



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

Пусть a_1, b_1, c_1 - степени входящие углы

В числах a, b, c соответственно. Тогда имеем систему:
т.н. abc миним., т.н. миним. степень входящие 2, 3, 5 в abc (2, 3, 5 взяли по 1 разу)

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 6 \\ b_1 + c_1 \geq 14 \\ c_1 + a_1 \geq 16 \end{cases} \quad \text{отсюда} \quad a_1 + b_1 + c_1 \geq 18, \text{ заметим} \\ \text{что равенство выполняется}$$

~~Пусть a_2, b_2, c_2 - степени~~ т.н. $a_1 = 4, b_1 = 2, c_1 = 12$

Пусть a_2, b_2, c_2 - степени входящие углы

в a, b, c соответственно, отсюда имеем

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 13 \\ b_2 + c_2 \geq 21 \\ c_2 + a_2 \geq 25 \end{cases} \quad \text{сложив, имеем: } a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{59}{2}, \\ \text{т.н. } a, b, c \in \mathbb{N}, \text{ то } a_2 + b_2 + c_2 \geq$$

≥ 30 . Заметим, что $a_2 = 8, b_2 = 5, c_2 = 17$ углы.

имеем, и их сумма равна 30.

Пусть a_3, b_3, c_3 - степени входящие углы

в a, b, c соответственно, отсюда имеем.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 11 & (1) \\ b_3 + c_3 \geq 13 & (2) \\ c_3 + a_3 \geq 28 & (3) \end{cases}$$

Сумма первых трех неравенств:
 $a_3 + c_3 + 2b_3 \geq 24$
но из (3) $c_3 + a_3 \geq 28$, тогда

min сумма $a_3 + b_3 + c_3 = 28$ при $a_3 = 13, b_3 = 0, c_3 = 15$

(все значения выполнены)

Тогда min значение $abc = 2^{18} \cdot 3^{20} \cdot 5^{28}$

($a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{13}, b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0, c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

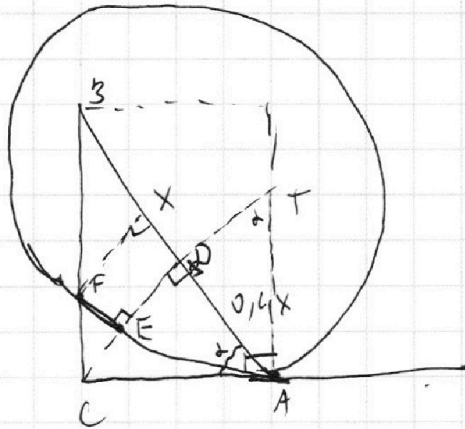
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~2.



$AB \parallel EF$

$$\frac{AB}{BD} = 1,4$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} \rightarrow$$

$$BD = x, AD = 1,4x - x = 0,4x$$

$$CD = \sqrt{x \cdot \frac{2}{5}x} = x\sqrt{\frac{2}{5}}$$

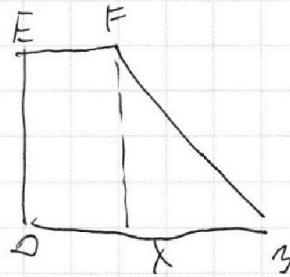
$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF}$$

$$AD^2 = CD \cdot DT$$

$$\frac{4}{25}x^2 = \sqrt{\frac{2}{5}}x \cdot DT$$

$$DT = CD = \frac{2}{5}x$$

$$DT = \frac{x^2 \cdot \frac{4}{25}}{x\sqrt{\frac{2}{5}}} = \frac{x \cdot 4}{25\sqrt{\frac{2}{5}}} = \frac{4\sqrt{5}x}{25\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{10}x}{25 \cdot 2} = \frac{2\sqrt{10}}{25}x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3.

