



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Нт. Пусть $ab = \alpha \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$; $bc = \beta \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$; $ac = \gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

$$abc = ac \cdot \sqrt{\frac{ab \cdot bc}{ac}} \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N})$$

$$abc = \gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \sqrt{\frac{\alpha \beta \cdot 2^{7+13-14} \cdot 3^{11+15-17} \cdot 5^{14+18-43}}{\gamma}} =$$

$$= \sqrt{\alpha \beta \gamma} \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \sqrt{2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{-11}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha \beta \gamma}{3 \cdot 5}} \cdot 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}; \text{ Т.к. } a, b, c \in \mathbb{N}, \text{ то } \sqrt{\frac{\alpha \beta \gamma}{15}} \in \mathbb{N}$$

(т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$)

($\alpha \beta \gamma : 15$, например, $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 5$)

Наши значение $a \cdot b \cdot c = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$ (при $\alpha \beta \gamma = 15$)

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

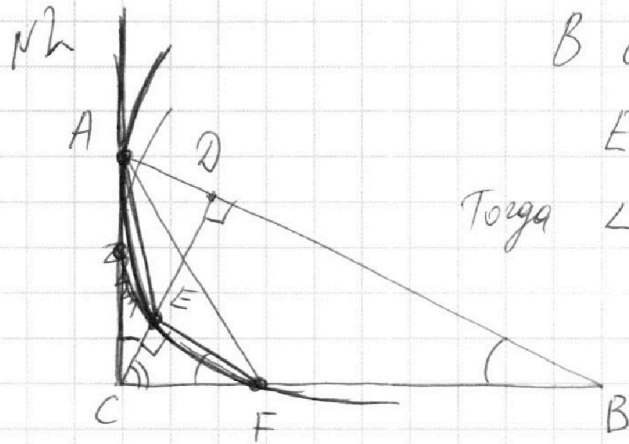
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



В силу параллельности EF и AB

$EF \perp CD$; $\angle CFE = \angle CBD$.

Тогда $\angle ACD = 90^\circ - \angle ECF = \angle CFE$

$\triangle ACD \sim \triangle AEF$ по 2 углам

$$\frac{AD}{CE} = \frac{AC}{CF} = \frac{CD}{FE} = k, \text{ тогда } \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = k^2$$

$$\frac{AB}{BD} = 1,3 \Rightarrow AD = 0,3 BD \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{\frac{3}{10}} BD$$

$$AB = 1,3 \cdot \frac{AD}{0,3} = \frac{13}{3} AD$$

$\angle CAE = \angle AFE$ (угол между касат. и хордой равен впис. углу, опир. на эту хорду)

Тогда $\angle AFB = 180^\circ - \angle AFE - \angle EFC = \angle AEC$

$\triangle AFB \sim \triangle AEC$ по 2 углам; $\frac{AF}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{FB}{CE}$

Но $\frac{AB}{AC} = \frac{CF}{CE}$ (из подобия $\triangle CEF$ и $\triangle ACB$)

$$\frac{AB}{AC} = \frac{CF}{CE} = \frac{FB}{CE} \Rightarrow CF = FB \Rightarrow F - \text{сер. } BC.$$

$$CF = FB = \frac{BC}{2} \Rightarrow CE = \frac{1}{2} CD$$

$$\text{Тогда } S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot EF = \frac{1}{8} \cdot CD \cdot BD$$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD = \frac{3}{20} \cdot CD \cdot BD$$

(из подобия $\triangle CEF$ и $\triangle CDB$)

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{3 \cdot 8}{20 \cdot 1} = \frac{12}{10} = 1,2$$

Ответ: 1,2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3. $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

Заметим, что $5 \arccos(\sin x) \in [0; 5\pi]$ (по опред. \arccos)

Тогда $x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$ — это область допуст. значений x .

