МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^{15}7^{11}$, $bc$ делится на $2^{17}7^{18}$, $ac$ делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем $m$ могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на $m$?

3. [4 балла] Центр окружности $\omega$ лежит на окружности $\Omega$, хорда $AB$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $C$ так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину $AB$, если известно, что радиусы $\omega$ и $\Omega$ равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник $ABC$ вписан в окружность. Пусть $M$ – середина той дуги $AB$ описанной окружности, которая не содержит точку $C$; $N$ – середина той дуги $AC$ описанной окружности, которая не содержит точку $B$. Найдите расстояние от вершины $A$ до центра окружности, вписанной в треугольник $ABC$, если расстояния от точек $M$ и $N$ до сторон $AB$ и $AC$ соответсвенно равны 5 и 2,5.

$ab \vdots 2^{15}\cdot 7^{11}$, $bc \vdots 2^{17} 7^{18}$, $ac \vdots 2^{23} 7^{39} \Rightarrow a^2b^2c^2 \vdots 2^{55}\cdot 7^{68}$

т.к. $a^2b^2c^2$ является квадратом, то все его простые делители при разложении на множители имеют чётную степень $\Rightarrow$ т.к. $a^2b^2c^2 \vdots 2^{55} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2b^2c^2 \vdots 2^{56} \Rightarrow a^2b^2c^2 \vdots 2^{56}\cdot 7^{68} \Rightarrow abc \vdots 2^{28}\cdot 7^{34} \Rightarrow$ так как

~~Наименьшее натуральное~~ $a, b, c \in \mathbb{N}$, то

$abc \geq 2^{28}\cdot 7^{34} \Rightarrow$ наименьшее значение $abc$ – это $2^{28}\cdot 7^{34}$.

$2^{28}\cdot 7^{34} \vdots 2^{28}\cdot 7^{34} \Rightarrow abc = 2^{28}\cdot 7^{34}$ подходит.

Ответ: $2^{28}\cdot 7^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{a}{b}$ - несократима $\Leftrightarrow$ $(a,b)=1 \Rightarrow (a+b;ab)=1$ (т.к. $a+b$ не делится ни на один из делителей $a$ или $b$, а $ab$ - это произведение $a$ и $b$)

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}=\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$(a+b;ab)=1 \Rightarrow ((a+b)^2;ab)=1 \Rightarrow$ т.к. $(ab;(a+b)^2)=1$, то единственный множитель, который можно вынести за скобку в знаменателе это $9 \Rightarrow$ наибольшее $m$ - это $9$

Пример: $a=4$ $b=5$ $\frac{4}{5}$ - несократима

$$\frac{4+5}{(4+5)^2-9\cdot4\cdot5}=\frac{9}{9(9-20)}=\frac{1}{-11}$$

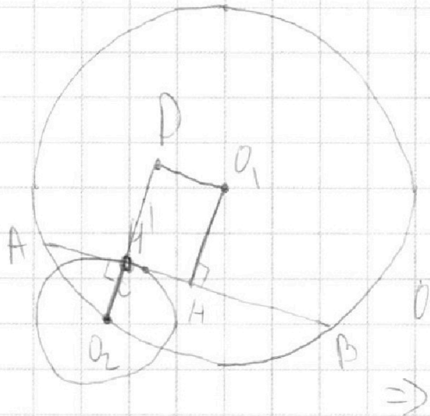
Ответ: $m=9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!




$(\cdot)H$: $H \in [AB]$ & $O_1H \perp AB$

$O_1$ – центр $\Omega$  $O_2$ – центр $\omega$

$O_1A = O_1B = 13 \Rightarrow$ т.к. $O_1H$ – высота, то

$O_1H$ – медиана и биссектриса (св-во р/б $\triangle$)

$\Rightarrow AH = HB$

$(\cdot)H'$: $O_2H' \perp AB$, $H' \in [AB]$. $AH' = 7x$, $H'B = 17x \Rightarrow AB = 24x$

$\Rightarrow AH = HB = 12x \Rightarrow H'H = 5x$

продолжим $O_2H'$ до $D$: $H'D = O_1H$. т.к. $O_2H' \parallel O_1H$, то

$H'DO_1H$ – ▱ $\Rightarrow DO_1 = H'H = 5x$.

