



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$\text{Пусть } a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\delta_1}, b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\delta_2}, c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\delta_3}$$

Из условия: (т.к.  $ab: 2^6, \dots$ )

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 6, \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 14 \\ \alpha_3 + \alpha_1 \geq 16 \end{cases}$$

Сложив эти неравенства попарно, это  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 18$ , т.е.

В произведении  $abc$  двоек будет хотя бы 18 штук.  
Записав аналогичную систему для  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$   
получаем, что  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 29,5$ , а т.к.  $\beta_1 \in \mathbb{Z}, \beta_2 \in \mathbb{Z}, \beta_3 \in \mathbb{Z}$ , то

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30.$$

Для  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  аналогично:  $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \geq 26$ .

Тогда  $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$ . Заметим, что это число достигается, если

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5; \quad b =$$

Заметим, что  $\delta_1 + \delta_3 \geq 28$  (из условия). Тогда

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \geq 28 \quad (\text{т.к. } \delta_1, \delta_2, \delta_3 \geq 0).$$

Тогда  $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ . Это число достигается. Пример:

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$$

$$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^0$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{15} = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$c = 2^4 \cdot 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28}; \quad 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

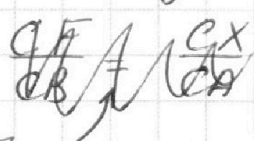
$$\sin \angle ABC = \sqrt{\frac{5}{7}} \quad \sqrt{2} \sin \angle C = \sqrt{2}$$

$$7. \angle ABC = 90^\circ - \angle DCB = \angle ACD$$

$$\frac{XE}{CX} = \sin \angle ACD = \sin \angle ABC = \sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$XA = \sqrt{\frac{7}{2}} XE \quad (\text{из пункта 5}) \quad XA = \sqrt{\frac{7}{2}} \cdot \sqrt{\frac{5}{7}} \cdot CX = \sqrt{\frac{5}{2}} CX$$

$$= 1 + \frac{XA}{CX} = \sqrt{\frac{5}{2}} + 1$$



$$\frac{CB}{CF} = \frac{CA}{CX} = \frac{CX + XA}{CX} =$$

т.к. прямые параллельны

8. Коэф. подобия между  $\triangle CDA$  и  $\triangle BDC$

$$k_1 = \frac{AC}{CB} = \tan \angle ABC = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Коэф. подобия между  $\triangle CDB$  и  $\triangle CEF$

$$k_2 = \frac{CB}{CF} = \sqrt{\frac{5}{2}} + 1$$

Тогда коэф. подобия между  $\triangle CDA$  и  $\triangle FEC$

$$k_3 = k_1 k_2 = \sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2}$$

Тогда отношение их площадей — это  $k_3^2 = \frac{5}{2} + \frac{25}{4} +$

$$+ 2\sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{35}{4} + 5\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{35}{4} + 5\sqrt{\frac{5}{2}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

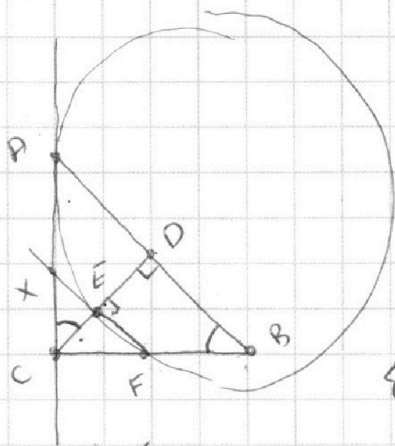
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2. мср 1 ч 2



1. Т.к.  $FE \parallel BD$ , то  $\angle DEF = 90^\circ$ .

2. Из св-ств степени точки X:

$$XA^2 = XE \cdot XF \quad (1)$$

3. Заметим, что  $\frac{XF}{FE} = \frac{AB}{BD}$ , т.к.

$XF \parallel BA$ .

$$4. \frac{XF}{XE} = \frac{XE + EF}{XE} = 1 + \frac{EF}{XE}$$

$$\frac{XF}{FE} = \frac{XE + EF}{FE} = \frac{XE}{EF} + 1. \quad \frac{XE}{EF} = 1,4 - 1 = 0,4$$

$$\frac{EF}{XE} = \frac{5}{2} \quad \frac{XF}{XE} = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2} \quad XF = \frac{7}{2} XE$$