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

Возьмем \cos от обеих частей, а затем проведем необходимые преобразования.

$$\cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)\right) = \sin\left(\frac{5\pi - 9\pi + 2x}{10}\right) =$$

$$= \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\sin x - \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right) = 0$$

$$2 \sin \frac{x - \left(x - \frac{2\pi}{5}\right)}{2} \cos \frac{x + \left(x - \frac{2\pi}{5}\right)}{2} = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{5x - x + 2\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{6x - 2\pi}{10}\right) = 0 \quad | :2$$

$$\sin\left(\frac{2x + \pi}{5}\right) \cos\left(\frac{3x - \pi}{5}\right) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{2x + \pi}{5}\right) = 0 \quad (1) \\ \cos\left(\frac{3x - \pi}{5}\right) = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$(1) \quad \sin\left(\frac{2x + \pi}{5}\right) = 0$$

$$\frac{2x + \pi}{5} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x + \pi = 5\pi k$$

$$2x = -\pi + 5\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

проверим полученную серию решений:

при $k \leq -1$ $x \leq -3\pi$, тогда в интервал

уравнения $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ не будет решений

$\geq 15\pi$, но т.к. $0 \leq \arccos(a) \leq \pi$, то левая

часть $\leq 10\pi$, следовательно при $k \leq -1$ решений нет

при $k=0$ $x = -\frac{\pi}{2}$ (1)

$$10 \arccos(\sin(-\frac{\pi}{2})) = 10 \arccos(-1) = 10\pi$$

$$9\pi - 2 \cdot (-\frac{\pi}{2}) = 10\pi$$

при $k=1$: при $k \geq 1$

$x = k\pi$:

$$x = -\frac{\pi}{2} + 5\pi = 2\pi$$

$$10 \arccos(0) = 10$$

$$9\pi - 2 \cdot 2\pi = 5\pi$$

$5\pi \neq 10$, не реш.

при $k \geq 2$

$$x \geq -\frac{\pi}{2} + 5\pi = \frac{11\pi}{2}$$

тогда левая часть в интервале удовлетворяет

$$\leq 9\pi - 11\pi = -2\pi < 0, \text{ но } 10 \arccos(\sin x) \geq 0,$$

следовательно при $k \geq 2$ решений нет

$$(2) \cos\left(\frac{3x-\pi}{5}\right) = 0$$

$$\frac{3x-\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$3x - \pi = \frac{5\pi}{2} + 5\pi m$$

$$3x = \frac{9\pi}{2} + 5\pi m$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi m}{3}$$

при $m=0$:

$$x = \frac{7\pi}{6} \oplus$$

$$9\pi - 2 \cdot \frac{7\pi}{6} = 9\pi - \frac{7\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}$$

$$10 \arccos \left(\sin \frac{7\pi}{6} \right) = 10 \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) = 10 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}$$

при $m=1$:

$$x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{17\pi}{6} \oplus$$

$$9\pi - 2 \cdot \frac{17\pi}{6} = 9\pi - \frac{17\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$$

$$10 \arccos \left(\sin \frac{17\pi}{6} \right) = 10 \arccos \left(\sin \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{10\pi}{3}$$

при $m=2$: \oplus

$$x = \frac{7\pi}{6} + \frac{10\pi}{3} = \frac{27\pi}{6} = \frac{9\pi}{2}$$

$$9\pi - \frac{27\pi}{3} = 0$$

$$10 \arccos \left(\sin \frac{27\pi}{6} \right) = 10 \arccos \left(\sin \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

при $m \geq 3$

$2x > 9\pi$ и пр. возьмем отрицательные значения

решения нет.

при $m=-1$

$$x = \frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} \oplus$$

$$9\pi + \pi = 10\pi$$

$$10 \arccos \left(\sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 10\pi$$

при $m \leq -2$

$x < -\frac{\pi}{2}$ и пр. возьмем $> 10\pi$, решение нет.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{9\pi}{2} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 4.