Пусть $\sin x = \alpha \in [-1; 1]$, тогда

~~$5 \arccos \alpha = \frac{3\pi}{2} + x$~~ $5 \arccos \alpha = \frac{3\pi}{2} + x$

Пусть $\alpha = \cos \beta \in [-1; 1]$, тогда $\beta = \arccos \alpha = \arccos(\sin x)$

Тогда $\cos \beta = \sin x$ и $5\beta = x + \frac{3\pi}{2}$

$$\begin{cases} 5\beta = x + \frac{3\pi}{2} & (1) \\ \sin x = \cos \beta & (2) \end{cases}$$
 Решим полученную систему

2) $\sin x = \cos \beta$; $\sin x - \sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = 0$

$2 \sin \frac{x - \frac{\pi}{2} + \beta}{2} \cdot \cos \frac{x + \frac{\pi}{2} - \beta}{2} = 0$

$$\begin{cases} \sin \frac{x + \beta - \pi/2}{2} = 0 \\ \cos \frac{\pi/2 - \beta + x}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x + \beta - \frac{\pi}{2}}{2} = \pi n \\ \frac{\pi/2 - \beta + x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m \end{cases} \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x + \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x - \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \end{cases} ; \begin{cases} \beta + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x - \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \end{cases} \quad \begin{matrix} \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - x \\ \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi m + x \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \beta = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi m \\ \beta = x - (\frac{\pi}{2} + 2\pi n) \end{cases}$$
 Возвращаемся к системе:

$$\begin{cases} x + \frac{3\pi}{2} = 5x + \frac{5\pi}{2} + 10\pi m \\ x + \frac{3\pi}{2} = 5x - (\frac{5\pi}{2} + 10\pi m) \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - x$, *Вернемся к системе.*
 $\beta = x - (\frac{\pi}{2} + 2\pi m)$

$$\begin{cases} 6x = \pi + 10\pi n \\ 4x = 4\pi + 10\pi m \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3} \\ x = \pi + \frac{5\pi m}{2} \end{cases}$$

При этом $x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$

Этим условиям удовлетворяют следующие значения x :

$$\begin{cases} x = -\frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{11\pi}{6} \\ x = \frac{7\pi}{2} \\ x = \pi \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$.

$\beta =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

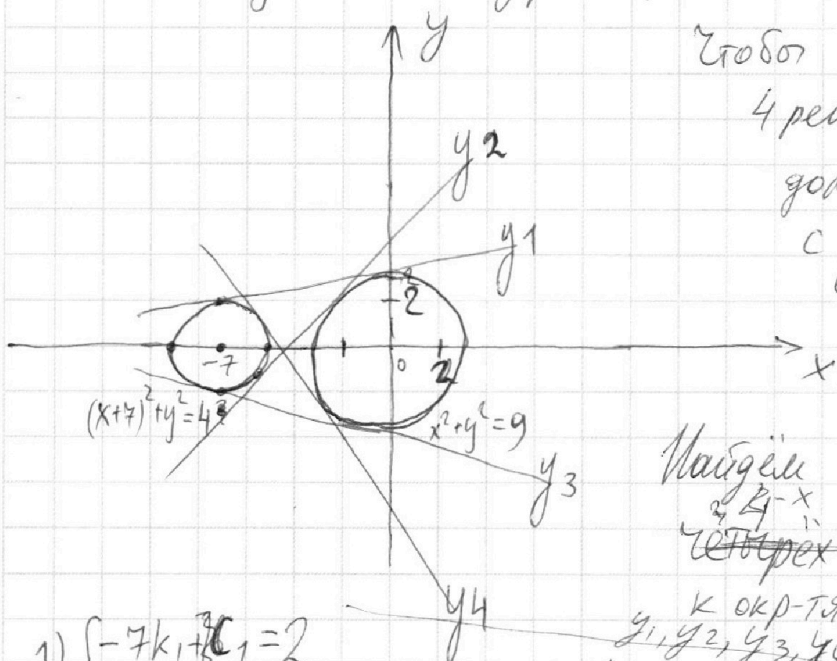
$$x + 3ay - 7b = 0$$

$$N4. (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x = 7b - 3ay \\ y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a} \quad (\text{при } a \neq 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 & \text{— ур. окр-ти с центром } (-7; 0) \text{ и } R=2 \\ x^2 + y^2 = 9 & \text{— ур. окр-ти с центром } (0; 0) \text{ и } R=3 \end{cases}$$



Чтобы у системы было 4 решения, прямая $y = \frac{7b-x}{3a}$ должна иметь 4 пересек. с 2-мя окр-тями, то есть по 2 пересек. с каждой.