5. Подставим в (1) найдем:

$$XA^2 = \frac{7}{2} XE^2 \quad XA = \sqrt{\frac{7}{2}} XE$$

6. Т.к.  $\triangle DCA \sim \triangle DBC$ , то

$$\frac{DC}{DB} = \frac{CA}{BC} = \frac{AD}{CD} \quad CD^2 = AD \cdot DB$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AD + BD}{BD} = \frac{AD}{BD} + 1 = \frac{7}{5} \quad \frac{AD}{BD} = \frac{2}{5}$$

$$CD^2 = AD \cdot \frac{2}{5} \cdot AD \quad CD = \sqrt{\frac{2}{5}} AD$$

$$\frac{CA}{BC} = \frac{AD}{CD} = \sqrt{\frac{5}{2}} \quad \text{При этом } \frac{CA}{BC} = \frac{CX}{CF}, \text{ т.к. } FE \parallel AB$$

$$\frac{CF}{AC} = \frac{CX \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}}{AC} = \frac{CX \sqrt{\frac{2}{5}}}{AX + XC}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2} = \frac{1}{\cos^2 \angle ABC} \quad \cos^2 \angle ABC = \frac{2}{7} \quad \text{tg}^2 \angle ABC + 1 = \frac{1}{\cos^2 \angle ABC}$$

$\cos \angle ABC = \sqrt{\frac{2}{7}}$  (все углы острые)



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3 (продолжение) лист 2.43.2

$$-10x = 8\pi + 2x \quad -12x = 8\pi \quad x = -\frac{8}{12}\pi = -\frac{2}{3}\pi.$$

Подходит.

3.  $x \in [-2\pi; -\pi]$  Тогда  $\arccos \cos x = x + 2\pi$

$$10x + 20\pi = 8\pi + 2x \quad 8x = -12\pi \quad x = -\frac{3}{2}\pi.$$

Подходит.

4.  $x \in [-3\pi; -2\pi]$   $\arccos \cos x = -(x + 2\pi)$

$$-10(x + 2\pi) = 8\pi + 2x \quad -12x = 28\pi \quad x = -\frac{28}{12}\pi =$$

5.  $x \in [-4\pi; -3\pi]$   $\arccos \cos x = x + 4\pi = -\frac{7}{3}\pi$ . Подходит.

$$10(x + 4\pi) = 8\pi + 2x \quad 8x = -32\pi \quad x = -4\pi.$$

Теперь заменим обратно  $x \rightarrow \frac{\pi}{2} - x$  на  $x$  и получим.

Ответ:  ~~$x = -\frac{\pi}{2}$~~   $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, 2\pi, \frac{17}{6}\pi, \frac{9}{2}\pi.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3. см. 1 и 2

Подставим вместо  $x$  -  $\frac{\sqrt{2}}{2} - x$ :

$$10 \arccos \left( \sin \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - x \right) \right) = 9\pi - 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - x \right)$$

$$10 \arccos (\cos x) = 8\pi + 2x.$$

Заметим, что  $\arccos(\cos x) = x - 2\pi k$ , где  $\arccos$  возвращает значение  $\in [0, \pi]$ . Тогда

~~$$8\pi + 2x \in [0, \pi] \Rightarrow 0 \leq 8\pi + 2x \leq \pi$$~~

~~$$-8\pi \leq 2x \leq -7\pi$$~~

~~$$-4\pi \leq x \leq -\frac{7}{2}\pi \quad x \in \left[-4\pi, -\frac{7}{2}\pi\right]$$~~

~~Заметим, что для таких  $x$   $\arccos(\cos x) =$~~

~~$$= x + 4\pi \quad (\text{ведь } \arccos \text{ возвращает значение } \in [0, \pi])$$~~

~~Также, что  $\cos x = \cos(x + 2\pi k)$ , при этом  $\cos(x + 2\pi k) =$~~~~$= \cos x$ ) Решим получившееся уравнение:~~

~~$$10(x + 4\pi) = 8\pi + 2x$$~~

Тогда:

$$0 \leq 8\pi + 2x \leq 10\pi \quad -8\pi \leq 2x \leq 2\pi$$

$$-4\pi \leq x \leq \pi.$$

Разберём случаи:

1.  $x \in [0, \pi]$ . Тогда  $\arccos \cos x = x$ .

$$10x = 8\pi + 2x \quad 8x = 8\pi \quad x = \pi. \text{ Проверим.}$$

2.  $x \in [-\pi; 0]$ . Тогда  $\arccos \cos x = -x$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

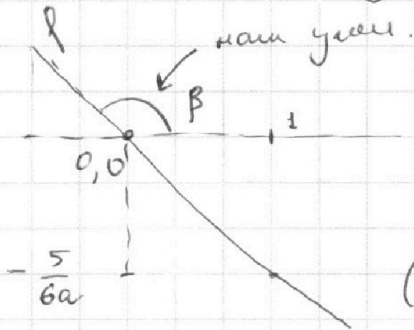
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для парабол касательной очевидно, что  $\sqrt{130}$  лист 3 из 3

$$\operatorname{tg} \alpha > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{130}}{7} \sqrt{\frac{32}{7}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Теперь найдём тангенс угла наклона прямой  $5x + 6ay - b = 0$ . Сдвиг на zero не влияет, поэтому  $b = 0$ :  $5x + 6ay = 0$ .

При  $x = 0$ ,  $y = 0$ . При  $x = 1$ ,  $y = -\frac{5}{6a}$ .