$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 81 - 4) = 0 & (2) \end{cases}$$

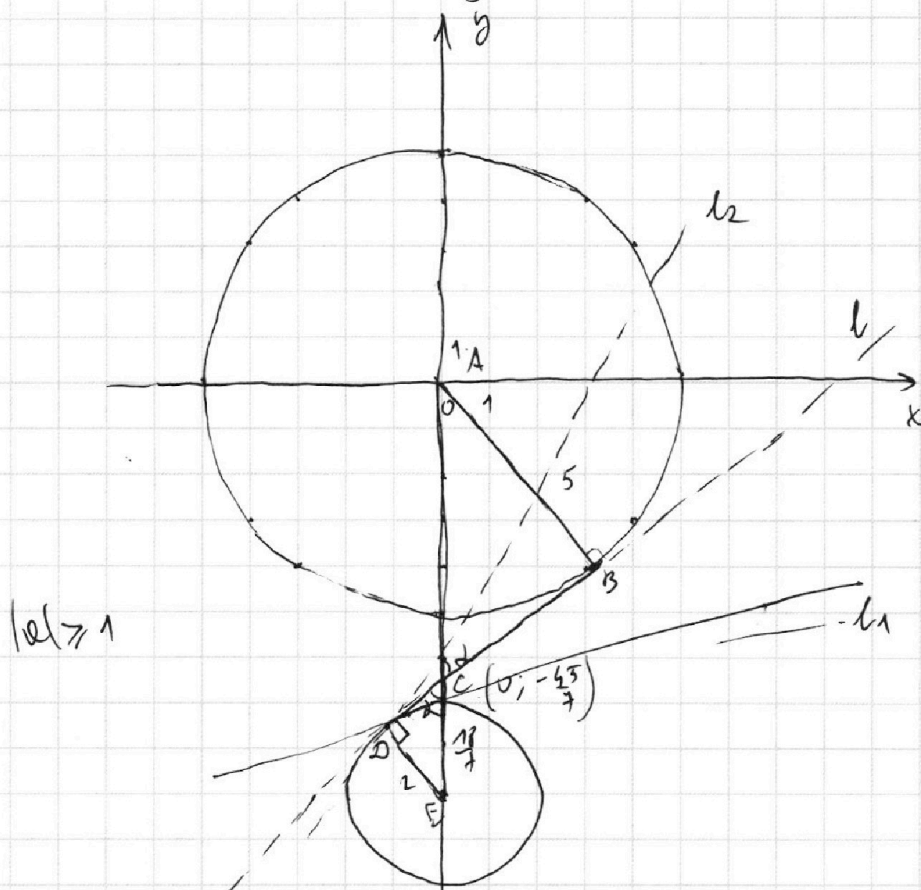
(2)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$$

(1):

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{6}{6a} \quad \text{при } a \neq 0$$

$$\text{при } a = 0 \quad x = \frac{6}{5}$$



Взяв за основу с функцией $u(x, y)$, или
можно параллельно переформулировать ее (за ~~этом~~
касательство B)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если прямая - такая линия
(окрест. касается её с
разных сторон)
касательная к прямой, как прямая l , то также
касательная или не пройдет, т.е. параллельно
прямой l , мы будем получать не более 2
точек пересечения с одной из окружностей
(при касании - с обеими). Заметим, что если
мы увеличим угол α кр. прямой (по мере),
относительно \downarrow прямой l (кр. l_1 на рисунке),
то система также не будет иметь более 2
решений (пересекать только одну окр.)
Если увеличим угол α кр. прямой (по
мере) отн. кр. прямой l (кр. l_2 на рисунке),
то система будет иметь 4 решения при некотором

α (пересекать обе окружности)

1 $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ по 2 углам; $AB=5$ (радиус), $ED=2$

(радиус), тогда $\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{ED} = \frac{5}{2}$

$$AE = 9$$

$$AB = \frac{5}{7} \cdot 9 = \frac{45}{7}$$

$$DE = \frac{2}{7} \cdot 9 = \frac{18}{7}$$

Площа \triangle пропорции через $\angle C (0; -\frac{45}{7})$

$$S_{\triangle DCE} = \frac{18}{7 \cdot 2} = \frac{18}{7} \quad S_{\triangle DCE} = \frac{2}{\frac{45}{7}} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\angle DCE = \alpha$, тогда $\sin \alpha = \frac{b}{c}$ (или $\cos \alpha = \frac{a}{c}$)

$$\sin(\gamma_0 - \alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{7}{9}\right)$$

$$\Rightarrow k = -\frac{5}{6a} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{7}{9}\right)$$

$$a = -\frac{6}{5} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{7}{9}\right)$$

или $|k| \leq \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{7}{9}\right) \right|$ сумма

не имеет 4 решения (кроме случая $a=0$,

тогда это вырожденный случай $k = \frac{6}{5}$, который

имеет 2 решения 4 решения), при определении a

имеет 2 решения 4 решения.

