



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-12;24)$ ,  $Q(3;24)$  и  $R(15;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим что  $abc: 7^{37}$ , м.к  $ac: 7^{37}$

$\square abc: 2^{26} \Rightarrow$  м.к  $ac: 2^{20} \Rightarrow$   ~~$b: 2^6$~~  deg вхождения  $2 \text{ в } b \leq 5$   
 м.к  $bc: 2^{17} =$   ~~$a: 2^9$~~  deg вхождения  $2 \text{ в } a \leq 8$

$\Downarrow$   
deg вхождения  $2 \text{ в } abc \leq 13$

$\Downarrow$   
 $13 \geq 14$

$abc: 2^{26}$

$\Downarrow$   
 $abc: \frac{2^{26}}{7} \cdot 7^{37}$ , м.к  $(2^{26}, 7^{37}) = 1$

$a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow abc > 0 \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$

Пример:  $a = 2^9 \cdot 7^{17}$ ;  $b = 2^6 \cdot 7^0$ ;  $c = 2^{11} \cdot 7^{20}$

$ab: 2^{15} \cdot 7^{10}$      $bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$      $ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$

$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Ответ:  $2^{26} \cdot 7^{37}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Сократим на } \Rightarrow \begin{matrix} a+b : m \\ a^2 - 6ab + b^2 : m \end{matrix} \Rightarrow (a+b)^2 : m \Rightarrow \begin{matrix} 8ab : m \\ a^2 + ab : m \\ b^2 + ab : m \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 8a^2 : m \\ 8b^2 : m \end{matrix}$$

$\exists$   $p$ -каждой простой делитель  $m \Rightarrow$

$$\text{Если } \alpha_k \geq 2 \Rightarrow \begin{matrix} a^2 : p \\ b^2 : p \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a : p \\ b : p \end{matrix} \Rightarrow \frac{a}{b} \text{ - сократим на } p$$

?! //

$p \leq 2 \Rightarrow m$  - степень двойки

Если  $\exists k$ -deg  $\frac{a}{b}$   
 $m = 2^k$

$$\text{Если } k \geq 4 \Rightarrow a^2 : 2 \Rightarrow a : 2 \Rightarrow b : 2 \Rightarrow \begin{matrix} 8b^2 : 2^4 \\ 8b^2 : m \end{matrix}$$

$k \leq 3 \Rightarrow m \leq 8$

Пример:

$$a=1 \quad b=7 \Rightarrow \frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{8}{8} \text{ - сократим на } 8$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3  
$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \\ b &= \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 2 - 7x \\ a^2 - b^2 = 2 - 7x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b = 2 - 7x \\ a + b = 1 \end{cases}$$

1)  $2 = 7x \Rightarrow x = \frac{2}{7} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{8}{49} - \frac{10}{7} + 3} = \sqrt{85}$   
 $b = \sqrt{\frac{8}{49} + \frac{4}{7} + 1} = \sqrt{85} \Rightarrow a - b = 0$   
подходит

2)  $a + b = 1 \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$   
 $4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$   
 $4x^2 - 3x + 3 \leq 0$   
 $f(x) = 4x^2 - 3x + 3$   
 $f'(x) = 8x - 3$   
 $m.k.y > 0 \Rightarrow f_{\min} = f\left(\frac{3}{8}\right) = 4 \cdot \frac{9}{64} - 3 \cdot \frac{3}{8} + 3 > 0$

~~корней~~ корней нет

Ответ:  $\left\{\frac{2}{7}\right\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим какие точки попадут в пару к  $A$  при фиксе  $A$   
(пока что уберём условие что точки в параллелограмме)

$$2x_2 + y_2 - 2x_1 - y_1 = 12$$

$\Rightarrow \underbrace{2x_2 + y_2}_{\text{const}} \Rightarrow$  м.в. решений  $(x_2, y_2)$  -  
прямая с коэф. наклона  $-2$ . Отсюда <sup>же</sup> вычисляем, что  
Рассмотрим  $(x_1 + 6; y_1)$  - корень