по т. Пиф. $O_1H = \sqrt{13^2 - (12x)^2} = \sqrt{169 - 144x^2}$

по т. Пиф. $O_1O_2 = \sqrt{(\underbrace{DO_2}_{7+\dots})^2 + (DO_1)^2} = \sqrt{(7 + \sqrt{169-144x^2})^2 + (5x)^2} =$

$= \sqrt{49 + 169 - 144x^2 + 14\sqrt{169-144x^2} + 25x^2} = 13$ т.к. $O_2O_1$ – радиус $\Omega$

$49 + \cancel{169} - 119x^2 + 14\sqrt{169-144x^2} = \cancel{169} \Leftrightarrow 119x^2 - 49 = 14\sqrt{169-144x^2}$

$f(x) = 119x^2 - 49$  $\cancel{g(x) = \sqrt{169-144x^2}}$  $g(x) = 169 - 144x^2$

$f(x) \downarrow (-\infty; 0]$, $g(x) \uparrow (-\infty; 0]$ (св-ва кв. функции) $\Rightarrow$

~~композиция с корнем~~

на этом промежутке 1 корень. $\cancel{f(x) \uparrow [0; +\infty)\ \&\ g(x)}$

т.к. $\sqrt{x} \circ g(x)$ не меняет монотонности (св-ва комп.),

и меняет только область определения ($D(\sqrt{x} \circ g(x)) = [-\frac{13}{12}; \frac{13}{12}]$)

Аналогично $f(x) \uparrow [0; +\infty)$, $g(x) \downarrow [0; +\infty) \Rightarrow$ 1 корень тоже

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

пересечем.

т. к. нас не интересуют $x \le 0$, то у уравнения $119x^2 - 49 = 14\sqrt{169 - 144x^2}$ только 1 интересный нам корень

$x = 1$. $119 \cdot 1^2 - 49 = 70$, $14\sqrt{169 - 144 \cdot 1^2} = 70$ $\Rightarrow x = 1$ - это корень

$\Rightarrow$ т. к. $AB = 24x$, то $AB = 24$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$

$\exists\ t=3x^2+3x+1$, $k=1-9x$. Тогда:

$\sqrt{t+k}-\sqrt{t}=k \Leftrightarrow \begin{cases} t+k=k^2+2\sqrt{t}k+t \\ \cancel{k\geq 0}\ \sqrt{t}+k\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{k(1-k)}{2}=\sqrt{t}k \\ \cancel{k\geq 0}\ \sqrt{t}+k\geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=\frac{k^2-2k+1}{2} \\ t\geq 0 \\ \cancel{k\geq 0}\ \sqrt{t}+k\geq 0 \end{cases} \\ k=0 \end{array}\right.$ Подставим x вместо k и t

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x^2+3x+1=\frac{81x^2-18x+1-2+18x+1}{2} \\ 3x^2+3x+1\geq 0 \text{ - верно всегда (для любого x)} \\ \cancel{1-9x\geq 0}\ \cancel{1-9x\geq 0}\ \sqrt{3x^2+3x+1}+1-9x\geq 0 \end{cases} \\ 1=9x \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 37{,}5x^2-3x-1=0 \\ \cancel{x\leq\frac{1}{9}}\ \sqrt{3x^2+3x+1}+1-9x\geq 0 \end{cases} \\ x=\frac{1}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{3\pm\sqrt{159}}{2} \\ \sqrt{3x^2+3x+1}+1-9x\geq 0 \\ \cancel{x\leq\frac{1}{9}} \end{cases} \\ x=\frac{1}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{3-\sqrt{159}}{2};\frac{1}{9}\right\}$

Ответ: $\left\{\frac{3-\sqrt{159}}{2};\frac{1}{9}\right\}$

в силу параллельности удовлетворяющему ГМТ и $(OP)_a$ $\Rightarrow$
для каждого ~~так~~ следующего ряда
будет столько же точек как и для
предыдущего.

