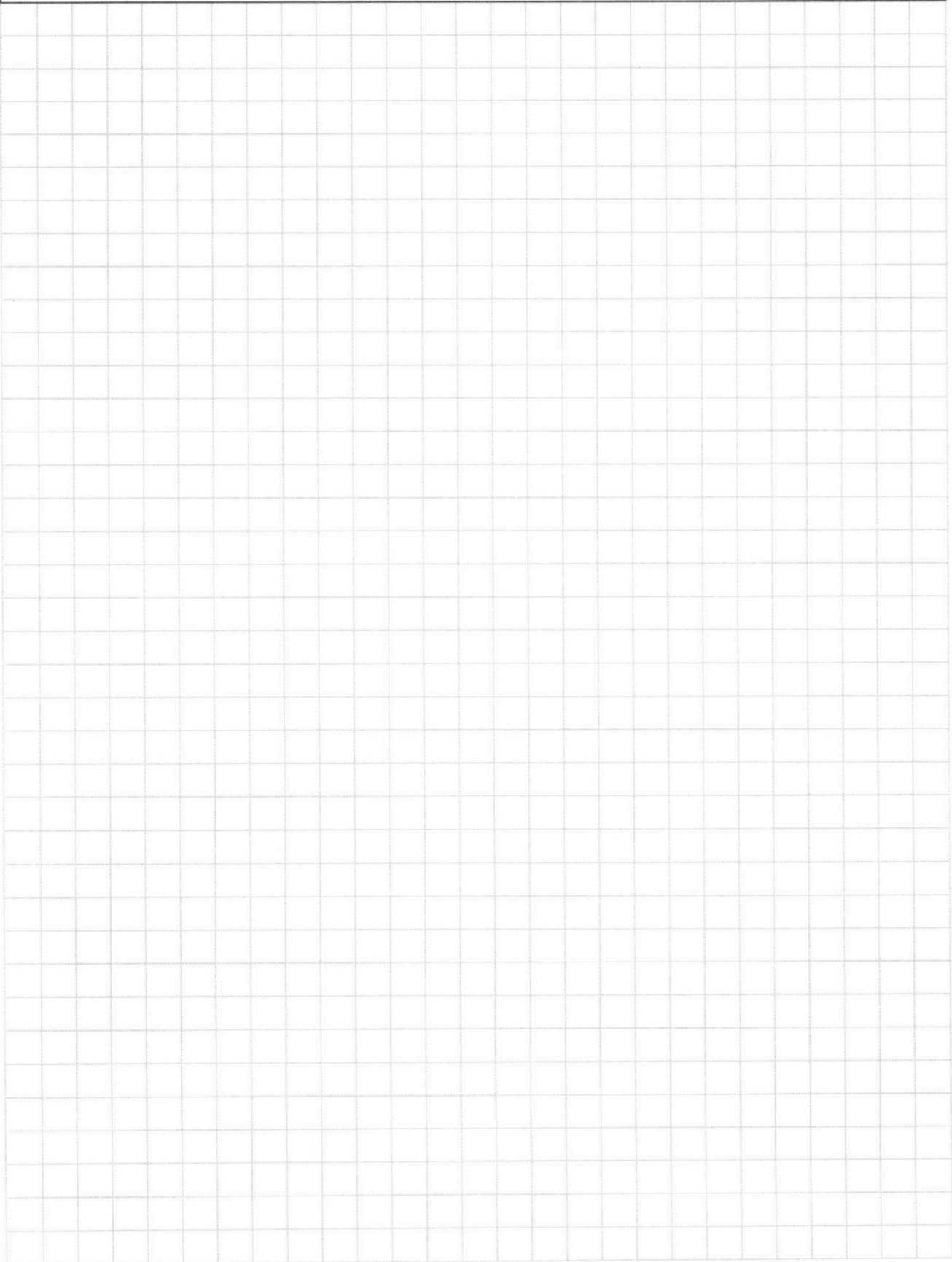
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x = \frac{\pi + 5\pi k}{6} \quad k \in [-2; 4]$$

