МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1.

Обозначим за α_p – степень, в которой число (простое) p входит в a; аналогично β_p – в число b, γ_p – в число c.

Тогда 1) $ab \vdots 2^7 \Leftrightarrow 2^{\alpha_2} \cdot 2^{\beta_2} \vdots 2^7 \Leftrightarrow \alpha_2 + \beta_2 \geq 7$.

Аналогично. $bc \vdots 2^{13} \Leftrightarrow \beta_2 + \gamma_2 \geq 13$ и $ac \vdots 2^{14} \Leftrightarrow \alpha_2 + \gamma_2 \geq 14 \Rightarrow (\alpha_2+\beta_2) + (\beta_2+\gamma_2) + (\alpha_2+\gamma_2) \geq$ $\geq 7 + 13 + 14 = 34 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 17$. ■

2) $ab \vdots 3^{11} \Leftrightarrow 3^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \vdots 3^{11} \Leftrightarrow \alpha_3 + \beta_3 \geq 11$. Аналогично $bc \vdots 3^{15} \Leftrightarrow \beta_3 + \gamma_3 \geq 15$ и $ac \vdots 3^{17} \Leftrightarrow \alpha_3 + \gamma_3 \geq 17$ $\Rightarrow (\alpha_3+\beta_3) + (\beta_3+\gamma_3) + (\alpha_3+\gamma_3) \geq 11 + 15 + 17 = 43 \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 21{,}5$. Т.к. $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – целые, то $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 22$ ■

3) $ab \vdots 5^{14} \Leftrightarrow 5^{\alpha_5} \cdot 5^{\beta_5} \vdots 5^{14} \Leftrightarrow \alpha_5 + \beta_5 \geq 14$. Ан-но $ac \vdots 5^{43} \Leftrightarrow \alpha_5 + \gamma_5 \geq 43 \Rightarrow$

т.к. $\alpha_5 + \gamma_5 \geq 43 \Rightarrow \alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5 \geq 43$ ■

Заметим, что $a \geq 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5}$, $b \geq 2^{\beta_2} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\beta_5}$ и $c \geq 2^{\gamma_2} \cdot 3^{\gamma_3} \cdot 5^{\gamma_5}$ (ибо по опр. $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ числа $2^{\dots}, 3^{\dots}, 5^{\dots}$ входят в числа a, b, c) $\Rightarrow$ $\Rightarrow a \cdot b \cdot c \geq 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot 5^{\gamma_5} = 2^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2} \cdot 3^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3} \cdot 5^{\alpha_5 \cdot \beta_5 \cdot \gamma_5} \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$.

То есть $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$.

Пример: $a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{24}$, $b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^0$, $c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{19}$.

Действительно $abc = 2^{4+3+10} \cdot 3^{6+5+11} \cdot 5^{24+0+19} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

$ab = 2^{4+3} \cdot 3^{6+5} \cdot 5^{24} = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{24} \vdots 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$, $bc = 2^{3+10} \cdot 3^{5+11} \cdot 5^{19} =$ $= 2^{13} \cdot 3^{16} \cdot 5^{19} \vdots 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$ и $ac = 2^{4+10} \cdot 3^{6+11} \cdot 5^{24+19} = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \vdots 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$.

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$.

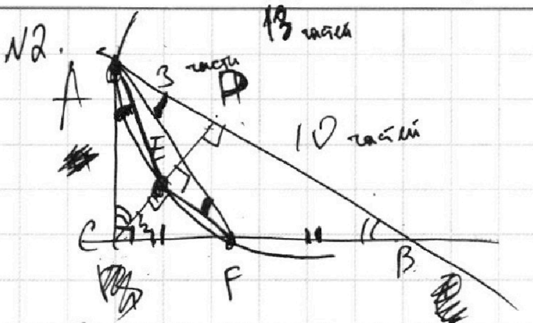
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.



$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{3}{10}$.

$\angle CAE = \angle EFA$ (уг. между кас-ой и хордой)

$EF \parallel AB \Rightarrow \angle EFA = \angle FAB$; $\Rightarrow \angle FAB = \angle EAC$.

$\angle ACD = 90 - \angle CAD = 90 - \angle CAB = \angle CBA$, т.е. $\angle ACD = \angle CBA$.

значит, $\triangle CEA \sim \triangle BFA$ по двум углам. $\Rightarrow$

$EF \parallel DB \Rightarrow \angle CEF = \angle CDB = 90$. $\Rightarrow$ $\triangle CEF \sim \triangle CDB$ по 2ум углам

$\Rightarrow \frac{CE}{CA} = \frac{BF}{BA}$ и $\frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB}$ $\Rightarrow BF = CE \cdot \frac{AB}{AC}$, $CF = CE \cdot \frac{CB}{CD}$.