Найдём уравнения ~~всех~~ ~~четырёх~~ ~~ближних~~ касательных к окр-тям $(y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x))$

$$1) \begin{cases} -7k_1 + c_1 = 2 \\ c_1 = 3 \end{cases}$$

$$y_1 = \frac{1}{7}x + 3 \quad k_1 = \frac{1}{7}$$

$$y_1 = k_1x + c_1$$

$$y_2 = k_2x + c_2$$

$$y_3 = k_3x + c_3$$

$$y_4 = k_4x + c_4$$

$$2) \begin{cases} -7k_3 + c_3 = -2 \\ c_3 = -3 \end{cases}$$

$$y_3 = -\frac{1}{7}x - 3 \quad k_3 = -\frac{1}{7}$$

При $a \in [k_1; k_2)$ найдётся b , такое, что у сист. будет 4 рещ.

При $a \in (k_4; k_3]$ также найдётся b , при котором у системы будет 4 рещ.

Найдём k_2 и k_4 . Из симметрии получено, что $k_4 = -k_2$

$$\text{ур. окр. } k_2x + c_2 = 2$$

$$y_2 = k_2x^2 + 2k_2c_2x + c_2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$y_2^2 = 9 - x^2$ (упр. касания с окр. $R=3$)~~
 ~~$k_2^2 x^2 + 2k_2 c_2 x + c_2^2 = 9 - x^2$ - ур. имеет 1 реш.~~
 ~~$(k_2^2 + 1)x^2 + 2k_2 c_2 x + c_2^2 - 9 = 0$~~ (условие касания
прямой окр-ти)

~~$k_2^2 c_2^2 - c_2^2 (k_2^2 + 1) = 0 \Rightarrow c_2 =$~~

1) $k_2 x + c_2 = \sqrt{9 - x^2}$ ~~не имеет~~
- имеет 1 решение
(условие касания с первой окр-тью радиуса 3)

$9 - x^2 = c_2^2 + k_2^2 x^2 + 2k_2 c_2 x$
 $(1 + k_2^2)x^2 + 2k_2 c_2 x + c_2^2 - 9 = 0$ имеет 1 решение

$(k_2 c_2)^2 - (1 + k_2^2)(c_2^2 - 9) = 0;$

$k_2^2 c_2^2 - c_2^2 - k_2^2 c_2^2 + 9 + 9k_2^2 = 0 \Rightarrow 9k_2^2 = c_2^2 - 9$ (*)

$k_2 x + c_2 = -\sqrt{4 - (x+7)^2}$ - имеет 1 решение
(условие касания со 2-й окр-тью радиуса 2)

$k_2^2 x^2 + c_2^2 = 4 - (x+7)^2 - 2k_2 c_2 x$

$(1 + k_2^2)x^2 + (14 + 2k_2 c_2)x + (c_2^2 + 45) = 0$

$(7 + k_2 c_2)^2 - (1 + k_2^2)(c_2^2 + 45) = 0; \Rightarrow 45k_2^2 - 14c_2 k_2 - 4 = 0$

Из (*) и (**) следует, что $14c_2 k_2 + 4 = 5c_2^2 - 45$ (**)

$9k_2^2 = c_2^2 - 9$

$45k_2^2 = 14c_2 k_2 + 4$

$k_2 = \left(\frac{5c_2^2 - 49}{14c_2} \right)^2$

решив систему и найдя k_2 и c_2 , можно
дать ответ на вопрос задачи.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N5. \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4; \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4$$

$$\left. \begin{aligned} & \log_7^4(6x) - \frac{7}{2} \log_7(6x) + 4 = 0 \\ & \log_7^4(6x) - \frac{7}{2 \log_7(6x)} + 4 = 0 \\ & \log_7^4 y + \frac{7}{2 \log_7 y} + 4 = 0 \end{aligned} \right\}$$

