МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Обозначим за α_p — степень, в которой число (простое) p входит в a; аналогично β_p — в число b, γ_p — в число c.

Тогда 1) $ab \vdots 2^7 \Leftrightarrow 2^{\alpha_2}\cdot 2^{\beta_2} \vdots 2^7 \Leftrightarrow \alpha_2+\beta_2 \geq 7$.

Аналогично $bc \vdots 2^{13} \Leftrightarrow \beta_2+\gamma_2 \geq 13$ и $ac \vdots 2^{14} \Leftrightarrow \alpha_2+\gamma_2 \geq 14 \Rightarrow (\alpha_2+\beta_2)+(\beta_2+\gamma_2)+(\alpha_2+\gamma_2) \geq 7+13+14 = 34 \Rightarrow \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geq 17$. ■

2) $ab \vdots 3^{11} \Leftrightarrow 3^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3} \vdots 3^{11} \Leftrightarrow \alpha_3+\beta_3 \geq 11$. Аналогично $bc \vdots 3^{15} \Leftrightarrow \beta_3+\gamma_3 \geq 15$ и $ac \vdots 3^{17} \Leftrightarrow \alpha_3+\gamma_3 \geq 17 \Rightarrow (\alpha_3+\beta_3)+(\beta_3+\gamma_3)+(\alpha_3+\gamma_3) \geq 11+15+17 = 43 \Rightarrow \alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \geq 21,5$. Т.к. $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — целые, то $\alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \geq 22$ ■

3) $ab \vdots 5^{14} \Leftrightarrow 5^{\alpha_5}\cdot 5^{\beta_5} \vdots 5^{14} \Leftrightarrow \alpha_5+\beta_5 \geq 14$. Ан-но $ac \vdots 5^{43} \Leftrightarrow \alpha_5+\gamma_5 \geq 43 \Rightarrow$

т.к. $\alpha_5+\gamma_5 \geq 43 \Rightarrow \alpha_5+\beta_5+\gamma_5 \geq 43$ ■

Заметим, что $a \geq 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\alpha_3}\cdot 5^{\alpha_5}$, $b \geq 2^{\beta_2}\cdot 3^{\beta_3}\cdot 5^{\beta_5}$ и $c \geq 2^{\gamma_2}\cdot 3^{\gamma_3}\cdot 5^{\gamma_5}$ (ибо по опр. $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ числа $2^{\dots}, 3^{\dots}, 5^{\dots}$ входят в числа a, b, c) $\Rightarrow$

$\Rightarrow a\cdot b\cdot c \geq 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\alpha_3} \cdots 5^{\gamma_5} = 2^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\cdot 3^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3}\cdot 5^{\alpha_5\cdot\beta_5\cdot\gamma_5} \geq 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$.

То есть $abc \geq 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$.

Пример: $a = 2^4\cdot 3^6\cdot 5^{24}$, $b = 2^3\cdot 3^5\cdot 5^0$, $c = 2^{10}\cdot 3^{11}\cdot 5^{19}$.

Действительно $abc = 2^{4+3+10}\cdot 3^{6+5+11}\cdot 5^{24+0+19} = 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$,

$ab = 2^{4+3}\cdot 3^{6+5}\cdot 5^{24} = 2^7\cdot 3^{11}\cdot 5^{24} \vdots 2^7\cdot 3^{11}\cdot 5^{14}$, $bc = 2^{3+10}\cdot 3^{5+11}\cdot 5^{19} = 2^{13}\cdot 3^{16}\cdot 5^{19} \vdots 2^{13}\cdot 3^{15}\cdot 5^{18}$ и $ac = 2^{4+10}\cdot 3^{6+11}\cdot 5^{24+19} = 2^{14}\cdot 3^{17}\cdot 5^{43} \vdots 2^{14}\cdot 3^{17}\cdot 5^{43}$.

Ответ: $2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$.

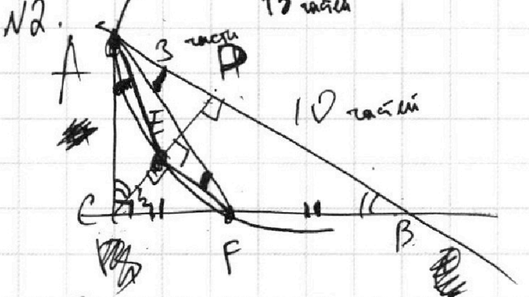
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2.



$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{3}{10}$.

$\angle CAE = \angle EFA$ (уг. между кас-ой и хордой)

$EF \parallel AB \Rightarrow \angle EFA = \angle FAB$; $\Rightarrow \angle FAB = \angle EAC$.