$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{5}{6a}$$

Теперь запишем условие на  $\beta$ :  
( $\beta \in [0, 180^\circ]$ ):

$\beta > \alpha \Rightarrow 1$ . При  $\beta < 90^\circ$ :

$$\beta > \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha \quad -\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{130}}{7} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a < 0 \Rightarrow -\frac{5}{6} < \frac{\sqrt{130} \cdot 4\sqrt{2}}{7} \cdot a \quad a > -\frac{5 \cdot 7}{6 \sqrt{130} \cdot 4\sqrt{2}}$$

и  $a < 0$ . При  $\beta > 90^\circ$   $a > 0$  и необходимо  
проверить, что  $\operatorname{tg} \beta < \operatorname{tg}(180 - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

$$-\frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{130}}{7} \quad \frac{5}{6} > \frac{\sqrt{130}}{7} a \quad a < \frac{5 \cdot 7}{\sqrt{130} \cdot 6}$$

и  $a > 0$ . При  $a = 0$   $\beta = 90^\circ$  и условие выполняется.

~~Ответ:  $a \in \left(-\frac{35}{6\sqrt{130}}; +\frac{35}{6\sqrt{130}}\right)$ .~~

Ответ:  $a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

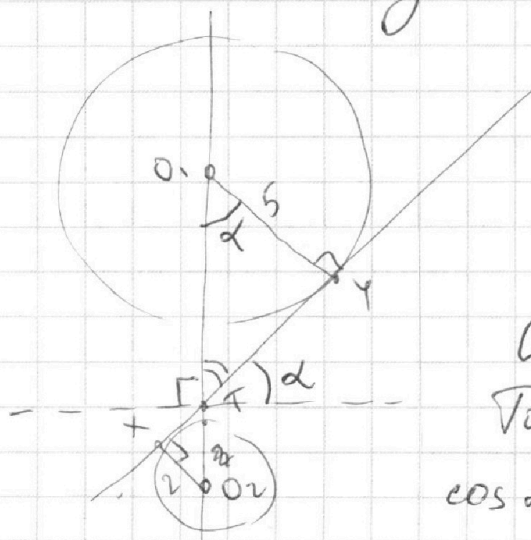
№4 лист 2 из 3

9 и горизонталью (отмечен на рисунке).  
 В одну сторону это очевидно. Действительно, если прямая идет "между" касательными в тех же точках  $m$ -та, то и окружности, то очевидно, что есть 4 точки пересечения, а значит и 4 решения (небольше, ведь у прямой и окр.  $\leq 2$  точек пересечения).

Если же угол между вертикалью и нашей прямой меньше  $\alpha$ , то очевидно, что такая прямая не будет пересекать одну из окружностей, ведь она ~~не может~~ если эта прямая в точке  $T$ , то окр. лежат по разные стороны от неё. Тогда при изменении параметра в (т.е. параллельных прямой) она будет лишь в одной из полуш., а значит не пересекит вторую окр.

Если же угол  $= \alpha$ , то прямая аналогично предсказываему, но возможен ещё и случай касания двух окр. (тогда корней тоже не 4).

Возвращаем угол  $\alpha$ :



Заметим, что  $\triangle O_1YT \sim$

$\sim \triangle O_2XT$ . Тогда

$$\frac{O_1T}{O_2T} = \frac{O_1Y}{O_2X} = \frac{5}{2}$$

$$O_1T + O_2T = 9$$

$$\text{Тогда } O_1T = \frac{9}{7} = 5.$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{\frac{9 \cdot 9}{7}} = \frac{7}{9}$$

$$\text{Тогда } \tan^2 \alpha = \frac{1}{\frac{49}{81}} - 1 = \frac{81}{49} - 1 = \frac{32}{49}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