Рассм. функцию $f(t) = \log_7^4 t + \frac{7}{2 \log_7 t} + 4$

$$f(t) = t^4 + \frac{7}{2t} + 4; \text{ при } t_1 = -\log_7 6x \text{ и } t_2 = \log_7 y$$

$f(t)$ обращается в ноль. $(7^{t_1} = 6x \quad 7^{t_2} = y)$

$$x = \frac{1}{6 \cdot 7^{t_1}}; y = 7^{t_2}$$

при $t_1 = t_2 \quad xy = \frac{1}{6}$

~~Исследуем $f(t)$.~~

$$t^4 + \frac{7}{2t} + 4 = \frac{2t^5 + 8t + 7}{2t}$$

$2t^5 + 8t + 7 = 0$. t_1 и t_2 - корни этого уравнения

Рассм. ср-во $y(t) = 2t^5 + 8t + 7$

(t_1 и $t_2 \neq 0$, т.к. $6x$ и y - осн. логарифмов) (по условию)

$y' = 10t^4 + 8 > 0$ при всех $t \in \mathbb{R} \Rightarrow y(t)$ возр. монотонно

и имеет максимум только один корень $\Rightarrow t_1 = t_2$, и един-

ственный возм. произв. xy является $\frac{1}{6}$.

ответ: $\frac{1}{6}$.

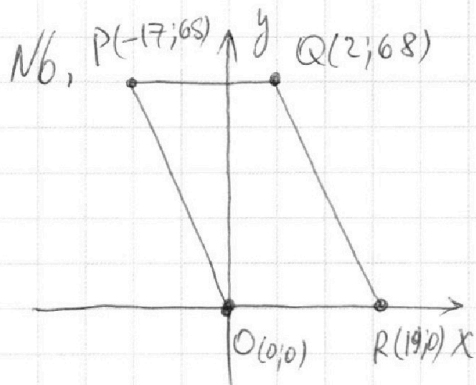
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ур. прямой OR : $y=0$

ур. прямой PQ : $y=68$

ур. прямой PO : $y=-4x$

ур. прямой QR : $y=-4x+76$
с целыми коорд.

Любая точка \checkmark внутри парал-

лелограмма будет леж. на прямой $y=-4x+\alpha$,

где $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in [0; 76]$; ~~для~~

Пусть $y_1 = -4x_1 + c_1$; $y_2 = -4x_2 + c_2$

Тогда $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = y_2 + 4x_2 - (y_1 + 4x_1) =$
 $= c_2 - c_1 = 40$; $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$, $c_1, c_2 \in [0; 76]$.

Задачу можно переформулировать так; сколькими способами можно выбрать два целых на числа на отрезке $[0; 76]$ так, чтобы их разность равнялась 40.

Пометно, что $c_2 > c_1$; $76 \geq c_2 \geq 39$; ~~и~~ при $c_2 \leq 39$

c_1 будет < 0 . Значит, всего способов $76 - 39 = 37$

Ответ: 37.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

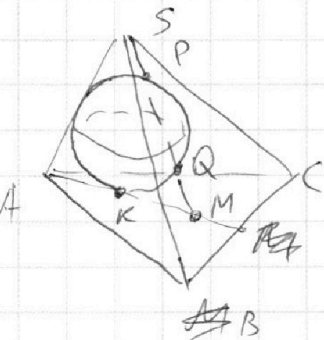
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

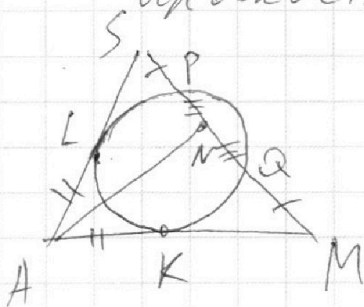


Рассм. сечение пирамиды

плоскостью ASM .

$AL = AK$ как

отрезки касат.



Проведем медиану AN в $\triangle ASM$.