но в $\triangle ABC$: $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sin\angle B}$, в $\triangle CDB$: $\frac{CB}{CD} = \frac{1}{\sin\angle B} \Rightarrow$

$\Rightarrow BF = CE \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{CE}{\sin\angle B} = CE \cdot \frac{CB}{CD} = CF$, т.е. $BF = CF$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{EF}{DB} = \frac{CF}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} = \frac{\frac{1}{2} CE \cdot EF}{\frac{1}{2} CD \cdot DB} =$

$= \frac{CE}{CD} \cdot \frac{EF}{DB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

$\frac{S_{ACD}}{S_{CDB}} = \frac{\frac{1}{2} AD \cdot DC}{\frac{1}{2} CD \cdot DB} = \frac{AD}{DB} = \frac{3}{10}$ $\Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} : \frac{S_{ACD}}{S_{CDB}} = \frac{1}{4} : \frac{3}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{ACD}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{6}{5}$.

Ответ: $\frac{6}{5}$.

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}.$

$\sin x = \cos y \Rightarrow \arccos(\cos y) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow y = \pm\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin x = \cos\left(\pm\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k\right)\right)$

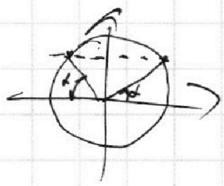
$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k\right).$

$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$

$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)\right)$ $\cancel{\frac{5\pi}{10} - \frac{3\pi}{10} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}}$

$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{5}\right). \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2\pi k = \frac{\pi}{5} - \frac{x}{5} \\ x + 2\pi k = \pi - \left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{5}\right) \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$



$\left[\begin{array}{l} \frac{6}{5}x = \frac{\pi}{5} - 2\pi k \\ \frac{4}{5}x = \frac{4\pi}{5} - 2\pi k \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} \\ x = \pi - \frac{5\pi k}{2}. \end{array}\right.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3}$ или $x = \pi - \frac{5\pi k}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

(2 стр.) N4.

Тогда $l_1: \quad y = kx + t_0$

$l_2: \quad y = -kx + t_0'$

t_0 такой, что $x = -t$ при $y = 0$, т.е.

$0 = kx + t_0$ $\qquad$ $t_0': \; 0 = -k(-t) + t_0'$

$0 = -kt + t_0$ $\qquad$ $t_0' = -kt.$

$t_0 = kt.$

Т.е. $l_1: y = kx + kt$

$l_2: y = -kx - kt.$

Найдём t, k.

~~урав~~ системы ① $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ y = kx + kt \end{cases}$ 1 решение, т.к. 1 общ. точка.

② $\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ y = kx + kt \end{cases}$ 1 решение анало-но.

из ① $x^2 + (kx+kt)^2 = 9$

$x^2(k^2+1) + x(2k^2t) + k^2t^2 - 9 = 0$

1 решение => дискр. $= 0$. Т.е. $(2k^2t)^2 - 4(k^2t^2-9)(k^2+1) = 0$

$(k^2t)^2 - (k^2t^2-9)(k^2+1) = 0.$

$-k^2t^2 + 9k^2 + 9 = 0.$ ■

из ② $\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ y = kx + kt \end{cases}$ следует $(x+7)^2 + (kx+kt)^2 = 4.$

$x^2 + 14x + 49 + k^2x^2 + 2x \cdot k^2t + k^2t^2 - 4 = 0.$

$x^2(k^2+1) + x(14 + 2k^2t) + k^2t^2 + 45 = 0$

$D = 0$, т.к. 1 решение => $(14 + 2k^2t)^2 - 4(k^2t^2+45)(1+k^2) = 0$

$(7 + k^2t)^2 = (k^2t^2+45)(1+k^2)$

$49 + 14k^2t + k^4t^2 = k^2t^2 + k^4t^2 + 45 + k^2 \cdot 45$

$4 + 14k^2t = k^2t^2 + k^2 \cdot 45.$ ▨

Т.е. $\begin{cases} 4 + 14k^2t = k^2t^2 + 45k^2 \quad ▨ \\ 9k^2 + 9 = k^2t^2. \quad ■ \end{cases}$ $\qquad k^2(9 - t^2) = -9$

$k^2 = -\frac{9}{9-t^2}.$

$4 + 14\left(\frac{-9}{9-t^2}\right)t = \frac{-9}{9-t^2}t^2 + 45\left(\frac{-9}{9-t^2}\right) \Big| \cdot (9-t^2)$

$4(9-t^2) - 14 \cdot 9t = -9t^2 - 9 \cdot 45.$

$36 - 4t^2 - 126t = -9t^2 - 405$

$5t^2 - 126t + 441 = 0$

$D = 126^2 - 4 \cdot 5 \cdot 441 = 126^2 - 4 \cdot 5 \cdot 21^2 = (21 \cdot 6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 21^2 =$