В ряду с $y=0$ пар было $14+126=140$
$\Rightarrow$ т.к. всего 14 рядов (только четные $y$ от 0 до 26) то всего вариантов точек

$140 \cdot 14 = 1960$

Ответ: 1960 пар. точек.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Напишем уравнение прямых (OP) и (RQ)

$\frac{x}{-13} = \frac{y}{26} \Leftrightarrow y = -2x$ — (OP)

$\frac{x-3}{13} = \frac{y-26}{-26} \Leftrightarrow y = -2x + 32$ — (RQ)

Зафиксируем точку с координатами $(x_1, y_1)$. Тогда ГМТ удовлетворяющее уравнению $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ будет являться прямой. $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \Leftrightarrow y_2 = y_1 + 2x_1 - 2x_2 + 14$

Эта прямая $\parallel$ (OP) и (RQ) ~~она зависимости от точки~~

~~$x_1, y_1$~~

Просмотрим все точки с целыми координатами в #. ~~начала~~ будем идти по строкам снизу вверх, ~~и~~ слева направо.

1) (0;0). ~~у~~ выберем точку $(x_2, y_2)$ с наименьшим значением по y. ~~тогда~~ (оно равно 0 т.к. если ниже то уже не в #) это точка (7;0). Заметим что при уменьшении x на 1 y будет оставаться а 1 это наименьшее из чисел уменьшать целым, а если ~~увеличивать~~ на нецелое число, ~~то~~

~~т.к. $2x, y_1$ и 14 — это целые числа, то y должно быть нецелым ($y = y_1 + 2x_1 - 2x + 14$)~~ то x будет нецелым (?!)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

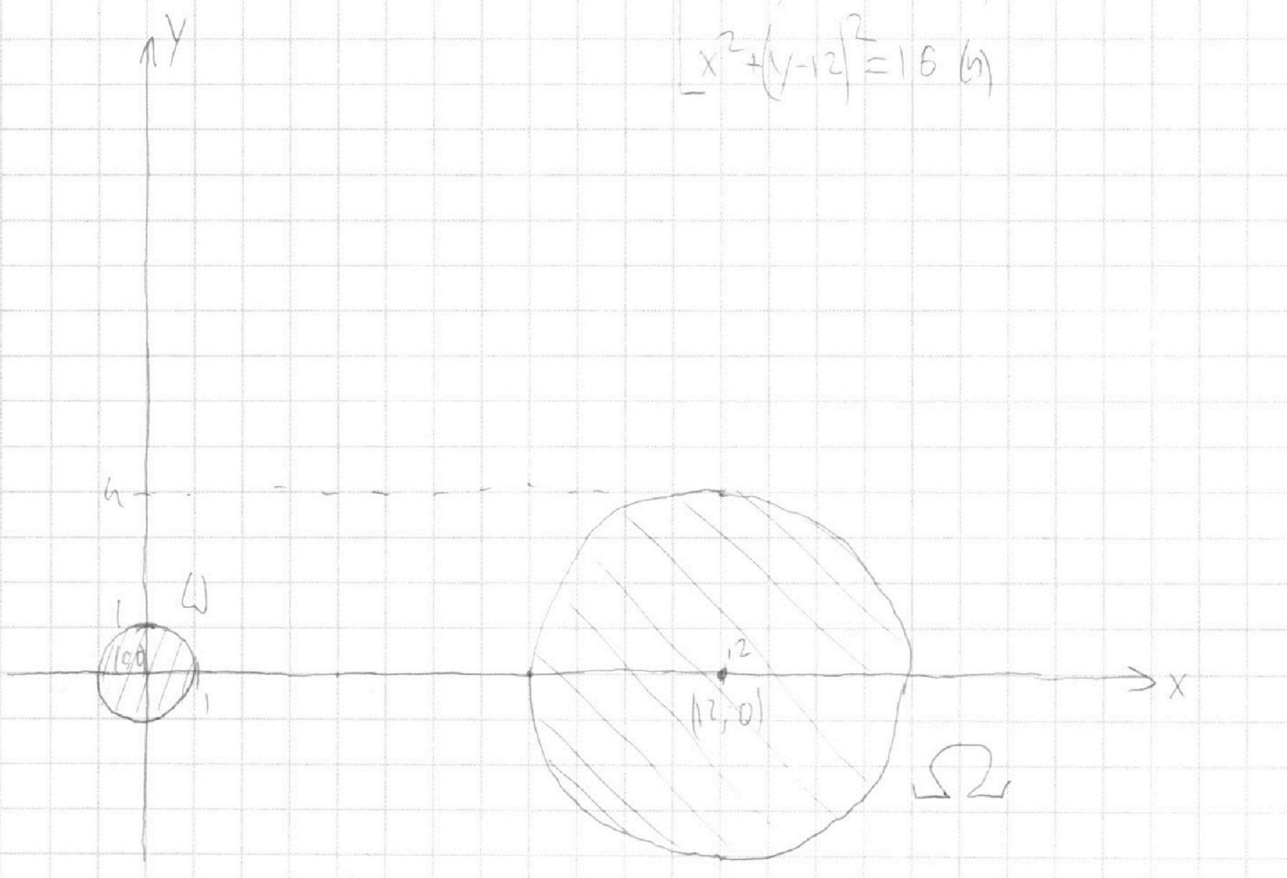
$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2-1<0 \\ x^2+(y-12)^2-16>0 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x^2+y^2-1>0 \\ x^2+(y-12)^2-16<0 \end{cases} \quad (2) \\ x^2+y^2-1=0 \quad (3) \\ x^2+(y-12)^2=16 \quad (4) \end{array}\right.$$