Тогда $PN = NQ$ (в силу p -оси SP и MQ),

и $AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{AA_1}{\sin \alpha}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \arccos \alpha \in [0; 5\pi)$$

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x < 5\pi \quad -\frac{3\pi}{2} \leq x < \frac{7}{2}\pi$$

$$\arccos \alpha \in [0; \pi)$$

$$\sin x = \alpha$$

$$\arccos \alpha = \beta$$

$$\cos \beta = \alpha$$

$$\cos \beta = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin x$$

$$5\beta = \frac{3\pi}{2} + x$$

sin

$$x = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$2 \sin \frac{\pi - \beta - x}{2} \cos \frac{\pi - (\beta + x)}{2} = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \sin x = 0$$

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) =$$

$$\frac{\cos(x+\beta)}{2} = 0$$

$$x+\beta = \pi n + \frac{\pi}{2} = \sin A \cos B - \sin A \cos B + \cos A \sin B + \cos A \sin B$$

$$= 2 \sin B \cos A$$

$$\sin(\beta - x) = 0$$

$$\beta - x = \pi m$$

$$\beta = \frac{A+B+A-B}{2}$$

$$\beta = \pi n + \frac{\pi}{2} - x$$

$$\beta = \frac{A+B-A+B}{2}$$

$$\beta = \pi m + x$$

$$5\pi n + \frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$6x = 5\pi n + \pi = 6\pi k$$

$$x = \pi k$$

$$5\pi m + 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$4x = \frac{3\pi}{2} - 5\pi m$$

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$$

$$(x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0$$

$$0 = 5 + 7p + (4+57)z$$

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ x^2+y^2+14x+45=0 \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$$

$$x^2+y^2+14x+45=0$$

$$x^2+y^2=9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = \alpha \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}; \quad bc = \beta \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}; \quad ac = \gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

$$abc = \alpha\beta\gamma \cdot 2^{34} \cdot 3^{41} \cdot 5^{75} \quad ab, bc, ac; \quad 2^7, 3^{11}, 5^{14}$$

$$abc = ac \cdot \sqrt{\frac{ab \cdot bc}{ac}} = \gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \sqrt{\frac{\alpha \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot \beta \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}}{\gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}}}$$

$$= 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{38} \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma} \cdot 2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{-11}} = 2^{17} \cdot 3^{24} \cdot 5^{38} \sqrt{\alpha\beta\gamma/5} \quad \alpha\beta\gamma = 5$$

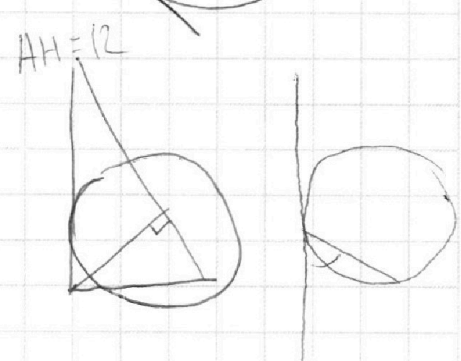
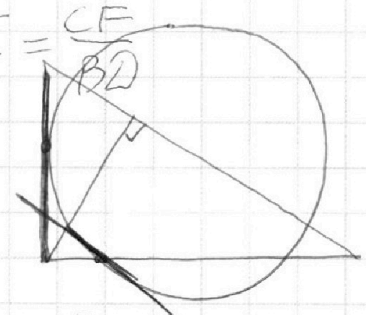
$$10t^4 + 8 = 10$$