$= 21^2(6^2 - 4 \cdot 5) = 21^2(36 - 20) = 21^2 \cdot 16 = (21 \cdot 4)^2 = 84^2.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

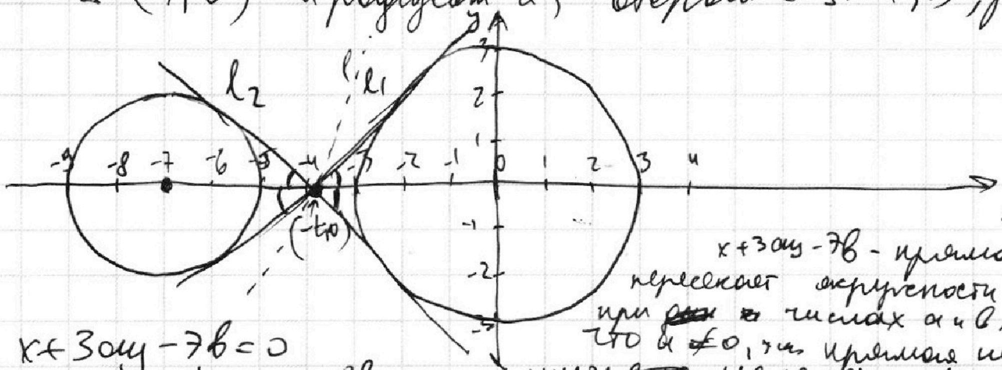
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4. (1 стр.)

$$\left[\begin{array}{l} x^2+14x+y^2+45=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=2^2 \\ x^2+y^2=3^2 \end{array}\right.$$

Нарисуем графики обеих окружностей: первая с ц. $(-7;0)$ и радиусом 2, вторая с ц. $(0;0)$, рад. 3.



$x+3ay-7b$ – прямая, которая пересекает окружности в 4х точках при ~~…~~ числах a и b. Очевидно, что $a\neq 0$, т.к. прямая не перп-а осям, иначе ~~…~~ мало точек пересечения.

$x+3ay-7b=0$

$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$

~~$x-7b=-3ay$~~ – для чисел a и b это – уравнение прямой. ~~…~~ $-\frac{1}{3a}$ коэфф. при x, т.е. tg наклона $-7b/3a$ задаёт, в какой точке пересечёт прямая с данным наклоном оси.

Проведём общие кас-ые (внутренние) к окружностям. Из симметрии они пересекутся в точке на оси абсцисс, т.е. $(-t;0)$ $t>0$.

Обозначим прямую с наибольшим тангенсом наклона за l_1, вторую – за l_2.

~~Пусть l_1: $x+t=ky$ l_1 (тангенс) т.е. $y=\frac{1}{k}x+\frac{1}{k}t$ l_2: $x+t=ky$ (k – угол между прямыми и осью y. Очевидно, он одинаковый для l_1 и l_2. Если наклон-то прямой l пересек. к оси большим, чем l_1, но меньшим или равным, чем l_2 (или равным), то легко видеть, что она не может пересекать обе окр. сразу, т.к. не может быть 4х решений. Она не такая. Если не такая, то примем $7b=t3a$, $b=\frac{3t}{7}$ и для этой прямой $l: x-7b=-3ay$ будут 4 решения.~~

~~Надо найти t, k.~~

~~$\begin{cases} x^2+y^2=3^2 \\ x+t=ky \end{cases}$ 1 решение, т.к. ур-ли окр. 1 точка пересеч.~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(зад.) №4. $t = \frac{126 \pm 84}{5 \cdot 2}$. Нам подойдёт ~~большее~~ меньшее

t, т.к. мы рассматриваем точку пересечения внутренних общ. кас-ых (внешних будет дальше от нуля)

$$t = \frac{126 - 84}{5 \cdot 2} = \frac{63 - 42}{5} = \frac{21}{5}.$$

$$k^2 = -\frac{9}{9 - t^2} = \frac{9}{t^2 - 9} = \frac{9}{\left(\frac{21}{5}\right)^2 - 9} = \frac{1}{\left(\frac{7}{5}\right)^2 - 1} = \frac{5^2}{7^2 - 5^2} =$$

$$= \frac{5^2}{2 \cdot 12} = \frac{5^2}{4 \cdot 6}$$

нас интересует пр. ℓ_1, поэтому $k > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{2 \cdot 6} = \frac{5\sqrt{6}}{12}.$$

~~прямая нам подойдёт с коэфф. наклона угла $(-k; k)$ $\Rightarrow \frac{1}{3a} \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{12}; \frac{5\sqrt{6}}{12}\right)$~~