$$1. x = \frac{-9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$$

$$2. x = \frac{-4\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{5\pi}{6}$$

$$5 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x \quad (\Leftrightarrow)$$

$$1. \frac{\pi}{2} - x \in [0; \pi]$$

$$\frac{7\pi}{2} \quad 5\pi$$

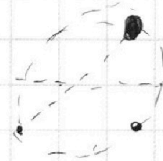
$$(\Leftrightarrow) \quad \frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x \quad (\Leftrightarrow) \quad 6x = \pi \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \frac{\pi}{6} \quad \sin(\frac{7\pi}{2})$$

$$2. \frac{\pi}{2} - x \notin [0; \pi]$$

$$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x + \pi k$$

$$\pi + 5\pi k = 6x$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{7\pi}{6}$$

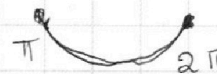


$$\frac{\pi}{2} - x \in$$

$$[2\pi; \pi)$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$\frac{10\pi}{6} =$$



$$\frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{10\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{11\pi}{6} + \frac{9\pi}{6} = \frac{20\pi}{6} = \frac{10\pi}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 2 \cdot 3 \cdot 5^{z_1}; \quad b = 2 \cdot 3 \cdot 5^{z_2}; \quad c = 2 \cdot 3 \cdot 5^{z_3}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_2 + x_3 \geq 13 \\ x_3 + x_1 \geq 14 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{увеличить минимально} \\ \text{при максимуме} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 7 \\ x_2 + x_3 = 13 \\ x_3 + x_1 = 14 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + x_2 = 7 \\ x_2 + x_3 = 13 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 + y_2 = 11 \\ y_2 + y_3 = 15 \\ y_3 + y_1 = 17 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = \\ y_2 = 5 \\ y_1 = 7 \\ y_3 = 10 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} z_1 + z_2 \geq 14 \\ z_2 + z_3 \geq 18 \\ z_1 + z_3 \geq 43 \end{array} \right\}$$

$$z_1 + z_2 + z_3 \geq \frac{95}{2}$$

$$38$$

$$\begin{cases} z_1 = 20 \\ z_3 = 23 \end{cases}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \pi k = \frac{3\pi}{2} + x \quad k \in [0; \pi]$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 5\pi k = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\pi + 5\pi k = 6x$$

$$x = \frac{\pi + 5\pi k}{6}$$

$$\pi \geq \frac{\pi}{2} - x + \pi k \geq 0$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{6} \geq 0$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{6} \geq 0 \Leftrightarrow \pi k \geq -2\pi \Leftrightarrow k \geq -2$$

$$\pi \geq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{6} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} \geq \frac{\pi k}{6} \Leftrightarrow 4\pi \geq \pi k \Leftrightarrow k \leq 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



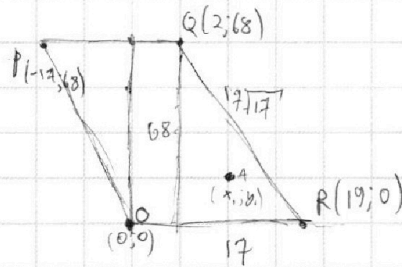
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$O(0;0); P(-17;68); Q(2;68); R(19;0).$$