$\angle ACD = 90 - \angle CAD = 90 - \angle CAB = \angle CBA$, т.е. $\angle ACD = \angle CBA$.

значит, $\triangle CEA \sim \triangle BFA$ по двум углам. $\Rightarrow$

$EF \parallel DB \Rightarrow \angle CEF = \angle CDB = 90$. $\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CDB$ по 2ум углам

$\Rightarrow \frac{CE}{CA} = \frac{BF}{BA}$ и $\frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow BF = CE \cdot \frac{AB}{AC}$, $CF = CE \cdot \frac{CB}{CD}$.

по в $\triangle ABC$: $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sin\angle B}$, в $\triangle CDB$: $\frac{CB}{CD} = \frac{1}{\sin\angle B} \Rightarrow$

$\Rightarrow BF = CE \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{CE}{\sin\angle B} = CE \cdot \frac{CB}{CD} = CF$, т.е. $BF = CF$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{EF}{DB} = \frac{CF}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} = \frac{\frac{1}{2} CE \cdot EF}{\frac{1}{2} CD \cdot DB} =$

$= \frac{CE}{CD} \cdot \frac{EF}{DB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

$\frac{S_{ACD}}{S_{CDB}} = \frac{\frac{1}{2} AD \cdot DC}{\frac{1}{2} CD \cdot DB} = \frac{AD}{DB} = \frac{3}{10}$ $\Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} : \frac{S_{ACD}}{S_{CDB}} = \frac{1}{4} : \frac{3}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{ACD}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{6}{5}$.

Ответ: $\frac{6}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$.

$\sin x = \cos y \Rightarrow \arccos(\cos y) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow y = \pm\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin x = \cos\left(\pm\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k\right)\right)$

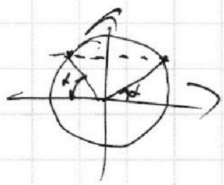
$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k\right)$.

$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$

$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)\right)$ $\quad \cancel{\frac{5\pi}{10} - \frac{3\pi}{10} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}}$

$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{5}\right)$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2\pi k = \frac{\pi}{5} - \frac{x}{5} \\ x + 2\pi k = \pi - \left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{5}\right) \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$



$$\left[\begin{array}{l} \frac{6}{5}x = \frac{\pi}{5} - 2\pi k \\ \frac{4}{5}x = \frac{4\pi}{5} - 2\pi k \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} \\ x = \pi - \frac{5\pi k}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3}$ или $x = \pi - \frac{5\pi k}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 [X] 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(2 стр.) №4.

Тогда $l_1: \; y = kx + t_0$
$l_2: \; y = -kx + t_0'$

t_0 такой, что $x = -t$ при $y = 0$, т.е.

$0 = kx + t_0$ $\qquad$ $t_0': \; 0 = -k(-t) + t_0'$

$0 = -kt + t_0$ $\qquad$ $t_0' = -kt.$

$t_0 = kt.$

Т.е. $l_1: \; y = kx + kt$
$l_2: \; y = -kx - kt.$

Найдём t, k.

~~урав~~ системы ① $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ y = kx + kt \end{cases}$ 1 решение, т.к. 1 общ. точка.

② $\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ y = kx + kt \end{cases}$ 1 решение анал-но.

из ① $x^2 + (kx + kt)^2 = 9$

$x^2(k^2+1) + x(2k^2t) + k^2t^2 - 9 = 0$

1 решение => дискр. = 0. Т.е. $(2k^2t)^2 - 4(k^2t^2 - 9)(k^2+1) = 0$

$(k^2t)^2 - (k^2t^2 - 9)(k^2+1) = 0.$

$-k^2t^2 + 9k^2 + 9 = 0.$

из ② $\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ y = kx + kt \end{cases}$ следует $(x+7)^2 + (kx + kt)^2 = 4.$

$x^2 + 14x + 49 + k^2x^2 + 2x \cdot k^2t + k^2t^2 - 4 = 0.$

$x^2(k^2+1) + x(14 + 2k^2t) + k^2t^2 + 45 = 0$

$D = 0$, т.к. 1 решение => $(14 + 2k^2t)^2 - 4(k^2t^2 + 45)(1 + k^2) = 0$

$(7 + k^2t)^2 = (k^2t^2 + 45)(1 + k^2)$

$49 + 14k^2t + k^4t^2 = k^2t^2 + k^4t^2 + 45 + k^2 \cdot 45$

$4 + 14k^2t = k^2t^2 + k^2 \cdot 45.$

Т.е. $\begin{cases} 4 + 14k^2t = k^2t^2 + 45k^2 \\ 9k^2 + 9 = k^2t^2. \end{cases}$ $\qquad k^2(9 - t^2) = -9$