Заметим, что стороны  $OP$  и  $QR$  имеют <sup>тоже</sup> ~~тоже~~

коэф. наклона  $-2 \Rightarrow$  каждой точке параллело-  
грамма соответствует <sup>в пару</sup> целые точки лежащие  
на прямой  $\text{cont.} \parallel OP$  и  $QR$  (прямая и точки  
могут быть вне паралл-ма) Заметим

Заметим что <sup>прямые</sup>  $PQ$  и  $OR$  имеют этот коэф. наклона  $0$

Отсюда замечаем что если  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_1 + 6; y_1) \in OPQR$   
то все <sup>целые</sup> точки прямой  $\parallel QR$ , то  $0 \leq y \leq 24$  попадет  
в пару к  $A$ , а если условие не выполнено, то все точки на прямой  
через  $B$  вне  $OPQR \Rightarrow y$   $A$  нет пары. целые точки

Также если  $A', A, B' \in OPQR$ , то  $(A, B)$  - пара, то если  
 $A'A \parallel QR$ , то  $(A', B)$  - пара, а если нет то нет.  $\Rightarrow$  всего  
пар в  $(24+1)$  раз больше чем для <sup>пар</sup> точек под  $OR$

пар для точек на  $OR = (15+1-6) \cdot (24+1) = 250 \Rightarrow$  всего 20 пар

625

Ответ: 625

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что мы нашли ~~еще~~ <sup>еще</sup> подпадающую  
пару  $a$  и  $b$  зафиксируем

$$ax - y + 10b = 0 \Rightarrow ax + 10b = y \Rightarrow \text{прямая}$$

проходящая через  $(0; 10b)$  и с ~~наклоном~~ <sup>наклоном</sup>  $\text{коэф}$  ~~наклона~~ <sup>наклона</sup>  $a$   
назовем  $l$

$(x+8)^2 + y^2 - 1$  - окружность с центром в  $(-8; 0)$   
радиуса 1  $\text{коэф}$   $\omega_1$

$x^2 + y^2 - 4$  - окружность с центром в  $(0; 0)$  <sup>радиуса 2</sup>  
 $\text{коэф}$   $\omega_2$

$(x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow$  <sup>-знак</sup> количество точек  
на  $l$  и лежащих ровно в  $1$  из  $\{\omega_1; \omega_2\}$  или на  $\omega_1$  или  $\omega_2$   
ровно  $2$ .

Заметим что если прямая проходит внутри  
 $\omega_1$  или  $\omega_2$  то таких точек  $\infty$  (т.к.  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются)  $\Rightarrow l$ -  
касательная, т.к.  $2$  точки то  $l$  - ~~одна~~ <sup>одна</sup> касательная

$\omega_1, \omega_2$ . Найдем уравнения всех ~~ч-х~~ <sup>(м.е.а)</sup> касательных  
Найдем ~~уравнение~~ <sup>уравнение</sup> ~~касательных~~ <sup>касательных</sup> (существование  
для каждого найдем ~~а~~ <sup>а</sup> ~~коэф~~ <sup>коэф</sup>  $a$  очев., т.к. у ~~каждой~~ <sup>каждой</sup> прямой  
есть уравнение)

Всего  $4$  варианта ~~коэф~~ <sup>коэф</sup>: если внешняя, то  $\pm \frac{\sqrt{63}}{63} = \pm \frac{\sqrt{7}}{21}$   
если внутренняя, то  $\pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$

~~еще~~

$\Rightarrow$  это все  
подпадающие  $a$

Ответ:  $\left\{ \frac{\sqrt{7}}{21}; -\frac{\sqrt{7}}{21}; \frac{3\sqrt{55}}{55}; -\frac{3\sqrt{55}}{55} \right\}$