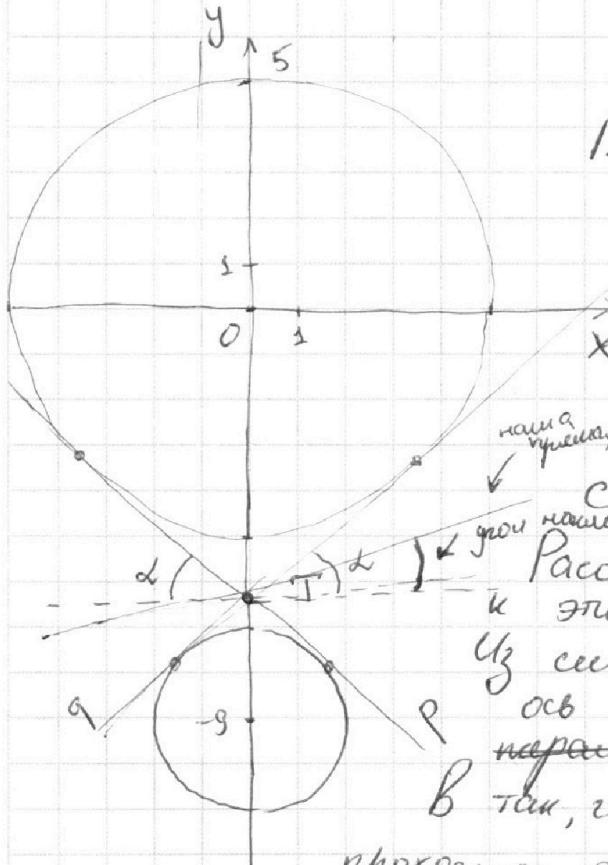


№4. <sup>лист 1 из 3</sup>

Из второго уравнения следует, что

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases}$$

Это уравнения двух окружностей. Первая с центром в  $(0, 0)$  и радиусом 5, вторая с центром в  $(0, -9)$  и радиусом 2.



Уравнение  $5x + 6ay - b = 0$  — это уравнение прямой.

Параметр  $a$  меняет её наклон, а  $b$  — сдвигает её вверх или вниз. Таким образом, нужно выяснить, при каких углах наклона прямая может иметь 4 пересечения с этими окр.

Рассмотрим общие касательные к этим окр:  $p$  и  $q$ .

Из симметрии они обе пересекают ось  $Oy$  в точке  $T$ .

Закрепим параметр  $b$  так, чтобы прямая  $5x + 6ay - b = 0$  проходила через точку  $T$  (так можно сделать всегда).

Утв., что есть ровно 4 решения, тогда и только тогда, когда угол между  $5x + 6ay - b = 0$  и горизонталью  $\in (\alpha, 180 - \alpha)$ , где  $\alpha$  — угол между горизонтальной и  $p, q$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5. мст 1. из 2.

Заметим  $0,5y$  на  $y$ :

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x + \dots \\ \log_{11}^4 y + \log_y 11 = \log_{y^3} (11^{-13}) - 5 \end{cases}$$

Т.к.  $x$  и  $y$  стоят в основании  $\log$ , то  
 $x, y > 0$ ,  $x, y \neq 1$ .

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \frac{1}{3} \cdot (-2) \log_x 11 - \log 5.$$

Пусть  $\log_{11} x = p$ ,  $\log_{11} y = q$ . Получаем:

$$\begin{cases} p^4 - \frac{6}{p} = -\frac{2}{3p} - 5 \\ q^4 + \frac{1}{q} = -\frac{13}{3q} - 5. \end{cases} \quad \begin{array}{l} p \text{ и } q \neq 0, \text{ т.к.} \\ x \text{ и } y \neq 1. \end{array}$$

Здесь  $p$  и  $q \neq 0$ . Тогда

$$\begin{cases} p^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5p \\ q^5 + 1 = -\frac{13}{3} - 5q \end{cases} \quad \begin{cases} p^5 + 5p = \frac{16}{3} \quad (1) \\ q^5 + 5q = -\frac{16}{3} \quad (2) \end{cases}$$

Заметим, что все корни  $q = (2)$  - это корни  $(1)$ ,  
взятые с противоположными знаками. При этом