$k^2 = -\frac{9}{9 - t^2}.$

$4 + 14\left(\frac{-9}{9-t^2}\right)t = \frac{-9}{9-t^2}t^2 + 45\left(\frac{-9}{9-t^2}\right) \; \Big| \cdot (9 - t^2)$

$4(9 - t^2) - 14 \cdot 9t = -9t^2 - 9 \cdot 45.$

$36 - 4t^2 - 126t = -9t^2 - 405$

$5t^2 - 126t + 441 = 0$

$D = 126^2 - 4 \cdot 5 \cdot 441 = 126^2 - 4 \cdot 5 \cdot 21^2 = (21 \cdot 6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 21^2 =$

$= 21^2(6^2 - 4 \cdot 5) = 21^2(36 - 20) = 21^2 \cdot 16 = (21 \cdot 4)^2 = 84^2.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

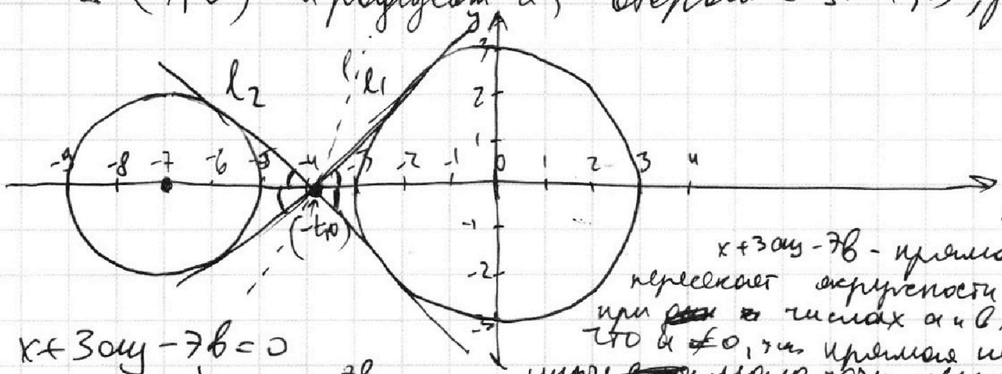
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4. (1 стр.)

$$\left[\begin{array}{l} x^2+14x+y^2+45=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=2^2 \\ x^2+y^2=3^2 \end{array}\right.$$

Нарисуем графики обеих окружностей: первая с ц. $(-7;0)$ и радиусом 2, вторая с ц. $(0;0)$, рад. 3.



$x+3ay-7b$ – прямая, которая пересекает окружности в 4х точках при ~~...~~ числах a и b. Очевидно, что $a\neq 0$, т.к. прямая не перп-а осям, иначе ~~...~~ мало точек пересечения.

$x+3ay-7b=0$

$y=-\frac{1}{3a}x+\frac{7b}{3a}$

~~$x-7b=-3ay$~~ – для чисел a и b это – уравнение прямой. ~~...~~ $-\frac{1}{3a}$ коэфф. при x, т.е. tg наклона, $-7b/3a$ задаёт, в какой точке пересечёт прямая с данным наклоном оси.

Проведём общие кас-ые (внутренние) к окружностям. Из симметрии они пересекутся в точке на оси абсцисс, т.е. $(-t;0)$ $t>0$.

Обозначим прямую с наибольшим тангенсом наклона за l_1, вторую – за l_2.

~~l_1: $x+t=ky$ (наклон) т.е. $y=\frac{1}{k}x+\frac{t}{k}$~~

~~l_2: $x+t=-ky$ (k – угол между прямыми и осью y. Очевидно, он одинаковый для l_1 и l_2.~~

~~Если наклон-то прямой l пересек. x под большим, чем l_1, но меньшим или равным, чем l_2 (то легко видеть, что она не может пересечь обе окр. сразу, т.е. не может быть 4х решений) Она не такая. Если не такая, то примем $7b=t3a$, $b=\frac{3at}{7}$ и для этой прямой l: $x-7b=-3ay$ будут 4 решения.~~

~~Нужно найти t, k.~~

~~$\begin{cases} x^2+y^2=3^2 \\ x+t=ky \end{cases}$ 1 решение т.к. ур-ия окр. 1 точка пересеч.~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(зар.) №4.

$t = \frac{126 \pm 84}{5 \cdot 2}$. Нам подойдёт ~~большее~~ меньшее

t, т.к. мы рассматриваем точку пересечения внутренних общ. кас-ых (внешних будет дальше от нуля)

$t = \frac{126 - 84}{5 \cdot 2} = \frac{63 - 42}{5} = \frac{21}{5}$.