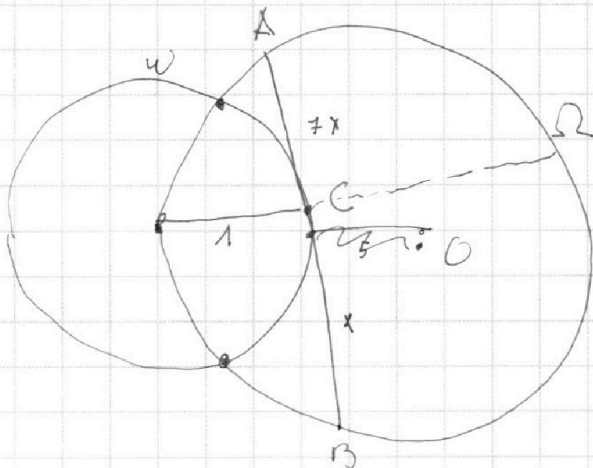
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

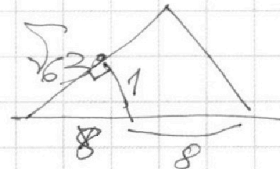
1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4x^2$$



$$\frac{x+8}{x} = \frac{2}{1}$$

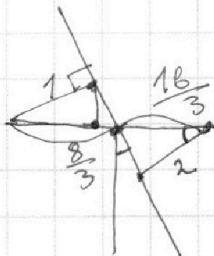
$$x=8$$

$$15+17+20 = 52 \quad 26$$

~~10~~ 6  
 c 11  
 a 9

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$$

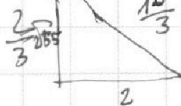
$$4x^2-3x+4 + 2\sqrt{\dots} = 1$$



$$250$$

$$25$$

$$625$$



$$2/$$

$$4x^2 - 3x + 9$$

$$x^2 - 3x \quad 0,75x + 0,75$$

$$2x \quad 0,75x$$

$$\frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$4$$

$$64 \quad \frac{256}{9}$$

$$\frac{36}{\sqrt{55}}$$

$$\frac{220}{9} = 24.55$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$1 + 7$   
 $a+b : m$        $50 - 6 \cdot 7 = 8$        $a^2 - b^2 = 4 \cdot 2 \cdot 2 - 7 \cdot 7$

$a^2 - 6ab + b^2 : m \Rightarrow 8ab : m$        $a - b = 2 - 7x$

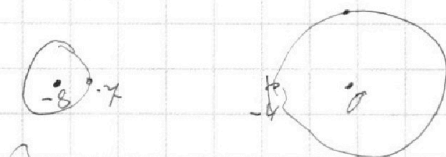
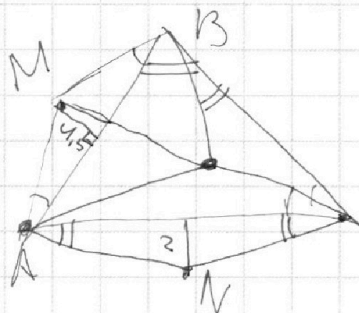
$8 + 28 + 49 = 8 + 7 \cdot 7$        $8b^2 : m$        $m : p$        $a + b = 1$   
 $8a^2 : m$

$-0,5 \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{2} \quad 0,5$        $b : p \Rightarrow 8 : p$        $8 - 7 \cdot 6 = 144$   
 $p = 2$

$2x^2 - 5x + 3$        $2x^2 + 2x + 1$

$(2x - 3)(x - 1) = 2x^2 - 5x + 3$

$2x \quad 1 \quad 0 : 0$   
 $1 \quad 1 \quad -6 : 12$   
 $\frac{3}{2} \quad 1 \quad -12 + 12 : 0$   
 $a = 1$   
 $b = 0$



$\frac{AB}{2 \sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{NC}{\sin \alpha}$

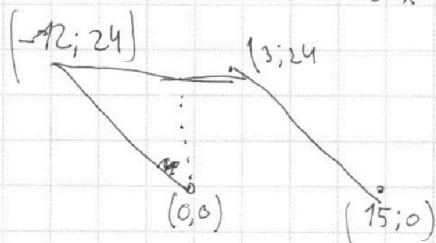
$\sin \alpha = \frac{2}{NC}$        $\frac{AC}{2 \cos \beta} = \frac{2}{\sin \alpha}$