Итак, ~~если~~ $a=0$; ~~тогда~~ $\frac{6}{5} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{7}{9}\right)$

$|k| \geq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{7}{9}\right)$, где $k = -\frac{5}{6a}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_m^4 x - 6 \log_x^{11} = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5 \\ \log_m^4 (0,5y) + \log_{0,5y}^{11} = \log_{0,125y}^3 (11^{-11}) - 5 \end{cases}$$

(*):

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ 0,5y \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_x^{11} = \frac{1}{\log_m x}$$

$$\log_x^3 \frac{1}{121} = -\log_x^3 11^2 = -\frac{2}{3} \log_x^{11} = \frac{-2}{3 \log_m x}$$

$$\begin{aligned} \log_{0,125y}^3 (11^{-11}) &= \log_{(0,5y)^3} (11^{-11}) = \frac{-11}{3} \log_{0,5y}^{11} \\ &= \frac{-11}{3 \log_m 0,5y} \end{aligned}$$

$$\log_m x = a, \log_{11} 0,5y = b$$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 & | \cdot 3a \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{11}{3b} - 5 & | \cdot 3b \neq 0 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 3a^5 + 15a - 11 = 0 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 3b^5 + 15b + 11 = 0 \end{cases}$$

$$3a^5 + 15a = -3b^5 - 15b \quad | :3$$

Решение

$$a^5 + 15a = (-b)^5 + 15(-b)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3a^5 + 15a + 3b^5 + 15b = 0 \quad | :5$$

$$\cancel{a^5} + 3a$$

$$a^5 + 5a = (-b)^5 + 5(-b)$$

Введи $f(t) = t^5 + 5t$

$$f'(t) = 5t^4 + 5 > 0, \text{ значит } f(t) \text{ монотонно}$$

возрастает, т.е. каждый знаменатель минимален

1 раз

$$f(a) = f(-b), \text{ значит } a = -b$$

$$\log_m x + \log_m 0,5y = 0$$

$$\log_m 0,5xy = 0$$

$$0,5xy = 1$$

$$xy = 2$$

Ответ: 2.

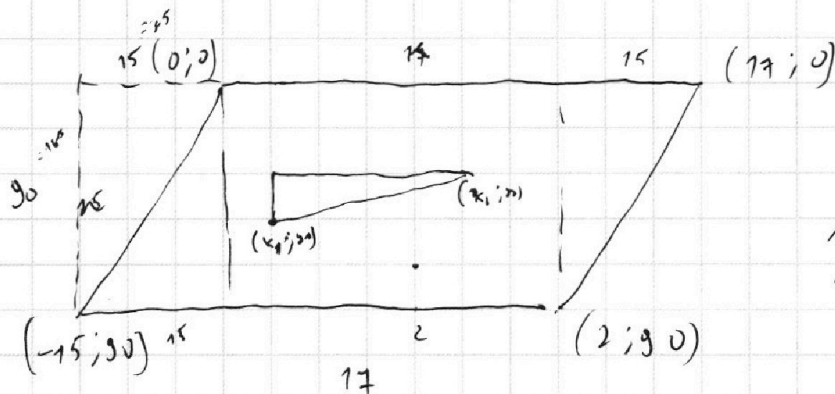
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$A(x_1; y_1)$$

$$B(x_2; y_2)$$

$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$\frac{y_2}{y_2 - y_1} = \frac{53}{48}$$

$$\frac{y_0}{15} = 6$$

$$\underbrace{6(x_2 - x_1)}_{:6} + \underbrace{y_2 - y_1}_{:6} = \underbrace{48}_{:6}$$

$$y_2 - y_1 = 6t$$

$$6, \dots, 48$$

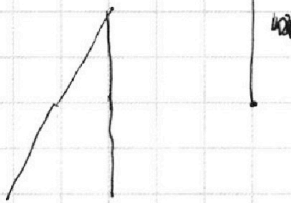
$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ y_2 - y_1 = 48 \end{cases}$$