$k^2 = -\frac{9}{9 - t^2} = \frac{9}{t^2 - 9} = \frac{9}{(\frac{21}{5})^2 - 9} = \frac{1}{(\frac{7}{5})^2 - 1} = \frac{5^2}{7^2 - 5^2} =$

$= \frac{5^2}{2 \cdot 12} = \frac{5^2}{4 \cdot 6}$

нас интересует пр. l_1, поэтому $k > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{2 \cdot 6} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$.

~~прямая нам подойдет с ~~коэфф.~~ угла наклона~~

~~$(-k; k) \Rightarrow \frac{1}{3a} \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{12}; \frac{5\sqrt{6}}{12}\right)$~~

~~$\frac{1}{3a} \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{12}; \frac{5\sqrt{6}}{12}\right)$~~

~~$-\frac{5\sqrt{6}}{12} < \frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12}$~~

~~$\begin{cases} \frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12} \\ \frac{1}{3a} > -\frac{5\sqrt{6}}{12} \end{cases}$ $\begin{cases} a > \frac{12}{3 \cdot 5\sqrt{6}} \\ \frac{1}{a} > -\frac{5\sqrt{6}}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} a > \frac{4\sqrt{6}}{5 \cdot 6} \\ -5\sqrt{6}a < 4 \end{cases}$~~

~~$\begin{cases} a > \frac{2\sqrt{6}}{15} \\ a > -\frac{4}{5\sqrt{6}} \end{cases}$ $\begin{cases} a > \frac{2\sqrt{6}}{15} \\ a > -\frac{4\sqrt{6}}{5 \cdot 6} = -\frac{2\sqrt{6}}{15} \end{cases}$.~~

~~Значит, $a > \frac{2\sqrt{6}}{15}$.~~

~~Ответ: $\left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$~~ (коэфф.)

Заметим, что если у прямой угол наклона будет $\geq k$, то она не сможет пересечь сразу 2 окружности (см. рис) или 2,

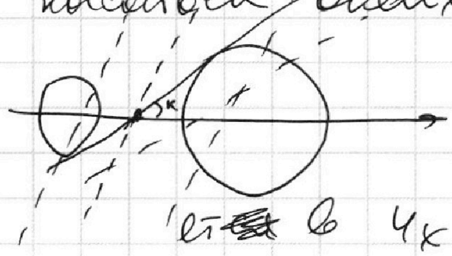
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(4 стр.) №4.
но касается обеих.



аналогично, если ~~коэф.~~ угла наклона $\le -k$, то прямая не пересекает ~~ся~~ в 4х точках.

Значит, коэф. угла $\alpha \in (-k; k)$.

т.е. ур. пр. $y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$

~~угол~~ $-\frac{1}{3a} \in (-k; k) \Rightarrow -k < -\frac{1}{3a} < k \Rightarrow$

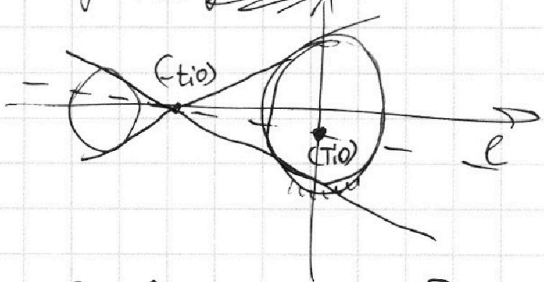
$\Rightarrow \begin{cases} -k < -\frac{1}{3a} \\ -\frac{1}{3a} < k \end{cases}$ $\begin{cases} k > \frac{1}{3a} \\ -\frac{1}{3k} < a \end{cases}$ $\begin{cases} a > \frac{1}{3k} \\ a > -\frac{1}{3k} \end{cases}$, т.е. $a > \frac{1}{3k}$,

т.к. $k > 0 \Rightarrow a > \frac{1}{3k} = \frac{1}{3 \cdot \frac{5\sqrt6}{12}} = \frac{12}{3 \cdot 5\sqrt6} = \frac{12\sqrt6}{3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{2\sqrt6}{15}$.

т.к. $a > \frac{2\sqrt6}{15}$, то $a \ne 0 \Rightarrow$ для любого

a существ. $\frac{7b}{3a} = \cancel{t}$ (для любого t), поэтому мы сможем

провести такую прямую через точку $(-t; 0)$ ~~с углом~~ между внутр.-нас.:



$l: \ y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3b}$.

Ответ: $\left(\frac{2\sqrt6}{15}; +\infty\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5. $\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{(6x)^2} 7^3 - 4$ $6x>0$, $\exists t = 6x$. $t \neq 1$.

$\log_7^4 t - 2\log_t 7 = \frac{3}{2}\log_t 7 - 4$

$\log_7^4 t = 3{,}5\log_t 7 - 4$

$\log_7^4 t = \frac{3{,}5}{\log_7 t} - 4$, т.к. $\log_x y \cdot \log_y x = 1$.