$$t^4 = 1$$

$$t = 1$$

$$\frac{AC}{CF} = \frac{AD}{CE} = \frac{CD}{FE}$$

$ACD \sim CFE$

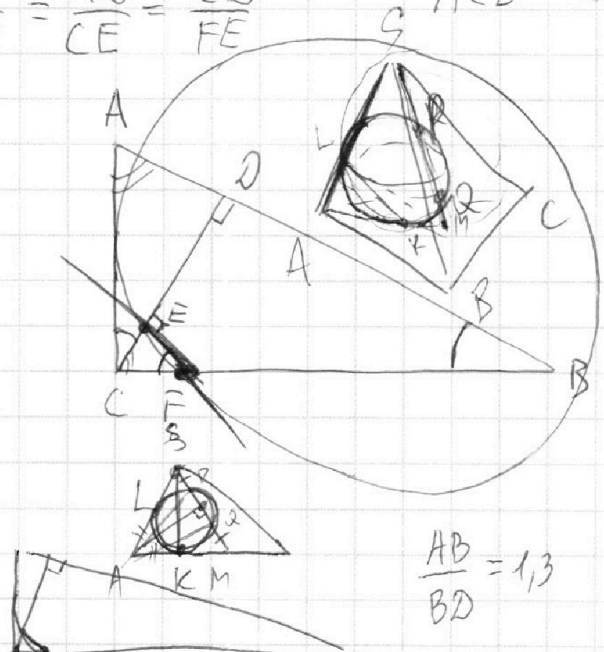


$$\frac{AB}{BD} = 1,3$$

$$AB = 1,3 \cdot BD$$

$$AD = AB - BD = 1,3BD - BD = 0,3BD$$

$$\sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{0,3BD^2} = AB \quad \sqrt{0,3}BD = AB$$



$$\frac{AB}{BD} = 1,3$$

$$0 = k + (k+7)t + 57z$$

$$AB = 1,3 \cdot BD$$

$$AB = 0,3BD$$

$$AB = \sqrt{\frac{AD \cdot BD}{0,3}}$$

$$0 = k + 78 + 57z$$

$$\log_7 y + \frac{1}{2} \log_7 y$$

$$AD = AB - BD = 1,3BD - BD = 0,3BD$$

$$\sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{0,3BD^2} = AB \quad \sqrt{0,3}BD = AB$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$$

$$x = 78$$

$$0 = \frac{72}{k+78+57z}$$



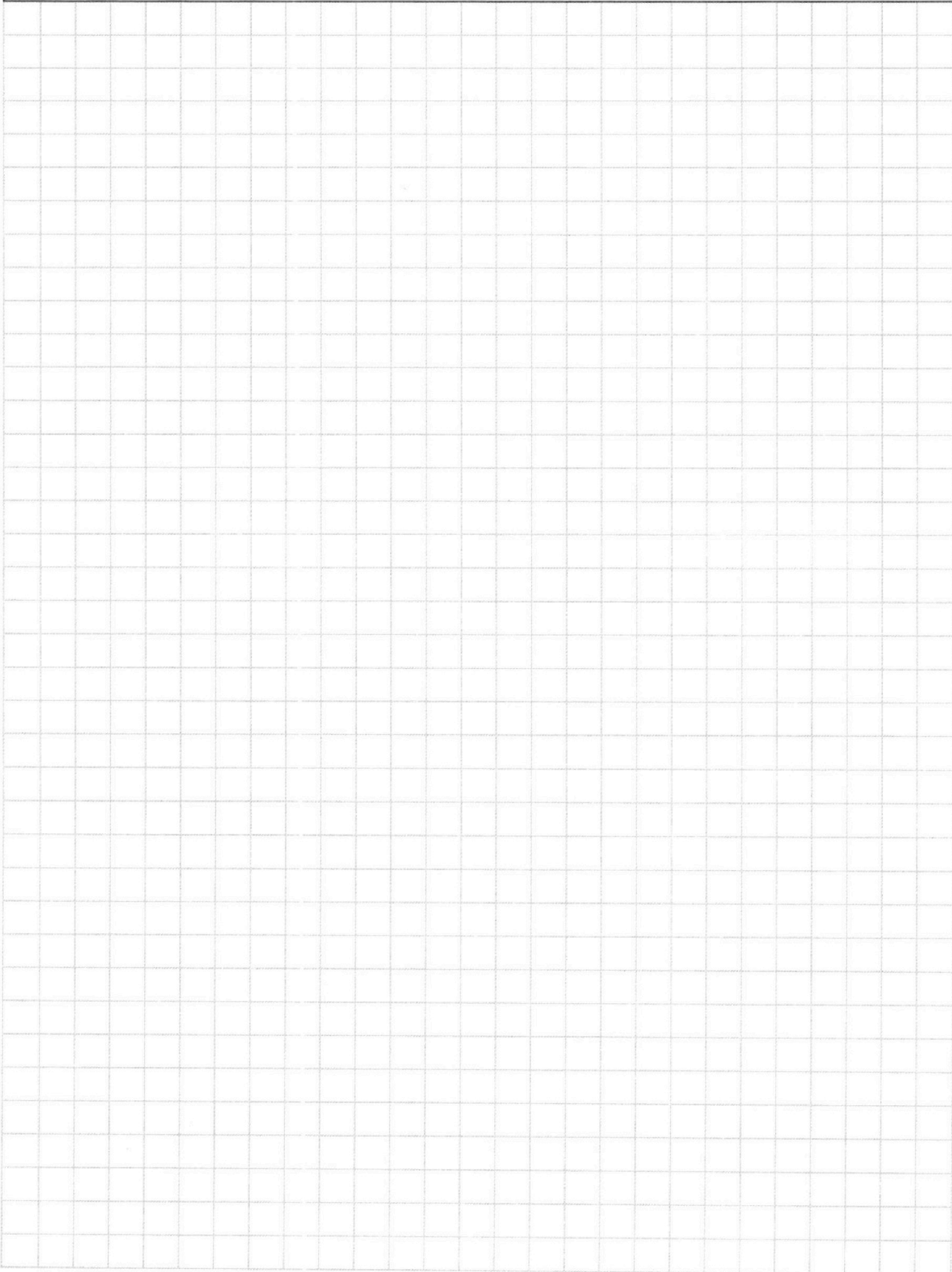
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$49 + k_2^2 + 14k_2c_2 - c_2^2 - k_2c_2^2 - 45k_2 - 45k_2^2 = 0$$