Заметим, что $x^2+y^2=1$ - ур-е окр.

$x^2+(y-12)^2=16$ - ур-е окр.

Изобразим в координатах




(1) система ~~имеет решения, равные~~ это пересечение всей плоскости без Ω и ее окружности и окружности ω без ее окружности //// - эта область

(2) система аналогично, но Ω и ω поменять местами ((плоскость без ω) ∩ Ω) \\\\ - эта область

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} e=1 \\ c=\frac{5}{12} \end{cases} \\ \begin{cases} e=1 \\ c=-\frac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} e=-1 \\ c=-\frac{5}{12} \end{cases} \\ \begin{cases} e=-1 \\ c=\frac{1}{4} \end{cases} \end{array}\right.$$

тогда получаем и ур-я (т.к. ур-я пер. можно выделить коэф. перед $x$)

$$\frac{5}{12}x+\frac{\sqrt{119}}{12}y+1=0 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{119}}x+y+\frac{12}{\sqrt{119}}=0$$

$$-\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{15}}{16}+1=0 \Leftrightarrow -\frac{4}{\sqrt{15}}x+y+\frac{16}{\sqrt{15}}=0$$

$$-\frac{5}{12}x+\frac{\sqrt{119}}{12}y-1=0 \Leftrightarrow -\frac{5}{\sqrt{119}}x+y-\frac{12}{\sqrt{119}}=0$$

$$\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{15}}{16}-1=0 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{15}}x+y-\frac{16}{\sqrt{15}}=0$$

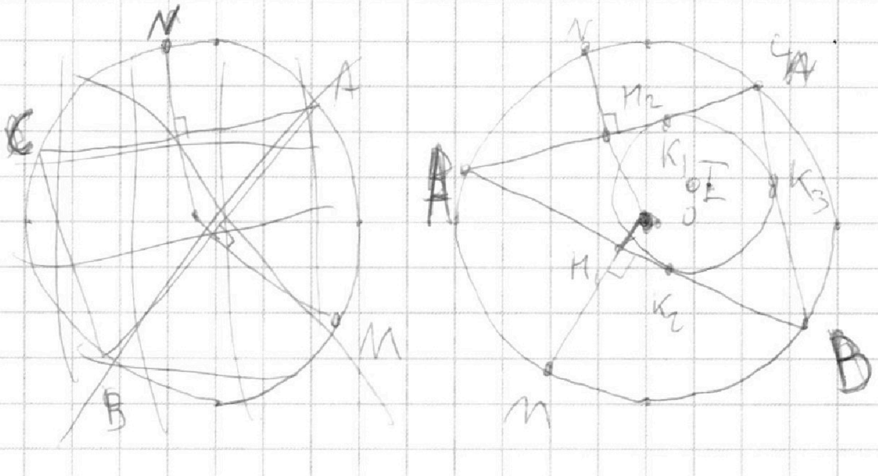
Таким образом множество $a$ это $\left\{\frac{5\sqrt{119}}{119}; -\frac{5\sqrt{119}}{119}; -\frac{4\sqrt{15}}{15}; \frac{4\sqrt{15}}{15}\right\}$

Ответ: $a \in \left\{-\frac{5\sqrt{119}}{119}; -\frac{4\sqrt{15}}{15}; \frac{4\sqrt{15}}{15}; \frac{5\sqrt{119}}{119}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



По условиях $NM_2 = 2{,}5$ $MM_1 = 5$.