$\log_7^5 t = 3{,}5 - 4\log_7 t$ (1)

$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \frac{5}{2}\log_y 7 - 4$.

$\log_7^4 y = -3{,}5\log_y 7 - 4$

$\log_7^5 y = -3{,}5 - 4\log_7 y$. (2)

Сложим (1) и (2):

$\log_7^5 y + \log_7^5 t = -4(\log_7 t + \log_7 y)$.

$\log_7^5(yt) = -4\log_7(yt)$.

$\log_7(yt)\left(\underbrace{\log_7^4(yt)}_{\geq 0\text{, т.к. четн. степень}} + 1\right) = 0$.

$\log_7(yt) = 0$.

$yt = 1$.

$t = 6x \Rightarrow$ $6x \cdot y = 1$

$xy = \frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\left(\log_7(6x)\right)^4 - 2\log_{(6x)}7 = \frac{3}{2}\log_{(6x)}7 - 4$$

$1{,}5$

$\log_7^4(6x) - 3{,}5\log_{6x}7 = -4.$

$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$

$b \cdot a^{\log_b a} = a$

$\cancel{a^{\log_b a} = \frac{a}{b}}.$

$\log_7^4 y = -3{,}5\log_y 7 - 4$

$\log_7^4(t) = \frac{3{,}5}{\log_7 t} - 4.$

$\log_7^5 t = 3{,}5 - 4\log_7 t.$

$\log_7^5 y = -3{,}5 - 4\log_7 y.$

$\log_7^5 t + \log_7^5 y = -4\log_7(ty).$

$\log_a b \cdot \log_b a = 1$

$b \cdot a^{\log_b a} = a$

$a = b^{\log_b a}$

$b \cdot b^{\log_b^2 a} = a.$

$\log_a b \cdot \log_b a = 1$

$a^{\log_a b} \cdot a^{\log_b a} = a$

$a^{\log_b a} = \frac{a}{b}. \mid \log_a$

$\log_a a^{\log_b a} = \log_a \frac{a}{b}.$

$a^{\log_b a - 1} = b^{-1}$

$\log_b a = \log_a a - \log_a b$

$\log_b a + \log_a b = 1$

$\log_7^4(6x) = 3{,}5\log_{6x}7 - 4$

$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \frac{5}{2}\log_y 7 - 4.$

$2{,}5$

$$\begin{cases} \log_7^4 y = -3{,}5\log_y 7 - 4 \\ \log_7^4(t) = 3{,}5\log_t 7 - 4. \end{cases}$$

$\log_y 7 = \frac{\log_7 7}{\log_7 y} = \frac{1}{\log_7 y}.$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$

$\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b.$

$\log_a b \cdot \log_b a = \log_a a = 1.$

$\cancel{\log_{ab} x = c}$

$\cancel{x = ab^c = a^c \cdot b^c}$

$c^n \cdot c^n = c^x$

$a^n \cdot b^n = c^x$

$(ab)^n = c^x$

$\log_c^n ab = x$

$\log_7^5 y = -3{,}5 - 4\log_7 y$

$\log_7^5 t = 3{,}5 - 4\log_7 t$

$\log_7^5 t + \log_7^5 y$

$\log_c^n a + \log_c^n b = x$

$c^n + c^n = c^x$

$\log_a c \cdot \log_a b = \log_a(c+b)$

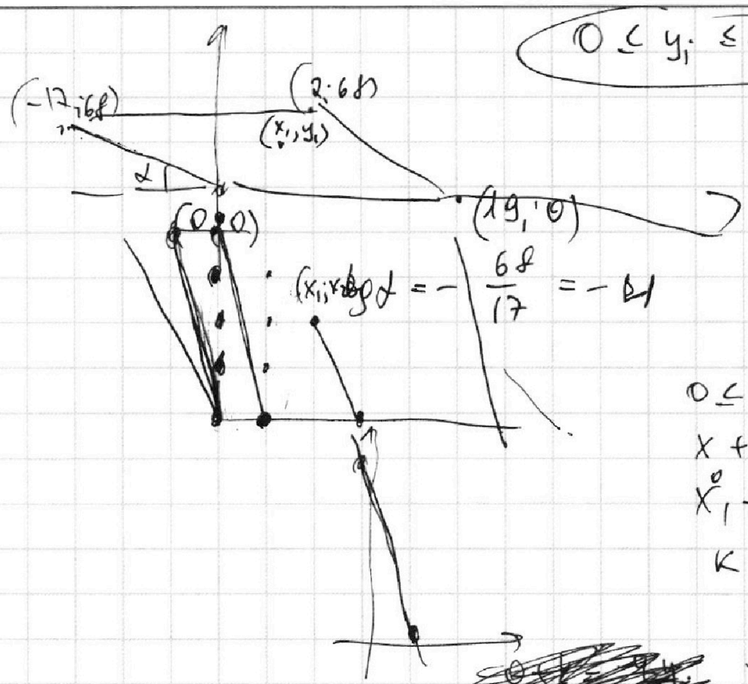
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$0 \le y_1 \le 68$