8 вариантов



$$C \quad \frac{y_2}{y_2 - y_1} = \frac{48}{48}$$

90 - 48 = 42
48 - 48 = 0





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

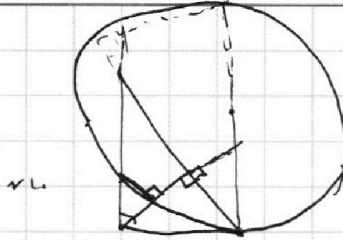
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



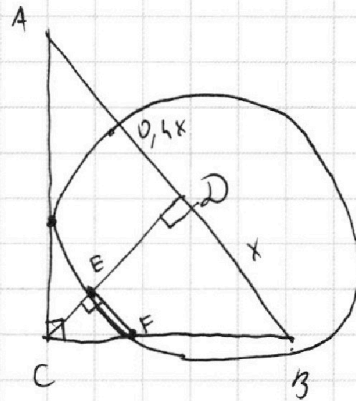
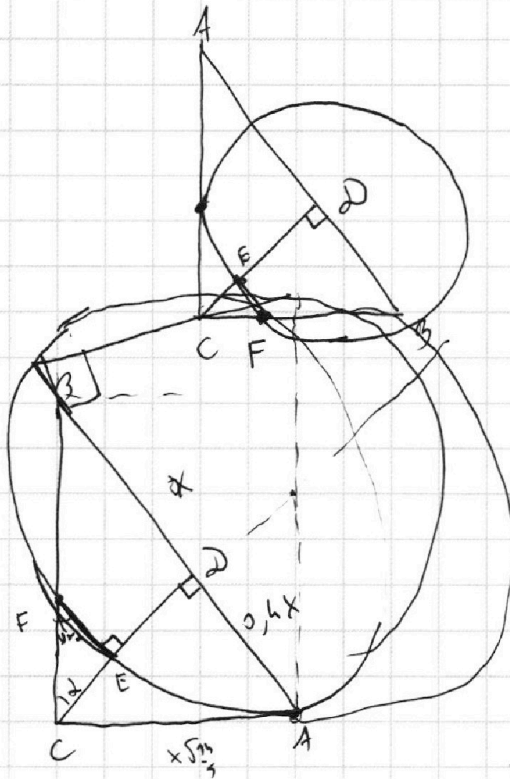
$$\log_{11} x = \alpha$$

$$\sin 5 = 5'$$

$$\log \left(\frac{11}{5} \right)^3 \left(11^{-13} \right) =$$



$AB \parallel EF$



$$S_{ACD}$$

$$S_{CEF}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{CD \cdot AD}{CE \cdot EF}$$

$$\frac{h}{x} = \frac{\frac{2}{5}x}{h}$$

$$CA^2 = CE \cdot CD$$

$$CA^2 = CE \cdot x \sqrt{\frac{2}{5}}$$

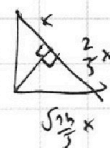
$\sqrt{2}$

$$\frac{14}{25} x^2 = CE \cdot x \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$CE = \frac{x \cdot \frac{14}{25}}{x \sqrt{\frac{2}{5}}} = \frac{x \cdot 14}{25 \sqrt{\frac{2}{5}}}$$

$$h = \sqrt{x \cdot \frac{2}{5} x} = x \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$CA^2 = \sqrt{\frac{4}{25} x^2 + \frac{2 \cdot 16}{5} x^2} = \sqrt{\frac{4}{25} x^2 + \frac{32}{5} x^2} = \frac{\sqrt{68}}{5} x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~ 5.

$$\begin{cases} \log_m^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x x^3 \left(\frac{1}{11}\right)^2 - 5 \\ \log_m^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{(0,5y)^3} (11^{-15}) - 5 \end{cases}$$

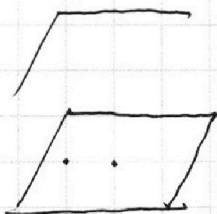
~~$\log_m x = 4$~~

$$\log_x x^3 \left(\frac{1}{11}\right)^2 = -\log_x x^3 11^2 = -\frac{2}{3} \log_x 11$$