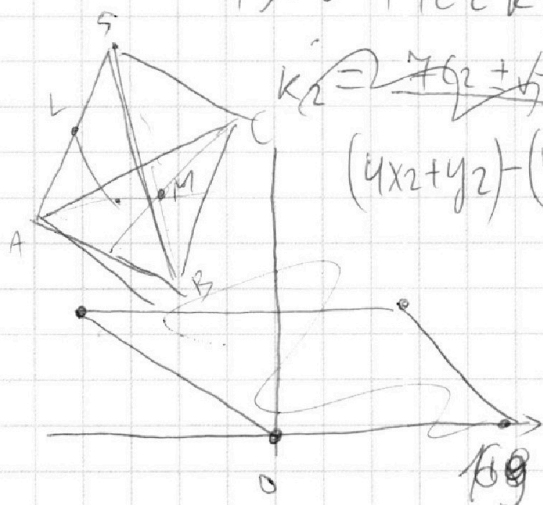
$$45k_2^2 - 14k_2c_2 - 4 = 0 \quad 4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$$

$$9k_2^2 = c_2^2 - 9 \quad y_1 = -4x + c_1 \quad y_1 + 4x_1 = c_1$$

$$45k_2^2 - 14c_2k_2 - 4 = 0 \quad 14c_2k_2 + 4 = 5c_2^2 - 45$$

$$y_2 + 4x_2 = c_2$$

$$c_1 + c_2 = 40$$



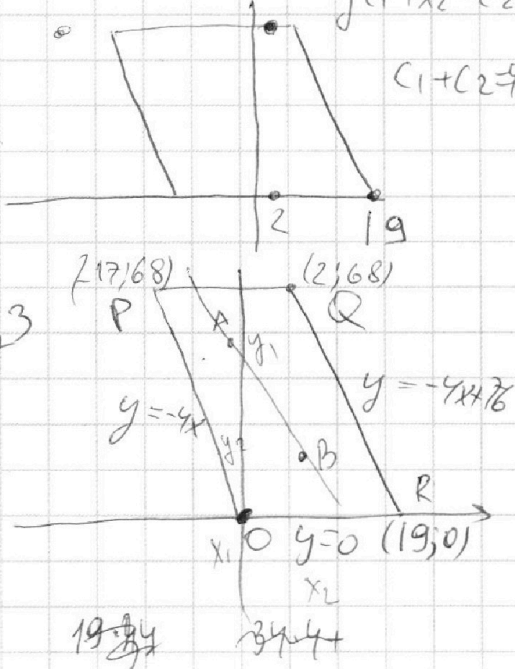
$$k_2 = \frac{7c_2 + \sqrt{49c_2^2 + 180}}{45}$$