$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40.$

$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40.$

$x_2 - x_1 \le 19.$

$0 \le k \le 19$

$x + k = -4y.$

$x_1 + k = -4y_1.$

$k =$

$x + 1 = -4y.$

$y =$

$441 \mid 9$, 36, 81, 49

$(7 \cdot 3)^2 = 21^2.$

$126^2 - 9 \cdot 21^2 5 =$

$4(63^2 - 21^2 \cdot 5) =$

$\cancel{= 4 \cdot 9(21^2 -}$

$4((21 \cdot 3)^2 - 21^2 \cdot 5) =$

$= 4 \cdot 21^2(3^2 - 5) =$

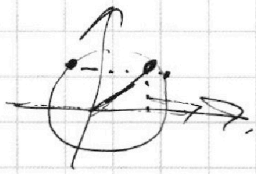
$= 4 \cdot 21^2 \cdot 4$

$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}.$

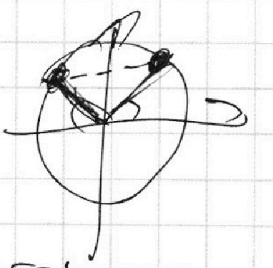
$\sin x = \cos y$

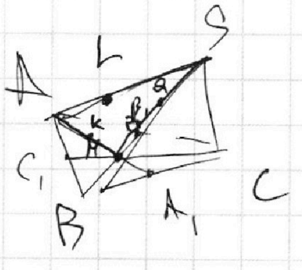
$y = \frac{5\pi}{10} + \frac{x}{5}.$

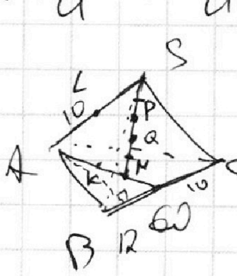
$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$



$\frac{3\pi}{10}$







$\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} = \pi - \frac{5\pi k}{2} \Big| \cdot 6$

$\pi - 10\pi k = 6\pi - 15\pi k.$

$1 - 10k = 6 - 15k$

$5k = 5$

$k = 1.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (2 стр.)

$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x = ky - t \end{cases} \Rightarrow (ky-t)^2+y^2=9$

$y^2(k^2+1) - 2kty + t^2-9=0$

1 решение $\Rightarrow$ дискр. $=0 \Rightarrow (2kt)^2-4(t^2-9)(k^2+1)=0$

$(kt)^2-(t^2-9)(k^2+1)=0.$

$-t^2+9k^2+9=0.$

$t^2=9k^2+9.$

аналогично 1 решение у $\begin{cases}(x+7)^2+y^2=4 \\ x=ky-t.\end{cases}$

$(ky-t+7)^2+y^2=4.$

$y^2(k^2+1)-y(2kt-14k)+t^2+\overset{45}{7^2-4}-14t=0.$

$D=0$, т.к. $(2kt-14k)^2-4(t^2-14t+45)(k^2+1)=0$

$(kt-7k)^2-(t^2-14t+45)(k^2+1)=0.$

$k^2t^2-14k^2t+49k^2-k^2t^2-t^2+14k^2t+14t-45k^2-45=0$

$4k^2-t^2+14t-45=0$

Значит, $\begin{cases} t^2=9k^2+9 & |\cdot 4 \\ 4k^2=t^2-14t+45 & |\cdot 9 \end{cases}$ $\begin{cases} 4t^2=36k^2+36 \\ 36k^2=9t^2-9\cdot14t+9\cdot45 \end{cases}$

$4t^2=9t^2-9\cdot14t+9\cdot45+36$

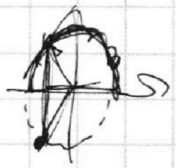
$5t^2-9\cdot14t+9\cdot45+36=0$

$D=(9\cdot14)^2-4(9\cdot45+36)(5)=9\cdot4(9\cdot7^2-(45+4)(5))=$
$=9\cdot4\cdot7^2(9-5)=3^2\cdot2^2\cdot7^2\cdot2^2$

$t=\frac{9\cdot14\pm\sqrt{3^2\cdot2^2\cdot7^2\cdot2^2}}{2\cdot5}$. Нам нужен t-меньший корень, т.к. общие касательные - внутренние.