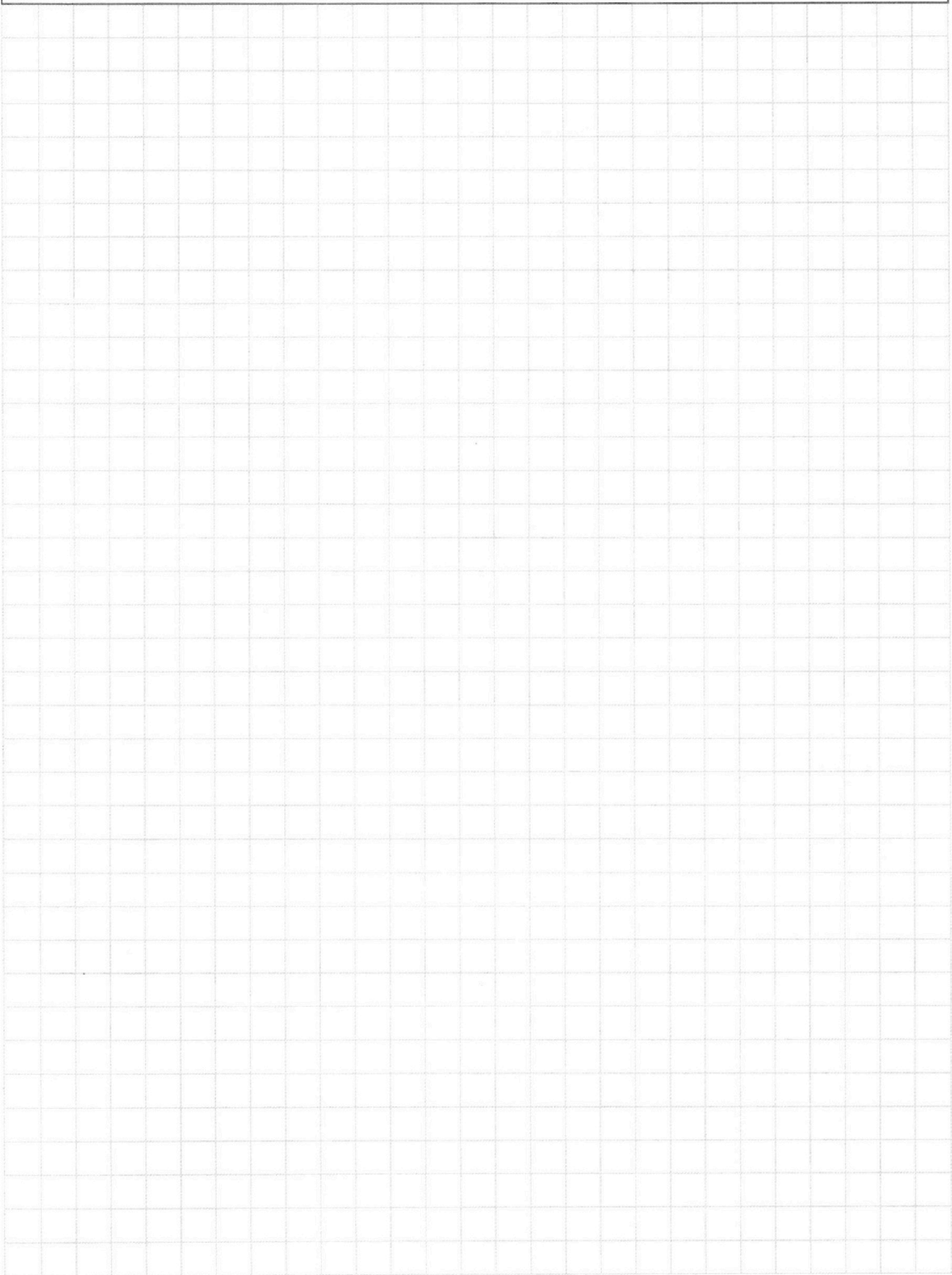
$p+q = \log_{11} x + \log_{11} y = \log_{11} xy$ . Таким образом,  
задача сводится к нахождению всех возможных значений  
 $p+q$ . Заметим, что  $p^5 + 5p$  - строго возрастает.  
Тогда у уравнения  $(1)$  - 1 корень. Пусть это  
число  $t$ . Аналогично у уравнения  $(2)$  -  
1 корень. Это число  $-t$ . Но тогда  $\log_{11} xy$   
 $p+q=0 \Rightarrow \log_{11} xy = 0 \Rightarrow xy = 1$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.  
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





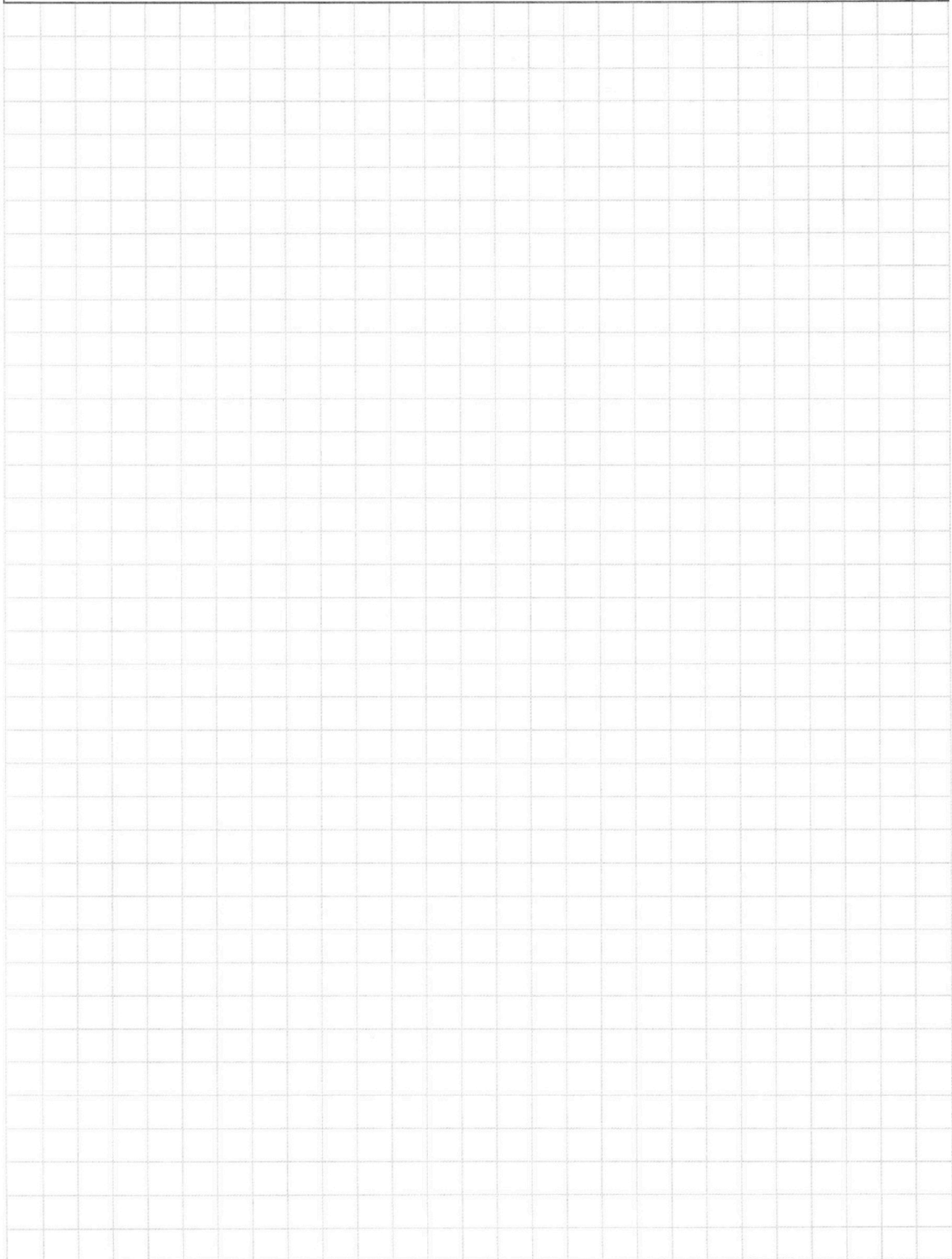
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