$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$

$$\begin{array}{r}
 18 \\
 18 \\
 + 144 \\
 \hline
 324 \\
 \cdot 8 \\
 \hline
 2592
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 16 \\
 16 \\
 \hline
 96 \\
 \cdot 16 \\
 \hline
 256
 \end{array}$$



$$y_1 + 4x_1 \leq 28$$

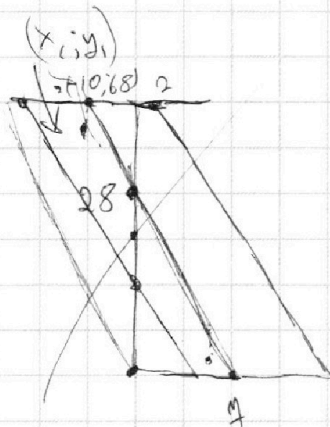
$$4x_2 = 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$

$$y_3 = -4x_3 + b$$

$$y_2 = 40 + y_1 + 4x_1 - 4x_2$$

$$b = y_2 + 4x_2$$

$$\begin{array}{r}
 256 \\
 \cdot 21 \\
 \hline
 512 \\
 + 512 \\
 \hline
 5376 \\
 + 2592 \\
 \hline
 7968
 \end{array}$$



$$y = \cancel{21} - 4x$$

$$y_1 + 4x_1$$

$$y_2 = 40 + 4x_1 + y_1$$

1.3

1.69

0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28



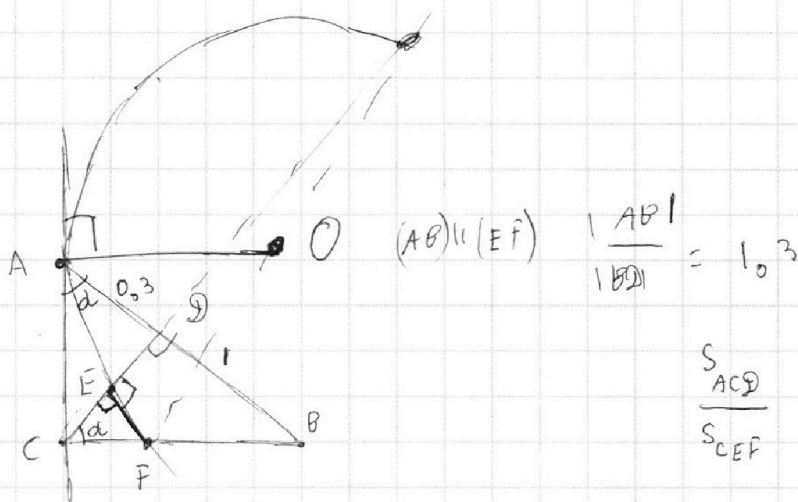
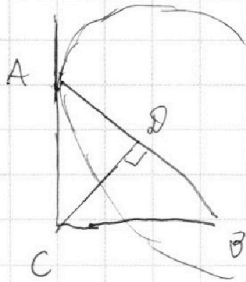
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

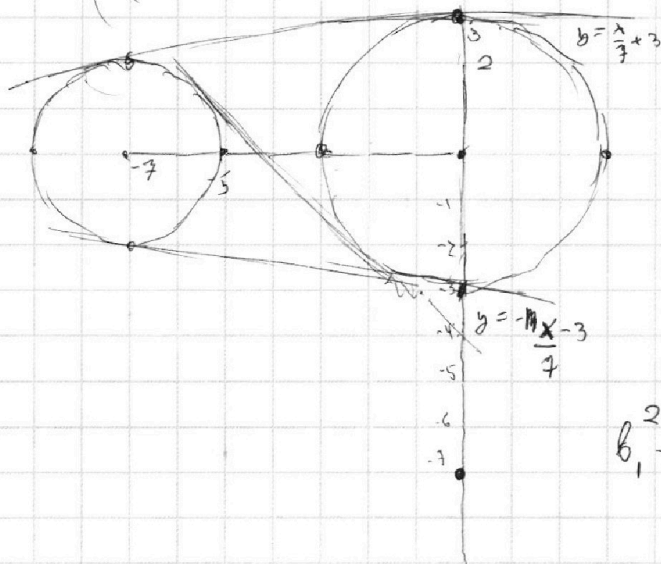
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$$x + a_1 y - b_1 = 0 \Rightarrow x = b_1 - a_1 y$$



$$1. a_1 = 0$$

верт. прямая - не подходит.