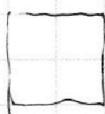
$$\log_m x = a$$

$$-\frac{13}{3} \log_{0,5y} 11$$

$$\log_m 0,5y = b$$



$$\begin{cases} a^4 - \frac{6a}{a} = -\frac{2}{3} - 5 \quad | \cdot 3a \\ 6^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3} - 5 \quad | \cdot 3b \end{cases}$$



$$\begin{aligned} b &= \sqrt{11} \\ 4 &= \sqrt{11} + 4 \\ 4 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3b^5 + 3 + 13 + 15b &= 0 \\ 3a^5 - 18 &= -2 - 15a \end{aligned}$$

$$a+b = \log_m x \cdot 0,5y$$

$$2^3 \cdot 1^3 =$$

$$\begin{cases} 3a^5 + 15a - 16 = 0 \\ 3b^5 + 15b + 16 = 0 \end{cases}$$

$$(x^3 + y^3) = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$3(a^5 + b^5) + 15(a+b) = 0$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$a^5 + b^5 = -5(a+b)$$

$$\begin{array}{r} a^5 + b^5 \quad | \quad a+b \\ -a^3 + b^3 \quad | \quad a^2 \\ \hline -a^2b + b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^5 + b^5 \quad | \quad a+b \\ -a^4 + a^3b \quad | \quad a^2 + ab - a^2b^2 + ab^3 + b^4 \\ \hline a^5 + a^3b^2 - a^2b^3 + b^4 \end{array}$$

$$4 - a^3b + a^2b^2 - b^3a + b^4 = -5$$

$$a^5 + 5a = -b^5 - 5b$$

$$a^5 + 5a = (b^5 + 5b)$$

$$f(t) = t^5 + 5t$$

$$f'(t) = 5t^4 + 5$$

~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

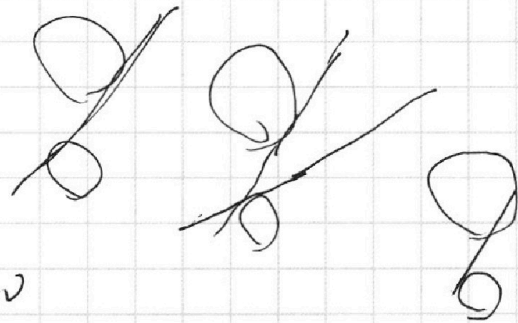
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x^2 + (y^2 + 18y) + 81 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

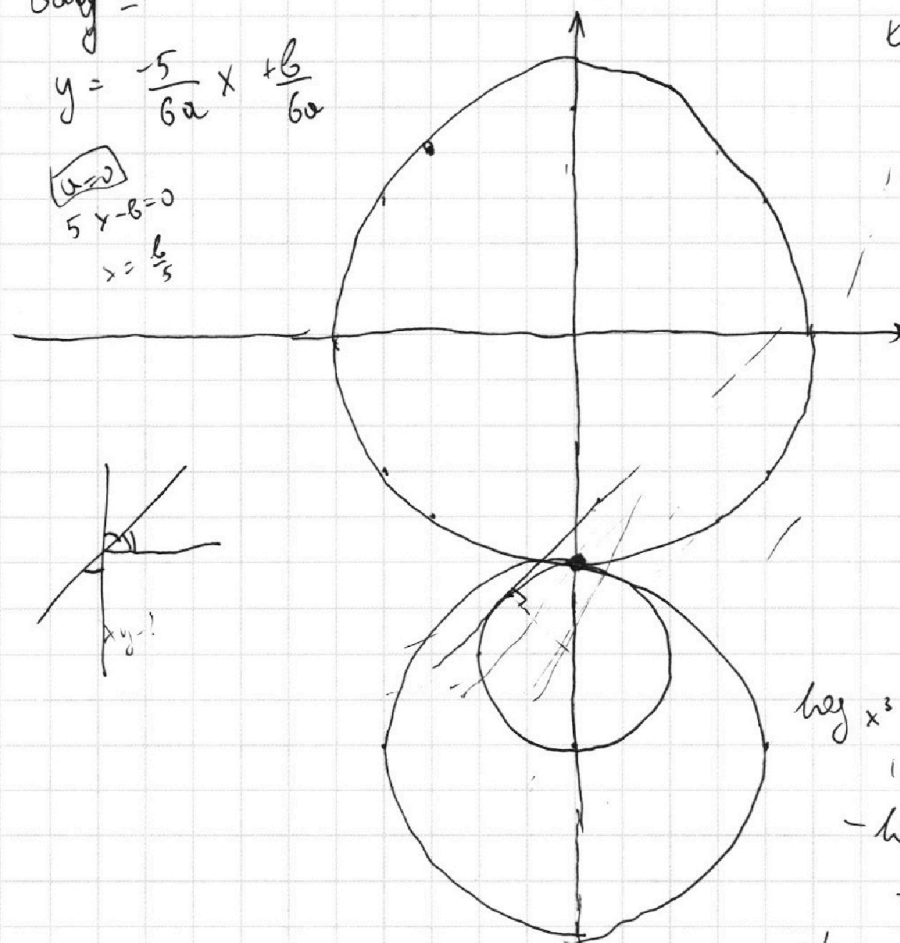
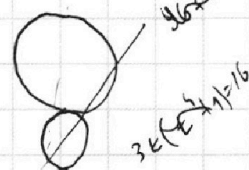