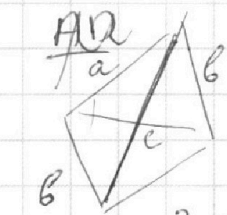
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



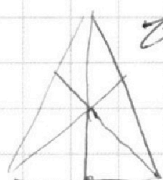
$$a^2 + b^2 + 2(a^2 + b^2 - c^2) =$$

$$= 3a^2 + 3b^2 - 2c^2 \quad (x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 480$$

$$p+q = \log_{11} xy$$



$$CD^2 = AD \cdot BD$$



$$4/3 = a^2 + b^2 - 2 \cos \dots \cdot ab$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cos \dots \cdot ab$$

$\triangle ACD \sim \triangle CBD$

$$k = \frac{AC}{CB} = \frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD}$$

$$\frac{CX}{XA}$$

$$XA = \sqrt{\frac{12}{7}} XE$$

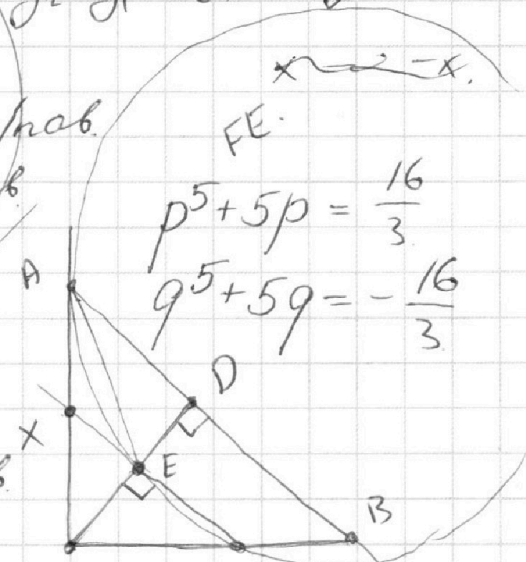
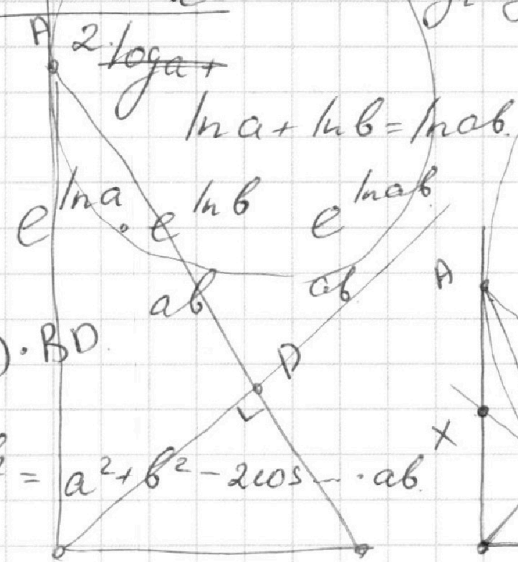
$$XA^2 = \frac{12}{7} XE^2$$