~~$\frac{1}{3a} \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{12}; \frac{5\sqrt{6}}{12}\right)$~~

~~$-\frac{5\sqrt{6}}{12} < \frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12}$~~

~~$\begin{cases} \frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12} \\ \frac{1}{3a} > -\frac{5\sqrt{6}}{12} \end{cases}$ $\begin{cases} a > \frac{12}{3 \cdot 5\sqrt{6}} \\ \frac{1}{a} > -\frac{5\sqrt{6}}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} a > \frac{4\sqrt{6}}{5 \cdot 6} \\ 5\sqrt{6}a < 4 \end{cases}$~~

~~$\begin{cases} a > \frac{2\sqrt{6}}{15} \\ a > -\frac{4}{5\sqrt{6}} \end{cases}$ $\begin{cases} a > \frac{2\sqrt{6}}{15} \\ a > -\frac{4\sqrt{6}}{5 \cdot 6} = -\frac{2\sqrt{6}}{15}. \end{cases}$~~

~~Значит, $a > \frac{2\sqrt{6}}{15}$.~~

~~Ответ: $\left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$~~ (коэфф.)

Заметим, что если у прямой угол наклона будет $\geq k$, то она не сможет пересечь сразу 2 окружности (см. рис) или 2,

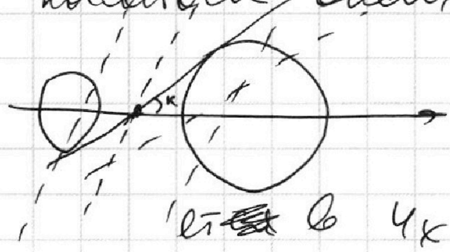
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 [X] 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(4 стр.) №4.
но касается обеих.



аналогично, если ~~коэф.~~ угла наклона $\leq -k$, то прямая не пересекает в 4х точках.

Значит, коэф. угла $\alpha \in (-k; k)$.

т.е. у пр. $y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$

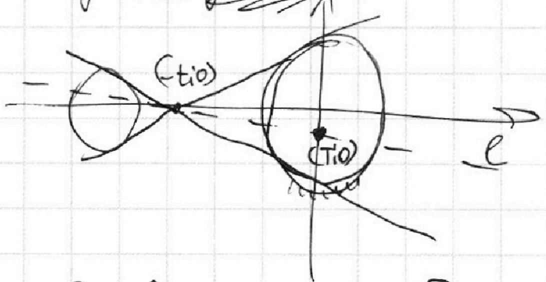
~~угол~~ $-\frac{1}{3a} \in (-k; k) \Rightarrow -k < -\frac{1}{3a} < k \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -k < -\frac{1}{3a} \\ -\frac{1}{3a} < k \end{cases}$ $\begin{cases} k > \frac{1}{3a} \\ -\frac{1}{3k} < a \end{cases}$ $\begin{cases} a > \frac{1}{3k} \\ a > -\frac{1}{3k} \end{cases}$, т.е. $a > \frac{1}{3k}$,

т.к. $k > 0 \Rightarrow a > \frac{1}{3k} = \frac{1}{3 \cdot \frac{5\sqrt{6}}{12}} = \frac{12}{3 \cdot 5\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{2\sqrt{6}}{15}$.

т.к. $a > \frac{2\sqrt{6}}{15}$, то $a \neq 0 \Rightarrow$ для любого

a существ. $\frac{7b}{3a} = \underset{\text{(для любого T)}}{T}$, ~~поэтому~~ мы сможем провести такую прямую через точку $(-t; 0)$ ~~с углом~~ между внутр-нас:



$l: \; y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3b}$.

Ответ: $\left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5. $\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{(6x)^2} 7^3 - 4$ $\qquad 6x>0,\ \exists t = 6x.$ $\ t \neq 1.$

$\log_7^4 t - 2\log_t 7 = \frac{3}{2}\log_t 7 - 4$

$\log_7^4 t = 3{,}5\log_t 7 - 4$

$\log_7^4 t = \frac{3{,}5}{\log_7 t} - 4$, т.к. $\log_x y \cdot \log_y x = 1$.