$t=\frac{9\cdot14-3\cdot2\cdot7\cdot2}{2\cdot5}=\frac{9\cdot7-3\cdot7\cdot2}{5}=\frac{63-42}{5}=\frac{21}{5}=4{,}2.$

$9k^2+9=t^2=(4{,}2)^2=\left(\frac{21}{5}\right)^2.$



$k^2+1=\left(\frac{7}{5}\right)^2.$

$k^2=\frac{7^2-5^2}{5^2}=\frac{2\cdot12}{5^2}=\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot6$

$k>0 \Rightarrow k=\frac{2}{5}\sqrt{6}$

коэфф. от $-k$ до k не включительно нам подходят.

Значит, $-3a\in\left(-\frac{2}{5}\sqrt{6};\ \frac{2}{5}\sqrt{6}\right)$

$a\in\left(-\frac{2}{15}\sqrt{6};\ \frac{2}{15}\sqrt{6}\right)$

Ответ: $a\in\left(-\frac{2}{15}\sqrt{6};\ \frac{2}{15}\sqrt{6}\right).$

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+14x+y^2+45=0 \\ x^2+y^2=9 \end{array}\right. \end{cases}$$

1) $x=0$ – решение.

$$\begin{cases} 3ay=7b \\ (y^2+45)(y^2-9)=0 \end{cases} \quad y=\pm 3$$

$\pm 9a = 7b$

Есть ещё 2 решения $\Rightarrow y=0$ тоже реш.

$$\begin{cases} x=7b. \\ (x^2+14x+45)(x^2-9)=0. \\ D=14^2-4\cdot 45 = 4(7^2-45)=4\cdot 4 \end{cases}$$

$(x+5)(x+9)$

$(x+5)(x+9)(x-3)(x+3)=0$ 4 решения сел всего $\Rightarrow$

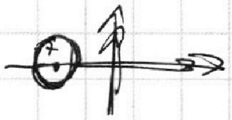
$x=ky-t.$

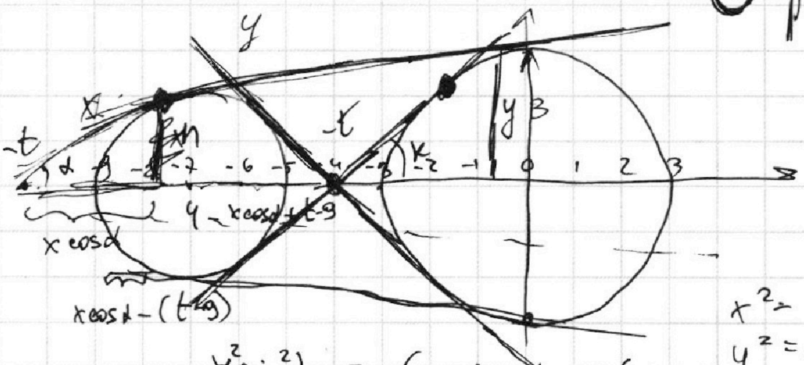
$\Rightarrow$ ф-кореней нет.

x

$x^2+14x+49+y^2-4=0.$

$(x+7)^2+y^2=2^2$





$a\neq 0$, т.к. прямая очевидно не горизонт-на

$x-7b=-3ay.$

$y=-\frac{1}{3a}x+\frac{7b}{3a}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{t}.$

$x^2=(t-9)(t-5)$ $\quad t^2-14t+45=x^2$

$y^2=(t-3)(t+3)$

$x^2\sin^2\alpha = (x\cos\alpha - t+9)(t+x\cos\alpha-5)$

$1-x^2\cos^2\alpha = xt\cos\alpha - x^2\cos^2\alpha - 5x\cos\alpha - t^2 + xt\cos\alpha + 5t +$
$+9t-9x\cos\alpha-45$

$$1 = 2xt\cos\alpha - 14x\cos\alpha + \underbrace{14t-t^2-45}_{-x^2}$$

$$1 = 2xt\cos\alpha - 14x\cos\alpha - x^2.$$

$x-7b=3ay.$

$D=k^2t^2-(t^2-9)(k^2+1)=$
$=-t^2+9k^2+9=0$
$t^2=9k^2+9.$

$$\begin{cases} x-t=ky \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$$ 1 решение

$(t+ky)^2+y^2=9.$ 1 реш $\Rightarrow$ $(ky+t)^2+y^2=9.$

$\Rightarrow D=0.$ $\quad y^2(k^2+1)+2kty+t^2-9=0.$

$y^2(k^2+1)+2kty+t^2-9=0.$

$D=(2kt)^2-4(t^2-9)(k^2+1)=0.$

$(kt)^2-(t^2-9)(k^2+1)=0.$

$-t^2+9k^2+9=0$

$D=(2kt)^2+4\cdot 9(k^2+1)=$
$=4k^2t^2+4\cdot 9k^2+4\cdot 9=$
$=4\left((kt)^2+(3k)^2+3^2\right).$