$$XF = \frac{12}{7} XE$$

$$= \frac{12}{7}$$

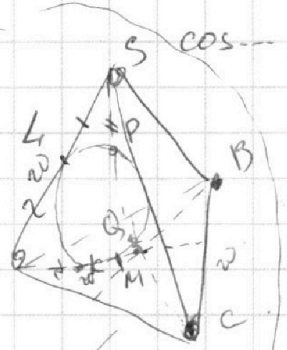
$$1,4 \quad \frac{14}{10} = \frac{7}{5} \quad \frac{5}{7}$$

$$= 1 + \frac{EF}{XE} = 1 + \frac{1}{1,4} = 1 + \frac{5}{7} =$$

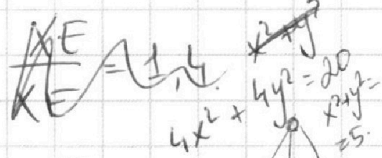


$$p^5 + 5p = \frac{16}{3}$$

$$q^5 + 5q = -\frac{16}{3}$$



$$XA^2 = XE \cdot XF$$



$$\frac{XF}{XE} = 1,4$$

$$XA^2 = 1,4$$

$$\frac{XF}{XE} = 1,4$$

$$= XE + XEF$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper. The work includes:

- Initial calculations:  $1+2=11$ ,  $2+3=13$ ,  $3+1=28$ ,  $27$ ,  $3-28$ .
- Diophantine equations:  $2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$ ,  $2^{14}$ ,  $2^{16} \cdot 3^{21} \cdot 5^{28}$ ,  $2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$ ,  $2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$ .
- Sum of exponents:  $\Sigma = 26$ ,  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{21+25+13}{2} = \frac{46+13}{2} = \frac{59}{2} = 29,5$ .
- Arithmetic progressions:  $d_1 + d_2 \geq 6$ ,  $d_2 + d_3 \geq 14$ ,  $d_3 + d_1 \geq 16$ ,  $2(d_1 + d_2 + d_3) \geq 36$ .
- Diophantine equations:  $3p^5 + 15p = 16$ ,  $3p^5 + 15p - 16 = 0$ ,  $3p^5 + 15p = 16$ .
- Other calculations:  $\frac{11+13+28}{2} = 14+12=26$ ,  $34+25=59$ ,  $24+28=52$ ,  $\frac{21+25+13}{2}$ ,  $\frac{46+13}{2} = \frac{59}{2} = 29,5$ ,  $2x+1=0$ ,  $x = -\frac{1}{2}$ .
- Final calculations:  $\frac{3}{32} + \frac{15}{2} = \frac{3}{32} + \frac{15 \cdot 16}{2 \cdot 16} = \frac{3}{32} + \frac{120}{16} = \frac{3}{32} + 7,5 = 7,515625$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

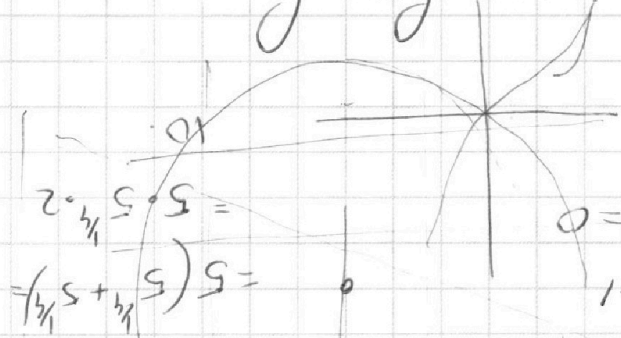


$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

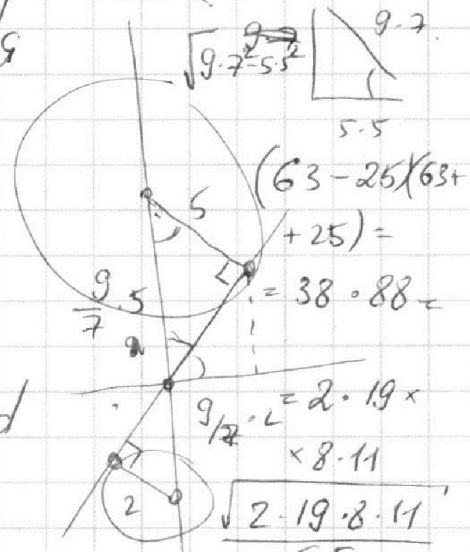
$$x^2 + (y + 9)^2 - 81 + 77 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \cos^2 + \sin^2 &= 1 \\ 1 + \frac{1}{\cos^2} &= \frac{1}{\cos^2} \end{aligned} \quad x^2 + (y + 9)^2 = 4$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \cdot \frac{9 \cdot 7}{5} \\ \frac{9}{7} \cos^2 x + 1 &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