$\cup AM = \cup MB \Rightarrow AM = MB \Rightarrow \triangle AMB$ - р/б $\Rightarrow MM_1$ - мед, бисс.

Аналогично $NM_2$ - медиана и бис. для $\triangle ANC$

тогда $AM_2 = M_2C$. Р $\triangle AOC$. $AO = OC = r \Rightarrow AOC$ - р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $OM_2$ - медиана, то $OM_2$ - бис., высота $\Rightarrow$

$\Rightarrow OM_2 \perp AC \Rightarrow (\cdot) M_2 \in [NO]$. Аналогично $(\cdot) M_1 \in [MO]$

$\exists\, OA = r$. тогда $OM_1 = r - 5 \Rightarrow \cos\angle M_1OB = \frac{r-5}{r} = 1 - \frac{5}{r}$

$\cos\angle AOB = \cos 2\angle M_1OB = 1 - 1 + \frac{10}{r} - \frac{25}{r^2} = \frac{10r - 25}{r^2}$

~~Аналогично~~ тогда $AB$ по т. кос. $AB = \sqrt{2r^2 - 2r^2 \cdot \frac{10r-25}{r^2}} =$

$= r\sqrt{\frac{r^2 - 10r + 25}{r^2}} = r\,\frac{r+5}{r} = r+5$

Аналогично $AC = r + 2{,}5$. ~~cos~~ ~~...~~

$\exists\, I$ - центр описанной окружности, а точки касания - это $K_1, K_2, K_3$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\exists\ AK_1 = x$. тогда $CK_1 = r+2,5-x \Rightarrow CK_3 = r+2,5-x$,

$\cancel{\Rightarrow BK_3 =}$ $AK_2 = x \Rightarrow BK_2 = r+5-x \Rightarrow BK_3 = r+5-x$.

тогда $CB = 2r+7,5-2x$.

~~cos~~ мы знаем $\cos\angle AOM$, $\cos\angle AON$.

$\angle AOM = \frac{1}{2}\cup AB$, $\angle AON = \frac{1}{2}\cup AC \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $\angle CAB = \frac{1}{2}\cup CB$, то $\angle CAB = \angle AON + \angle AOM$.

~~из косинусов~~ мы можем также найти

синусы из прям $\triangle OM_1B$ и $\triangle OM_2C$.

тогда можно найти $\cos\angle CAB$ и выразить

~~CAB без~~ $CB$ без $x$. из этого можно найти $x$

также зная $x$ и $\angle IAB$ ($\angle OAB = \frac{1}{2}\angle CAB$) можно

из тригонометрии найти $IA$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\times 159$
$3$
$+127$
$27$
$504$