$\frac{AB}{2 \cos \beta} = \frac{2 \cdot 5}{\sin \beta}$

$(x - 2,5)^2 = x^2 - 5x + \frac{25}{4}$

$\frac{9}{4} + 3 + 1 = \frac{13}{4}$

$\sqrt{5}$







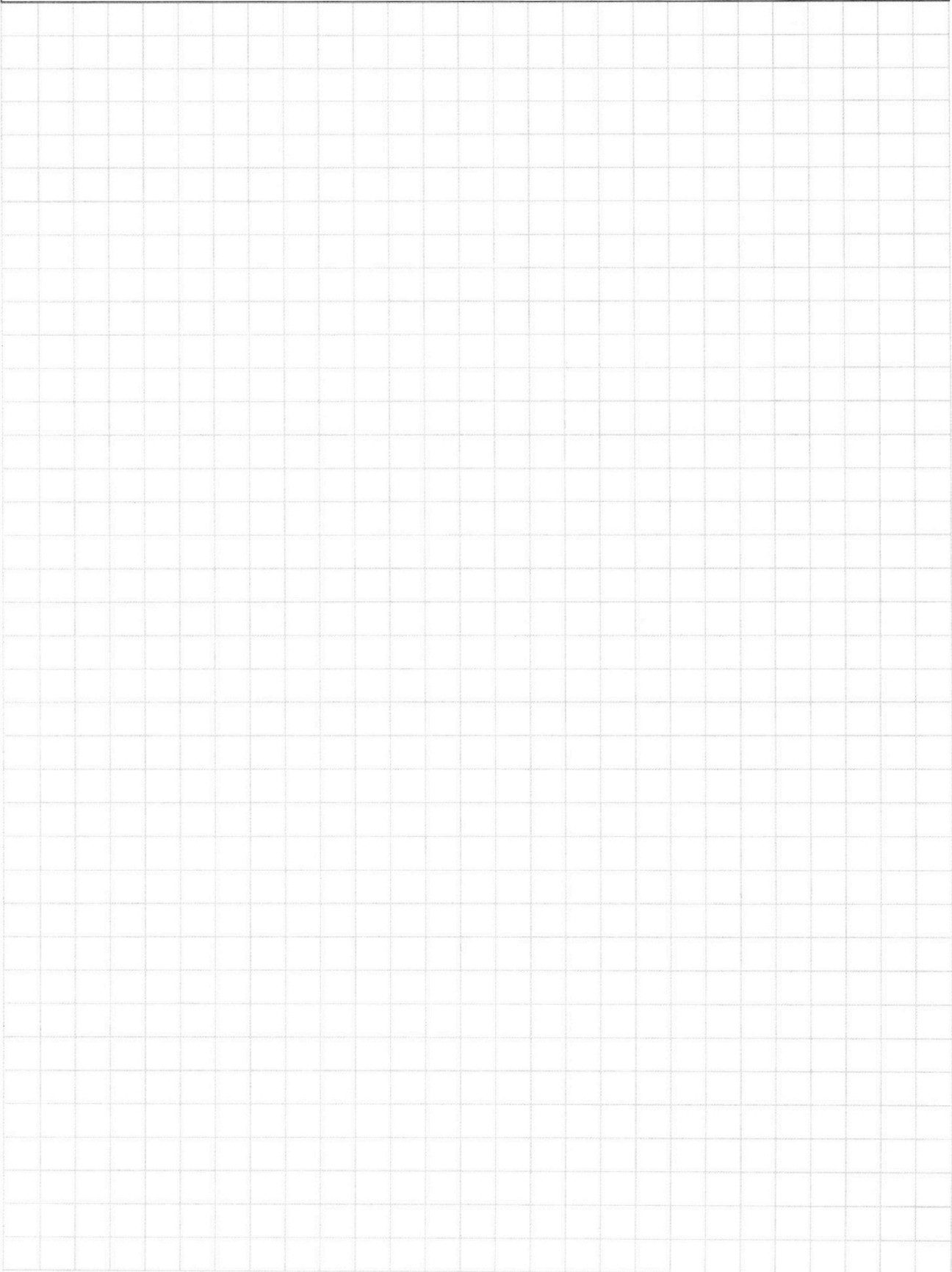
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