МФТИ

$2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$

$\alpha_2 + \beta_2 \geq 7$

$\alpha_2 + \gamma_2 \geq 14$

$\beta_2 + \gamma_2 \geq 43$

$z \geq 43$ $\quad y \geq 17.$

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{64}{2} = 32.$

$\alpha_2 + \beta_2 = 7.$

$7 - \beta_2 + \gamma_2 = 14$

$\gamma_2 - \beta_2 = 7$

$\beta_2 + \gamma_2 = 43$

$2\gamma_2 = 50$

$\gamma_2 = 25.$

$\beta_2 = 18$

$a = 2^4 \cdot 3^6$

$b = 2^3 \cdot 3^5.$

$c = 2^{10} \cdot 3^{11}$

$2^x \cdot 3^y \cdot 5^z.$

$\alpha_2 + \beta_2 \geq 7$

$\alpha_2 + \gamma_2 \geq 14$

$\beta_2 + \gamma_2 \geq 13.$

α_2 4

$\alpha + \beta + \gamma \leq 19.$

$(\alpha+\beta) + (\alpha+\gamma) + (\beta+\gamma) \leq 38.$

$\geq 27 + 7 = 34.$

$\alpha_3 + \beta_3 \geq 11$

$\alpha_3 + \gamma_3 \geq 17$

$\beta_3 + \gamma_3 \geq 15.$

$\alpha_2 + \gamma_2 + 2\beta_2 \geq 20.$

$\alpha_2 + \gamma_2 + \beta_2 + \beta_2 \geq 20.$

$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq$

$11 + 6 + 5 = 22$

$\frac{11+17+15+1}{2} = 12 + \frac{32}{2} = 22.$

$\frac{CE}{CD} \cdot CB \cdot \frac{CB}{CD}$

$BF = AB \cdot \frac{CE}{CA} \cdot \frac{AB}{CA}, \quad CF = \frac{1}{BB}$

$\alpha + \beta \geq 14$

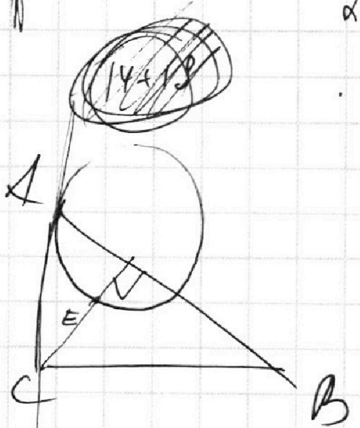
$\beta + \gamma \geq 18$

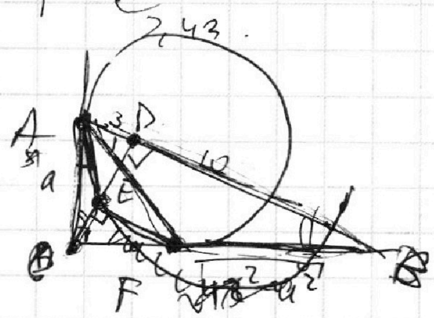
$\alpha + \gamma \geq 4$

$\alpha + \beta \quad \alpha + \gamma + 2\beta \geq 32$

≥ 43

$14 + 18$





$5^2 - 3^2 = 12^2 - 10^2$

$2 \cdot 22$

$CD \cdot 13 = a\sqrt{13^2 - a^2}.$

$CD = \frac{a\sqrt{13^2-a^2}}{13}.$

$CE = \frac{AC^2}{CD} = \frac{a^2 \cdot 13}{a\sqrt{13-a^2}} = \frac{13a}{\sqrt{13-a^2}}.$

$\frac{a(13^2-a^2)}{13 \cdot 13a} = \frac{13^2 a^2}{13^2}.$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$

$1{,}3 = \frac{13}{10}.$

$= \frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF} = \frac{AD}{EF} \cdot \frac{CD}{CE}. \quad AC^2 = CE \cdot CD$

$\frac{CE}{EF} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow EF = \frac{CE \cdot DB}{CD} \quad \left(\frac{CD}{CE}\right)^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_a b \cdot \log_b a$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$

$\cancel{c^{\log_a b} = c^{\log_a b}}\ b.$

$a^{\log_a b} = b$

$b = b$ ✓.

$\log^n_a b + \log^n_a c = \log^n_a (bc)$

$a^{\log^n_a b} \cdot a^{\log^n_a c} = a^{\log^n_a (bc)}$

$b^n \cdot c^n = bc^n$

$bc^n = bc^n.$