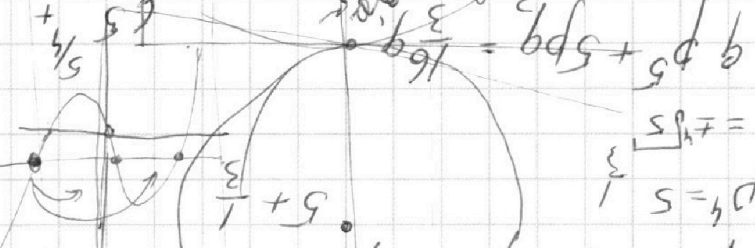


$$\begin{aligned} 5p + 5 &= 0 \\ p &= -5 \end{aligned}$$



$$\frac{1}{16} \sum (p+q) = \frac{1}{16} (p+q) = \frac{1}{16} (p+q)$$

$$\begin{aligned} (63 - 25)(63 + 25) &= 38 \cdot 88 \\ &= 2 \cdot 19 \cdot 8 \cdot 11 \end{aligned}$$

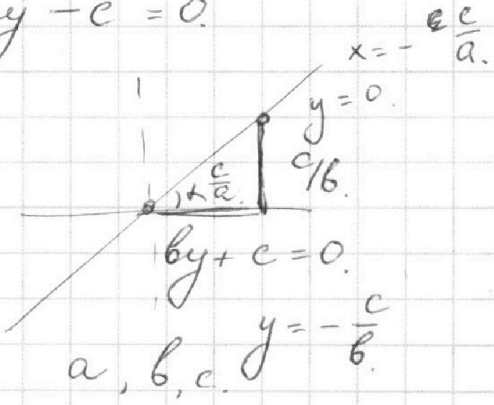
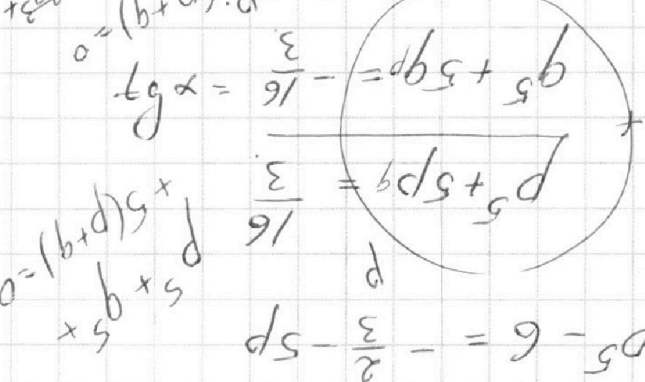


$$\begin{aligned} p &= 5 \\ p &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{9}{7} \\ \cos \alpha &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= 5 \\ p &= -5 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 - 25 - ax - by - c = 0$$



$$\begin{aligned} a &= (b+d) \cdot d \\ &= (b+d) \cdot d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= 5 \\ p &= -5 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

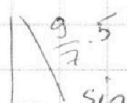
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~arcsin~~  
 $\log_y \cdot \log_x = 1$   
 $\log_x y = \frac{1}{\log_y x}$

$\log_5^4 x - 6 \log_5^4 11 = 3 \log_5^4 x^{1/2} - 5$   
 $\log_5^4 x = 4 \log_5^4 11 + \frac{5}{3}$

$\arccos(\sin x)$



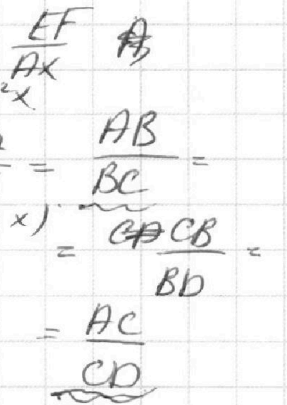
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

~~arccos x~~

$\alpha = \arccos(\sin x)$

$\cos \alpha = \sin x$

~~$\sin^2 \alpha$~~   $\sin \alpha =$



~~$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$~~

$\arccos x$      $\arcsin x$

$\frac{\pi}{2} -$

~~$x = \frac{\pi}{2}$~~

$\frac{\pi}{2} - x$

$\sin(90^\circ - x) = \cos x$

$10 \arccos(\cos x) = 9\pi - \pi + 2x$

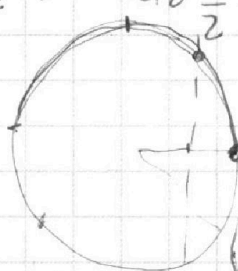
$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6}$

$10x = 8\pi + 2x$

$CD = \frac{t}{2} BD$

$CD^2 = \frac{t}{2} BD^2$

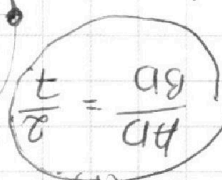
$AD = \frac{t}{2} BD$



$\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

$\frac{1}{2} + \frac{8}{2} = \frac{9}{2}$

$\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi$



$\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi = \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{6}\pi$

$\frac{AD}{BD} + 1 = \frac{5}{2} = \frac{EF}{EF}$

$CD^2 = AD \cdot DB$

$\frac{CD}{AD} = \frac{DB}{CD}$

$\frac{AD}{CE} = \frac{CD}{AD} = \frac{DB}{CD}$