$\log_7^5 t = 3{,}5 - 4\log_7 t$ $\qquad (1)$

$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \frac{5}{2}\log_y 7 - 4.$

$\log_7^4 y = -3{,}5\log_y 7 - 4$

$\log_7^5 y = -3{,}5 - 4\log_7 y.$ $\qquad (2)$

Сложим (1) и (2):

$\log_7^5 y + \log_7^5 t = -4(\log_7 t + \log_7 y).$

$\log_7^5(yt) = -4\log_7(yt).$

$\log_7(yt)(\underbrace{\log_7^4(yt)}_{\geq 0} + 1) = 0.$

≥ 0, т.к. чет. степень

$\log_7(yt) = 0.$

$yt = 1.$

$t = 6x \Rightarrow \quad 6x \cdot y = 1$

$xy = \frac{1}{6}.$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\log_7(6x))^4 - 2\log_{(6x)}7 = \underbrace{\frac{3}{2}}_{1,5}\log_{(6x)}7 - 4$$

$$\log_7^4(6x) - 3{,}5\log_{6x}7 = -4.$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

$$b \cdot a^{\log_b a} = a$$

$$\cancel{a^{\log_b a} = \frac{a}{b}}.$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$b \cdot a^{\log_b a} = a$$

$$a = b^{\log_b a} \qquad b \cdot b^{\log_b^2 a} = a. \qquad \log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$\cancel{b \cdot a^2 = a} \qquad a^{\log_a b} \cdot a^{\log_b a} = a$$

$$\log_7^4(6x) = 3{,}5\log_{6x}7 - 4$$

$$a^{\log_b a} = \frac{a}{b}. \mid \log_a$$

$$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \underbrace{\frac{5}{2}}_{2,5}\log_y 7 - 4.$$

$$\log_a a^{\log_b a} = \log_a \frac{a}{b}.$$

$$a^{\log_b a^{-1}} = b^{-1}$$

$$\log_b a = \log_a a - \log_a b$$

$$\log_b a + \log_a b = 1.$$

$$\begin{cases} \log_7^4 y = -3{,}5\log_y 7 - 4 \\ \log_7^4(t) = 3{,}5\log_t 7 - 4. \end{cases}$$

$$\log_y 7 = \frac{\log_7 7}{\log_7 y} = \frac{1}{\log_7 y}.$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

$$\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b.$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = \log_a a = 1.$$

$$\log_7^4 y = -3{,}5\log_y 7 - 4$$

$$\log_7^4(t) = \frac{3{,}5}{\log_7 t} - 4.$$

$$\log_7^5 t = 3{,}5 - 4\log_7 t.$$

$$\log_7^5 y = -3{,}5 - 4\log_7 y.$$

$$\log_7^5 t + \log_7^5 y = -4\log_7(ty).$$

$$c^n \cdot a^n = c^x \qquad a^n \cdot b^n = c^x \qquad (ab)^n = c^x \qquad \log_c^n ab = x$$

$$\log_7^5 y = -3{,}5 - 4\log_7 y \qquad \log_7^5 t = 3{,}5 - 4\log_7 t \qquad \log_7 t = t$$

$$\log_7^5 t + \log_7^5 y = 7$$

$$\log_c^n a + \log_c^n b = x$$

$$a^n + b^n = c^x$$

$$\log_a c \cdot \log_a b \qquad \log_a(c+b) = n$$

$$\cancel{\log_{ab} x = c}$$

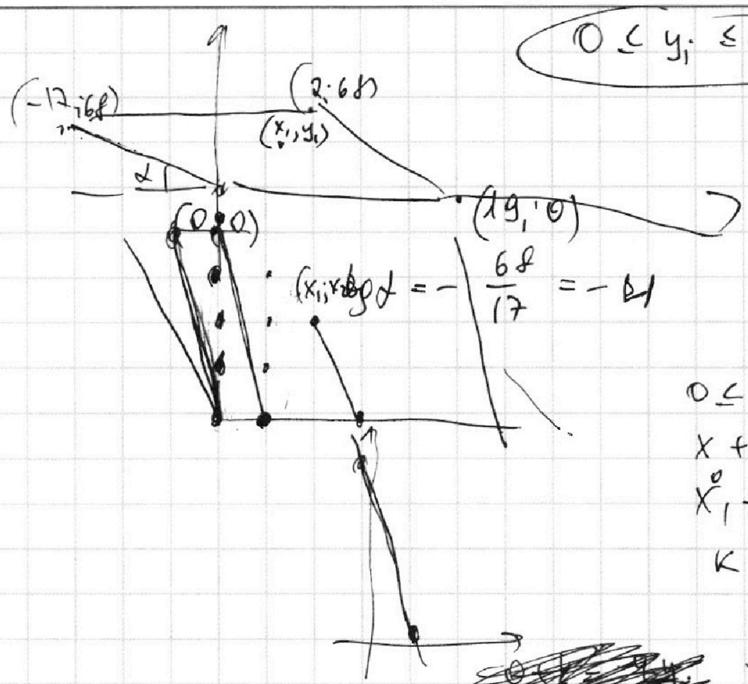
$$\cancel{x = ab^c = a^c \cdot b^c}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$0 \le y_1 \le 68$