$128 + 4{,}5\sqrt{159}$

$\frac{9+3\sqrt{159}}{2}$

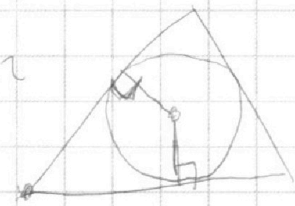
$1{,}5$

$ax + y + b = x^2 + y^2 - 1$

$3 \cdot 64$

$2x^2(1-\cos\beta) = 5x - 6{,}25$

$\cos\beta = \frac{6{,}25 - 5x - 2x^2}{2x^2}$



$192 + 24 + 1$

$15^2 = 225$

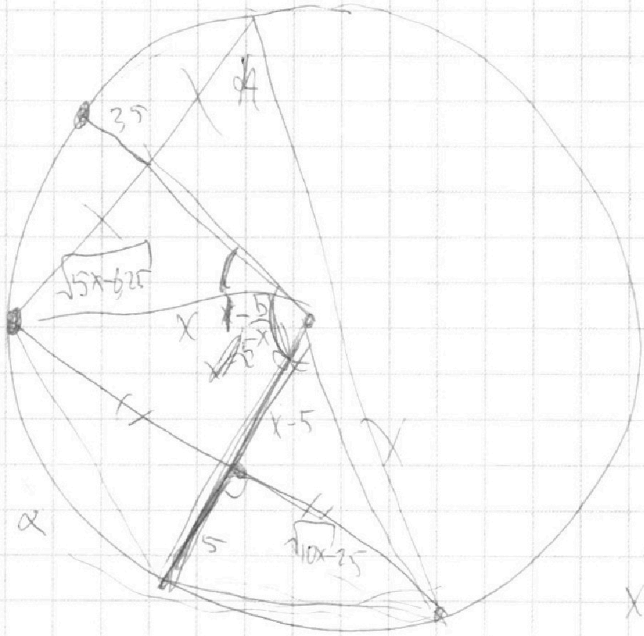
$217$

$\cos$

$r - 5$

$r - 2{,}5$

$\cos$



$\frac{r-5}{r}$ $\frac{r-2{,}5}{r}$

$1 - \frac{5}{r}$ $1 - \frac{2{,}5}{r}$

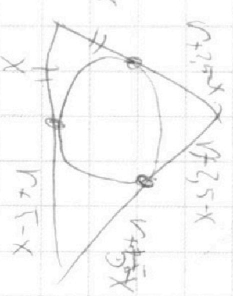
$1 - 2\cos^2\alpha$

$x^2 - x^2 + \sqrt{10x - 25}$

$2x^2 - 2\cos\alpha\, x^2 = 10x - 25$

$2x^2(1-\cos\alpha) = 10x - 25$

$\cos\alpha = \frac{25 - 10x - 2x^2}{2x^2}$ $1 - \cos\alpha = \frac{5}{x} - \frac{25}{2x^2}$



$x^2 - 5 + 4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

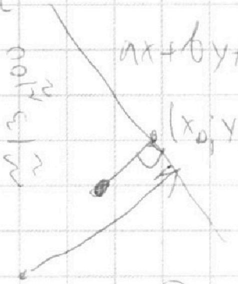
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab$ $\quad b \quad 7 \quad 12$

$2\cdot 3 \quad 2 \quad 3$

$ax+by+c=0$




$\{a;b\} \quad \{b;a\}$

$|ax_0+by_0+c|=1$

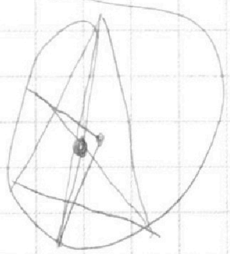
$10$

$-bx_0+ay_0=0$

$ay_0=bx_0 \qquad x_0=\frac{a}{b}y_0$

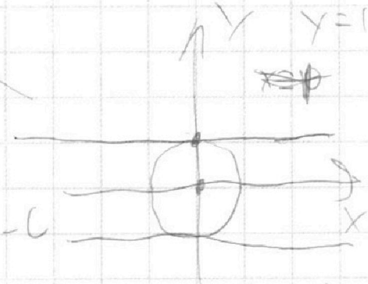
$ax_0+by_0+c=0$

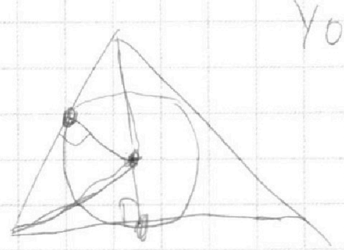
$\frac{a^2}{b}y_0+by_0+c=0$

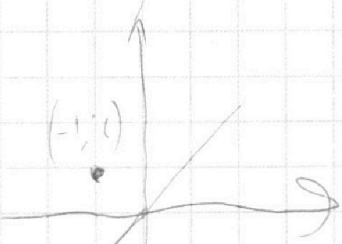


$\frac{a^2}{b}y_0+by_0=-c$

$y_0=-c$






$\frac{27-6\sqrt{159}+3\sqrt{159}}{4}$

$\frac{27-6\sqrt{159}+159\cdot 3}{4}$

$\sqrt{127-2\sqrt{159}}$

$\frac{2S}{P} \qquad \frac{r a}{2}+$

$rp=S \qquad a\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y=0$

$|-1-1|$

$\frac{3-\sqrt{159}}{2}$

$\frac{9-2\sqrt{159}+159}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a^2b^4c^2 \vdots 2^{55} \cdot 7^{68}$