$$\begin{aligned} 6ay &= -5x + b \\ y &= \frac{-5}{6a}x + \frac{b}{6a} \end{aligned}$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4 \quad \log_m x = k$$

$$t^4 - \frac{6}{t} + \frac{2}{3t} + 15 = 0 \quad | \cdot 3t$$

$$\begin{aligned} 3t^5 + 15t - 17 &= 0 \\ 3t^5 + 15t - 16 &= 0 \end{aligned}$$



$$\log_2 4 = 2 \quad \log_2 \frac{2}{4} = -2$$

$$\begin{aligned} \log x^3 \frac{1}{11} &= \log x^3 1 - \\ &= -\log x^3 11 \\ &= -\log x^3 11^1 = -\frac{2}{3} \log x 11 \end{aligned}$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = \frac{-2}{3t} - 5$$

$$\log_m^4 x - 6 \log x 11 = \log x^3 \left(\frac{1}{11}\right)^2 - 5$$

$$\log_m^4 \left(\frac{11}{2}\right) + \log \frac{2}{2} 11 = \log \left(\frac{11}{5}\right)^3 (11^{-13}) - 5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arccos(\cos(5\pi x)) = 9\pi - 2x$$

$x \in [0; 10\pi]$

$$4\frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{12}}{3} = \frac{7\pi - 10\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\pi}{6} = 4 + \frac{3}{6} = 4 + \frac{1}{2}$$

$$\arccos(\cos(5\pi x))$$

$$\arccos(\cos(5\pi x)) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$\frac{17}{6} = 2$$

$$2 + \frac{5}{6}$$

$$\cos(\dots) = \cos(\dots)$$

$$\frac{12}{6} + \frac{5}{6}$$

$$5\pi x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$9\pi = \frac{24\pi}{3}$$

$$\cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{10} - \frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{2x - 4\pi}{10}\right) = \frac{x - 2\pi}{5}$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{x - 2\pi}{5}\right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\frac{x - (x - 2\pi)}{5} = \frac{5x - x + 2\pi}{5} = \frac{4x + 2\pi}{5}$$

$$\frac{5\pi}{3}$$

$$2\sin \frac{x - x + 2\pi}{5}$$

$$\frac{12\pi}{3} + \frac{7\pi}{6} = \frac{23\pi}{6}$$

$$2\sin\left(\frac{2x + \pi}{5}\right) \cos\left(\frac{3x - \pi}{5}\right) = 0$$

$$= \frac{4x + 2\pi}{10} = \frac{2x + \pi}{5}$$

$$\frac{5\sqrt{12}}{3} + \frac{7\pi}{6} =$$

$$\frac{2x + \pi}{5} = \pi k \quad (1)$$

$$\frac{7\pi}{6} =$$

$$\frac{3x - \pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$9\pi - \frac{7\pi}{3} =$$