$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40.$

$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40.$

$x_2 - x_1 \le 19.$

$0 \le k \le 19$

$x + k = -4y.$

$x_1 + k = -4y_1.$

$k =$

$-4.\quad x + 1 = -4y.$

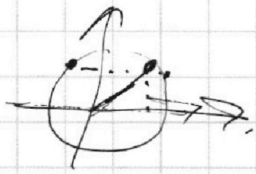
$y =$

$441 \mid 9$
$36 \mid 49$
81

$(7 \cdot 3)^2 = 21^2.$

$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}.$

$126^2 - 9 \cdot 21^2 5 =$



$\sin x = \cos y$

$4(63^2 - 21^2 \cdot 5) =$

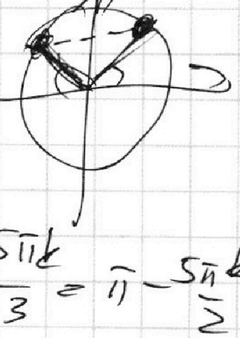
$y = \frac{5\pi}{10} + \frac{x}{5}.$

$\frac{3\pi}{10}$

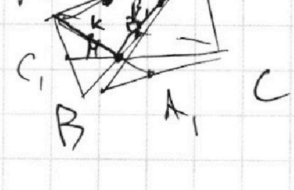
~~$= 4 \cdot 9 (21^2 -$~~

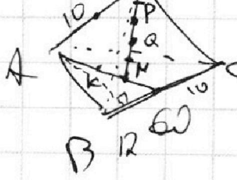
$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)\ 4\left((21 \cdot 3)^2 - 21^2 \cdot 5\right) =$

$= 4 \cdot 21^2 (3^2 - 5) =$



$= 4 \cdot 21^2 \cdot 4$





$\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} = \pi - \frac{5\pi k}{2} \Big| \cdot 6$

$\pi - 10\pi k = 6\pi - 15\pi k.$

$1 - 10k = 6 - 15k$

$5k = 5$

$k = 1.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 (2 сп.)

$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x = ky - t \end{cases} \Rightarrow (ky-t)^2+y^2=9$

$y^2(k^2+1) - 2kty + t^2 - 9 = 0$

1 решение $\Rightarrow$ дискр. $= 0 \Rightarrow (2kt)^2 - 4(t^2-9)(k^2+1) = 0$

$(kt)^2-(t^2-9)(k^2+1)=0$.

$-t^2+9k^2+9=0$.

$t^2=9k^2+9$.

аналогично 1 решение у $\begin{cases}(x+7)^2+y^2=4 \\ x=ky-t.\end{cases}$

$(ky-t+7)^2+y^2=4$.

$y^2(k^2+1) - y(2kt-14k) + t^2 + \underbrace{7^2-4}_{45} - 14t = 0$.

$D=0$, т.к. $(2kt-14k)^2 - 4(t^2-14t+45)(k^2+1) = 0$

$(kt-7k)^2-(t^2-14t+45)(k^2+1)=0$.

$k^2t^2 - 14k^2t + 49k^2 - k^2t^2 - t^2 + 14k^2t + 14t - 45k^2 - 45 = 0$

$4k^2-t^2+14t-45=0$

Значит, $\begin{cases} t^2 = 9k^2+9 & |\cdot 4 \\ 4k^2 = t^2-14t+45 & |\cdot 9 \end{cases}$ $\begin{cases} 4t^2 = 36k^2+36 \\ 36k^2 = 9t^2 - 9\cdot 14t + 9\cdot 45 \end{cases}$

$4t^2 = 9t^2 - 9\cdot 14t + 9\cdot 45 + 36$

$5t^2 - 9\cdot 14t + 9\cdot 45 + 36 = 0$

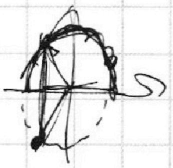
$D = (9\cdot 14)^2 - 4(9\cdot 45+36)(5) = 9\cdot 4(9\cdot 7^2 - (45+4)(5)) =$
$= 9\cdot 4\cdot 7^2(9-5) = 3^2\cdot 2^2\cdot 7^2\cdot 2^2$

$t = \frac{9\cdot 14 \pm \sqrt{3^2\cdot 2^2\cdot 7^2\cdot 2^2}}{2\cdot 5}$. Нам нужен t-меньший корень, т.к. общие касательные - внутренние.

$t = \frac{9\cdot 14 - 3\cdot 2\cdot 7\cdot 2}{2\cdot 5} = \frac{9\cdot 7 - 3\cdot 7\cdot 2}{5} = \frac{63-42}{5} = \frac{21}{5} = 4,2$.

$9k^2+9 = t^2 = (4,2)^2 = \left(\frac{21}{5}\right)^2$.

$k^2+1 = \left(\frac{7}{5}\right)^2$.