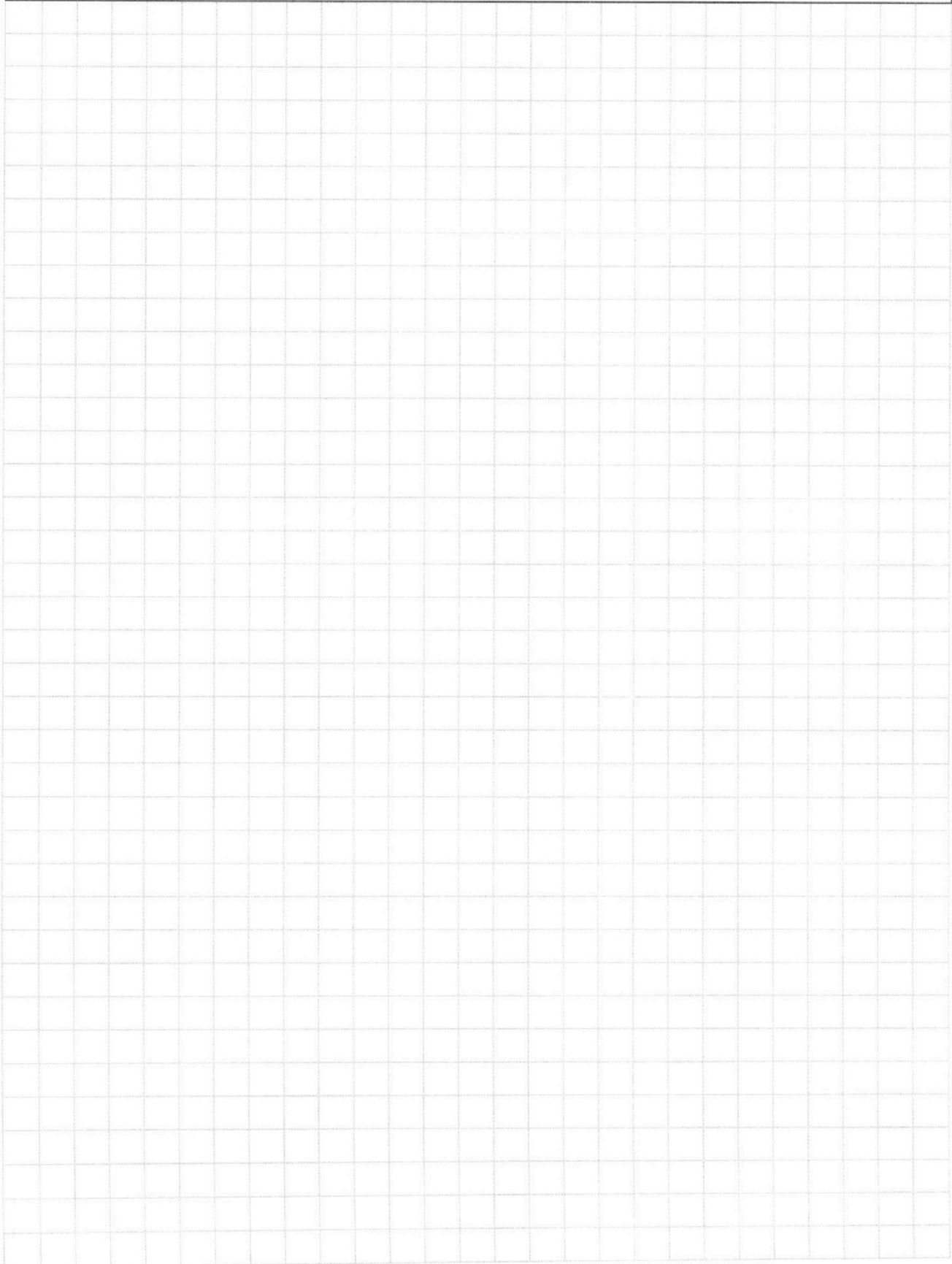
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