$$\frac{\frac{5x + (x - 2\pi)}{5}}{2} = \frac{6x - 2\pi}{10} = \frac{3x - \pi}{5}$$

$$(1) \quad 2x + \pi = 5\pi k$$

$$(2)$$

$$2x = -\pi + 5\pi k$$

$$3x - \pi = \frac{5\pi}{2} + 5\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}$$

$$3x = \frac{7\pi}{2} + 5\pi k$$

$$k =$$

$$k = \frac{9\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3}$$



$$x = 2\pi$$

$$k = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = -3\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{6}$$

$$10 \arccos(-1) = 9\pi + \pi$$

$$10\pi = 10\pi$$

$$10 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{12\pi}{3}$$

$$9 \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~1

$$ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{27}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{36} \cdot 3$$

$$abc \rightarrow \min$$

$$2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$4 \cdot 6 : 2^1 \cdot 3^2 \cdot 2^1 \cdot 3$$

$$4 \cdot 6 : 2^3 \cdot 3$$

$$6 \cdot 12 : 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$4 \cdot 6 \cdot 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2$$

$$4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 12 : 2^5 \cdot 3^3$$

$$6^2 \cdot 4 \cdot 12 : 2^{10} \cdot 3^5$$

$$2^5 \cdot 3^1$$

$$4 \cdot 6 \cdot 12 = 2^5 \cdot 3^3$$

$$8 \cdot 4 : 2^5$$

$$4 \cdot 6 : 2^3 \cdot 3$$

$$8 \cdot 6 : 2^4 \cdot 3$$

$$8 \cdot 4 \cdot 6 : 2^{12} \cdot 3^2$$

$$2^6 \cdot 3$$

$$a = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^{13} \quad \sim 2$$

$$b = 2^2 \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{23} \cdot 5^{15}$$

$$\begin{cases} x+y=6 \\ y+z=14 \\ z+x=16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z-x=8 \\ z+x=16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=12 \\ x=4 \end{cases}$$

$$y=2$$

$$\begin{cases} x+y=11 \\ y+z=13 \\ z+x=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z-x=2 \\ z+x=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=11 \\ x=9 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=13 \\ y+z=21 \\ z+x=26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z-x=11 \\ z+x=15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=4 \\ z=12 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=11 \\ y+z=13 \\ z+x=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z-x=2 \\ z+x=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=11 \\ z=17 \\ x=13 \end{cases} = 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x+y \geq 13 \\ y+z \geq 21 \\ z+x \geq 25 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{13} \\ b &= 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^{10} \\ c &= 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z &\rightarrow \min \\ 2(x+y+z) &\geq 53 \\ x+y+z &\geq 26.5 \\ x+y+z &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+y \geq 11 \\ y+z \geq 13 \\ z+x \geq 22 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z+x &= 8 \\ z+x &= 25 \\ z-x &\geq 8 \\ z+x &\geq 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y &= 14 \\ y+z &= 21 \\ z+x &= 15 \end{aligned}$$

$$z-y = 12$$

$$\begin{aligned} z-x &\geq 24 \\ z+x &\geq 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2z &\geq 33 \\ z &\geq 16.5 \end{aligned}$$

$$z = 30 - x - y$$

$$11+13+22$$

$$z$$

$$15$$

$$\begin{aligned} 13 \cdot 2 &= 26 \\ 15 & \\ x &\geq 1 \end{aligned}$$

$$x+y+z \geq 27$$

$$\begin{cases} x+y = 14 \\ y+z = 15 \\ z+x = 22 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z+x &= 2 \\ z+x &= 22 \end{aligned}$$

$$z = 15$$

$$2z - 11 = 16$$

$$2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$\begin{cases} x+y \geq 11 \\ z-x \geq 13 \\ 2z-y \geq 22 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x+y &\geq 11 \\ z &= 2z - x + y \end{aligned}$$

$$x \leq 14$$

$$y \leq 1$$

$$z = 16$$

$$x = 10$$

$$y = 1$$

$$y = 5$$

$$x = 6$$

$$z = 13$$

$$y = 0$$

$$z = 15$$

$$x = 13$$

$$y = 1$$

$$x+y = 2z - z$$