$k^2 = \frac{7^2-5^2}{5^2} = \frac{2\cdot 12}{5^2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot 6$

$k>0 \Rightarrow k = \frac{2}{5}\sqrt{6}$

коэфф. от $-k$ до k не включительно нам подходят.

Значит, $-3a \in \left(-\frac{2}{5}\sqrt{6}; \frac{2}{5}\sqrt{6}\right)$

$a \in \left(-\frac{2}{15}\sqrt{6}; \frac{2}{15}\sqrt{6}\right)$

Ответ: $a \in \left(-\frac{2}{15}\sqrt{6}; \frac{2}{15}\sqrt{6}\right)$.

$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+14x+y^2+45=0 \\ x^2+y^2=9 \end{array}\right. \end{cases}$

1) $x=0$ – решение.

$\begin{cases} 3ay=7b \\ (y^2+45)(y^2-9)=0 \quad y=\pm 3 \end{cases}$

$\pm 9a=7b$

Есть ещё 2 решения $\Rightarrow$ $y=0$ тоже реш.

$\begin{cases} x=7b. \\ (x^2+14x+45)(x^2-9)=0. \\ D=14^2-4\cdot 45=4(7^2-45)=4\cdot 4 \end{cases}$ $\pm 3.$ $(x+5)(x+9)$

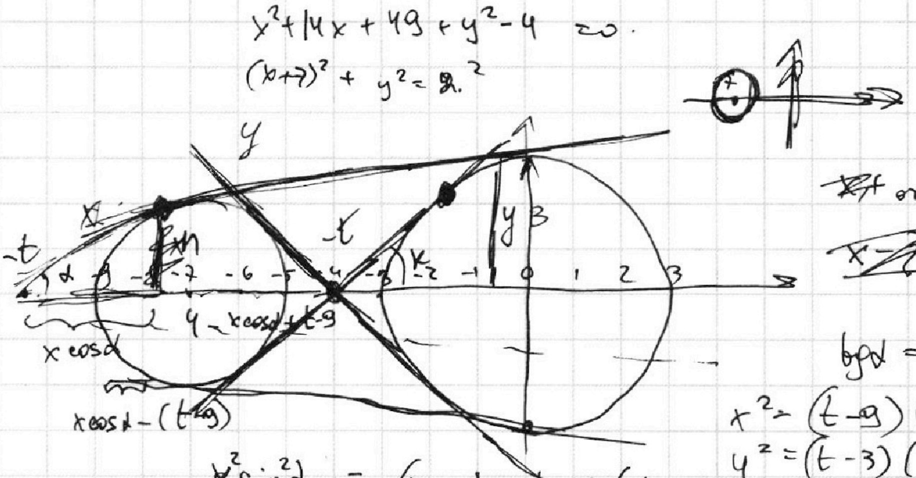
$(x+5)(x+9)(x-3)(x+3)=0$ 4 решения сей всегда $\Rightarrow$

$x=ky-t.$

$\Rightarrow$ Эф-коэф-ей нет.

$x^2+14x+49+y^2-4=0.$

$(x+7)^2+y^2=2^2$



$a\neq 0$, т.к. прямая очевидно не горизонт-на

$x-7b=-3ay.$

$y=-\frac{1}{3a}x+\frac{7b}{3a}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{t}$

$x^2=(t-9)(t-5)$ $t^2-14t+45=x^2$

$y^2=(t-3)(t+3)$

$x^2\sin^2\alpha=(x\cos\alpha-t+9)(t+x\cos\alpha-5)$

$1-x^2\cos^2\alpha=xt\cos\alpha-x^2\cos^2\alpha-5x\cos\alpha-t^2+xt\cos\alpha+5t+$
$+9t-9x\cos\alpha-45$

$1=2xt\cos\alpha-14x\cos\alpha+\underbrace{14t-t^2-45}_{-x^2.}$

$1=2xt\cos\alpha-14x\cos\alpha-x^2.$

$x-7b=3ay.$

$D=k^2t^2-(t^2-9)(k^2+1)=$
$=-t^2+9k^2+9=0$
$t^2=9k^2+9.$

$\begin{cases} x-t=ky \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$ 1 решение

$(t+ky)^2+y^2=9.$ 1 реш $\Rightarrow$ $(ky+t)^2+y^2=9.$

$\Rightarrow D=0.$ $y^2(k^2+1)+2kty+t^2-9=0.$

$y^2(k^2+1)+2kty+t^2-9=0.$

$D=(2kt)^2-4(t^2-9)(k^2+1)=0.$

$(kt)^2-(t^2-9)(k^2+1)=0.$

$-t^2+9k^2+9=0$

$D=(2kt)^2+4\cdot 9(k^2+1)=$
$=4k^2t^2+4\cdot 9k^2+4\cdot 9=$
$=4((kt)^2+(3k)^2+3^2).$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ $z \geq 43$ $y \geq 17$.