$$(4x_2 + y_2) - (4x_1 + y_1) = 40$$

$$y = 68$$

$$343 = 7^3$$

$$y = 0$$



$$RQ: \begin{cases} 19a + b = 0 \\ 2a + b = 68 \end{cases} \begin{cases} a = -4 \\ b = 76 \end{cases}$$

$$343 = 7 \cdot 49 = 7^3$$

$$AB = 1,3 BD = \frac{13}{8} AD$$

$$\frac{AD}{CE} = \frac{FB}{CE} = \frac{AC}{CE} = \frac{AB}{FB} \quad CE = \frac{AC \cdot FB}{AB}$$

$$CE \cdot AB = AC \cdot BC - \frac{CE \cdot AC^2}{AD} \quad CE \cdot AB = AC \cdot (BC - CF)$$

$$CF = \frac{AC \cdot CE}{AD}$$

$$CE \cdot \frac{13}{8} AD = \frac{77}{8} \text{ при } y = -4x + a$$

$$y_2 - y_1 = -4x_2 + a - (-4x_1 + 40) \quad S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD \quad a \in [0; 76], a \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot EF = \frac{1}{8} \cdot BD \cdot CD$$

$$x \in [0; 76] \quad \log_7^4 6x - 2 \log_7 6x = \frac{3}{2} \log_7 6x - 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

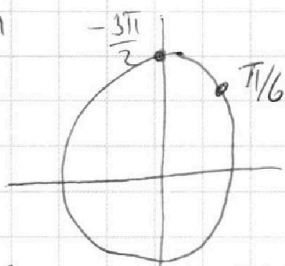
- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3}$$



$$x = 7b - 3ay$$

$$\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi - 10\pi}{6} = \frac{-9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi + 10\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{3} = \frac{21\pi}{6} = \frac{7\pi}{2}$$

$$c^2 - 9 = 9 \cdot \frac{(5c^2 - 49)^2}{14c^2}$$

$$5c^2 - 45 = 14c^2 k_2 + 4$$

$$k_2 = \frac{5c^2 - 49}{14c^2} - \frac{5\pi}{2} = \frac{-3\pi}{2}$$

$$\pi + \frac{5\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

$$x = 7b - 3ay$$

$$y = \frac{7b - x}{3a}$$

$$49^2 = 2500 + 1 - 100 = 2401$$

$$\sqrt{2401} = 49$$

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \text{ORP.}$$

$$y^2 =$$

$$y^2 = \dots; x^2 = u$$

$$u + 3av - 7b = 0 \quad -y^2 = x^2 + 14x + 45$$

$$u + v - 9 = 0$$

$$D_{14} = 49 - 45 = 4$$

$$-y^2 = (x+9)(x+5) < 0$$

$$x \in [-9, -5]$$

$$7b - x$$

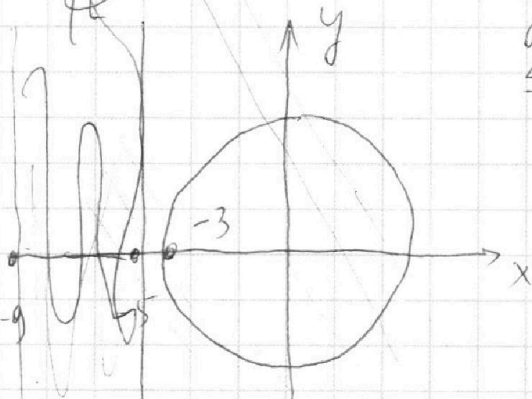
$$y = \frac{7b - x}{3a}$$

$$x + 3ay - 7b = (x^2 + 14x + y^2 + 45)$$

$$(x^2 + 7)^2 + y^2 = 4$$

$$9(25c^2 + 49 - 490c^2) = 196c^2(c^2 - 9)$$

$$29c^4 - 294 \cdot 9c^2 + 9 \cdot 2205 = 0 \quad | : 9 = 0$$



$$y^2 + 45 \quad y_2 = k_2 x + c_2$$

$$k_2 x + c_2 =$$