$$2. a_1 \neq 0$$

$$y = -\frac{x}{a_1} + \frac{b_1}{a_1}$$

$$b_1^2 - 2a_1 b_1 y + y^2 (1 + a_1^2) - 9$$

$$D_1 = 4a_1^2 b_1^2 - 4 \cdot (b_1^2 - 9) > 0$$

$$(b_1 + 7 - a_1 y)^2 + y^2 - 4 = (b_1 + 7)^2 - 2(b_1 + 7)a_1 y + (a_1^2 + 1)y^2 - 4$$

$$D_2 = 4(b_1 + 7)^2 a_1^2 - 4 \cdot ((b_1 + 7)^2 - 4) \cdot (a_1^2 + 1) > 0$$

$$D_1 > 0 \Leftrightarrow a_1^2 b_1^2 - b_1^2 + 9 - a_1^2 b_1^2 + 9a_1^2 > 0 \Rightarrow 9a_1^2 - b_1^2 + 9 > 0 \quad (*)$$

$$D_2 > 0 \Leftrightarrow (b_1 + 7)^2 a_1^2 - (b_1 + 7)^2 a_1^2 - (b_1 + 7)^2 + 4a_1^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$(*) \quad 4a_1^2 - (b_1 + 7)^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{4a_1^2 + 4} > |b_1 + 7| \Leftrightarrow 2\sqrt{a_1^2 + 1} > |b_1 + 7|$$

$$(**) \quad \sqrt{9a_1^2 + 9} > |b_1| \Leftrightarrow 3\sqrt{a_1^2 + 1} > |b_1|$$

$$\sqrt{a_1^2 + 1} > \frac{|b_1 + 7|}{2}$$

$$\sqrt{a_1^2 + 1} > \frac{|b_1|}{3}$$

$$\frac{|b_1|}{3} = \frac{|b_1 + 7|}{2} \Leftrightarrow 2|b_1| = 3|b_1 + 7| \Leftrightarrow -2b_1 = 3b_1 + 21 \Leftrightarrow$$

$$(*) \quad b_1 = -\frac{21}{5}$$

$$\sqrt{a_1^2 + 1} > \frac{7}{5} \Leftrightarrow a_1^2 + 1 > \frac{49}{25} \Leftrightarrow a_1^2 > \frac{24}{25} \Leftrightarrow a_1 < \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$a_1 > \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{6x} x^3 - 4 \quad \text{и} \quad \log_7^4 + 6\log_7 7 = \log_7^2(7^5) - 4$$

Решим первое: $0 < x < \frac{1}{6}, x > 0$

$$\log_7^4(6x) = 2\log_{6x} 7 + \frac{3}{2} \cdot \log_{6x} 7 - 4 \Leftrightarrow \log_{6x} 6x^{\frac{5}{2}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \log_7^4(6x) = \frac{7}{2} \cdot \log_{6x} 7 - 4 \Leftrightarrow \log_7^4 = \frac{7}{2} \log_{6x} 7 - 4$$

$$\Leftrightarrow t^4 = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4 \Leftrightarrow t^5 + 4t - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow 2t^5 + 8t - 7 = 0$$

$$\log_7 y = a \quad 2a^5 + 8a + 7 = 0$$

$$a + t = \log_7 6xy \Rightarrow 7^{a+t} = 6xy \Rightarrow xy = \frac{7^{a+t}}{6}$$

$$f(x) - 7$$

$$f(x) + 7$$

$$f(x) + 2a^5 + 8a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

$$2(a^5 + t^5) + 8(a+t) = 0 \Leftrightarrow (a+t)(a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4) + 4(a+t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+t = 0 \\ a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4 + 4 = 0$$

Ищем корни a_1 и t_1 , углуб. generally уединено и нулем, не имеют делителей $|a| \geq |t|$.

$$1. |a| < 1$$

$$\text{Полож } a^4 \gg 0$$

$$|-a^3 + 1| < 1$$

$$|a^2 + 4| \leq 0$$