$\alpha_2 + \beta_2 \geq 7$
$\alpha_2 + \gamma_2 \geq 14$
$\beta_2 + \gamma_2 \geq 43$

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{64}{2} = 32$.

$\alpha_2 + \beta_2 = 7$.
$7 - \beta_2 + \gamma_2 = 14$

$\gamma_2 - \beta_2 = 7$
$\beta_2 + \gamma_2 = 43$

$2\gamma_2 = 50$
$\gamma_2 = 25$.

$\beta_2 = 18$

$a = 2^4 \cdot 3^6$
$b = 2^3 \cdot 3^5$.
$c = 2^{10} \cdot 3^{11}$

$2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$.
$\alpha_2 + \beta_2 \geq 7$
$\alpha_2 + \gamma_2 \geq 14$
$\beta_2 + \gamma_2 \geq 13$.

20 $\alpha + \beta + \gamma \leq 19$.
$(\alpha+\beta) + (\alpha+\gamma) + (\beta+\gamma) \leq 38$.
$\geq 27 + 7 = 34$.

$\alpha_2 + \gamma_2 + 2\beta_2 \geq 20$.
$\alpha_2 + \gamma_2 + \beta_2 + \beta_2 \geq 20$.

$\alpha_3 + \beta_3 \geq 11$
$\alpha_3 + \gamma_3 \geq 17$
$\beta_3 + \gamma_3 \geq 15$.

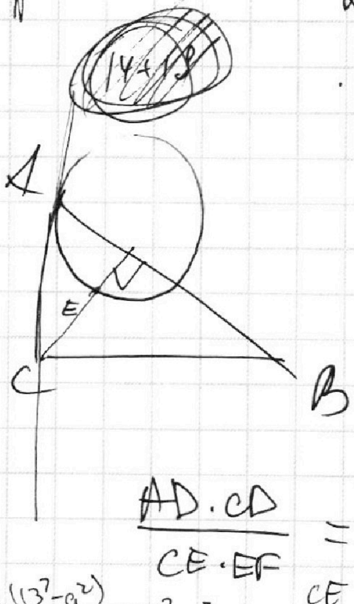
$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq$ $\frac{11+17+15+1}{2} = 12 + \frac{32}{2} = 22$.

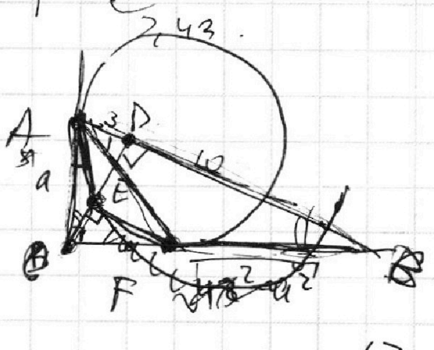
$11 + 6 + 5 = 22$

$BF = AB \cdot \frac{CE}{CA}$, $\frac{AB}{CA} = \frac{CF}{BB}$, $CF = CB \cdot \frac{CB}{CD}$, $\frac{CE}{CD}$

$\alpha + \beta \geq 14$
$\beta + \gamma \geq 18$
$\alpha + \gamma \geq 4$

$\alpha + \beta$ $\alpha + \gamma + 2\beta \geq 32$
≥ 43.





$\cancel{5^2 - 3^2 = 12^2 - 10^2}$
$\cancel{2 \cdot 22}$

$CD \cdot 13 = a\sqrt{13^2 - a^2}$.
$CD = \frac{a\sqrt{13^2 - a^2}}{13}$.
$CE = \frac{AC^2}{CD} = \frac{a^2 \cdot 13}{a\sqrt{13 - a^2}} = \frac{13a}{\sqrt{13 - a^2}}$.

$\frac{a(13^2 - a^2)}{13 \cdot 13a} = \frac{13^2 a^2}{13^2}$.

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$ $1{,}3 = \frac{13}{10}$.

$\frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF} = \frac{AD}{EF} \cdot \frac{CD}{CE}$. $AC^2 = CE \cdot CD$

$\frac{CE}{EF} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow EF = \frac{CE \cdot DB}{CD}$ $\left(\frac{CD}{CE}\right)^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_a b \cdot \log_b a$

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$

$b.$

$a^{\log_a b} = b$

$b = b$.

$\log_a^n b + \log_a^n c = \log_a^n (bc)$

$a^{\log_a^n b} \cdot a^{\log_a^n c} = a^{\log_a^n (bc)}$

$b^n \cdot c^n = bc^n$

$bc^n = bc^n.$