$a+b$

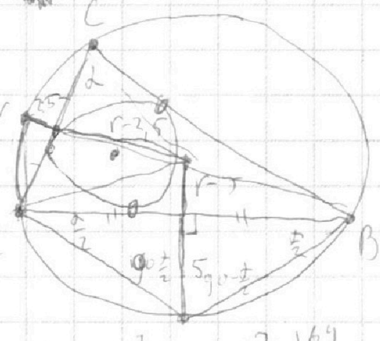
40,5

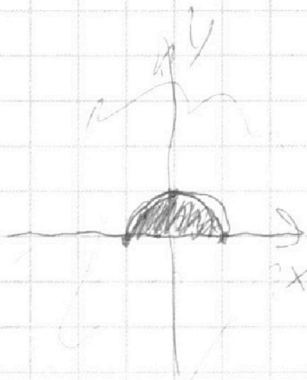
$abc \vdots 2^{28} \cdot 7^{34}$

32
23
55

$\frac{81}{2}$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} =$





$a+b=km$

$(x-1)^2$

$(a+b)^2-9ab=nm$

$169=144x^2$ $\quad x^2=\frac{169}{144}$

40,5

$k^2m^2-9ab=nm$

$\geq 0$

37,5

$x^2+y^2-1$

$y \geq \sqrt{1-x^2}$

$x^2+y^2 \leq 1$

$9ab=m(k^2m-n)$

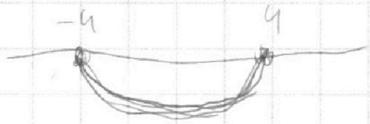
$(x-4)(x+4)$

$(9b; a+b)=0$ $\quad 9$

$x \in [-4; 4]$

$x=0$

$\sqrt{3x^2-6x+2}$



$36-24=12 \Rightarrow 2\sqrt{3}$

$\frac{6\pm2\sqrt{3}}{6} = 1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$-5 \quad 8$

$y=12$

$x=$

$(x-4)(x+4)+(y-12)^2 \leq 0$

9-

$\frac{3\pm13}{2}$

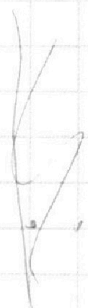
75

$\sqrt{t}+\sqrt{t-}$

$y-$

12
37,5
4
1300

150



75

$\sqrt{t}+\sqrt{t-9x+1}=9x+1$

k

$\sqrt{t+k}-\sqrt{t}=k \Leftrightarrow \cancel{t}+k=k^2+2k\sqrt{t}+\cancel{t}$

$-k^2=2k\sqrt{t} \Leftrightarrow t=\frac{-k}{4}$

159

$3+150$

$3\left(\frac{3+\sqrt{159}}{2}\right)^2 = \frac{27+18\sqrt{159}+159}{4} - 3\frac{3\pm\sqrt{159}}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

0 - 32

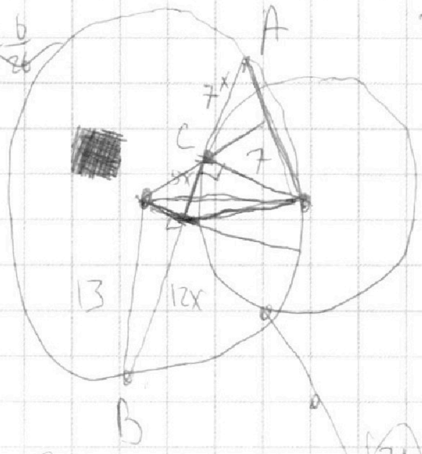
$-26x + 26 \cdot 3 = 3y - 26 \cdot 13$

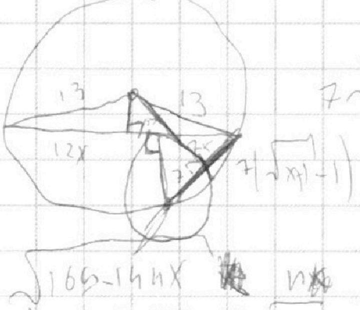
$-2x + 6 = y - 26$

$-2x + 36$

$7\sqrt{x+1}$

24 x





16

$\frac{\sqrt{169-144x}}{7} = \frac{n}{m}$

$7n = m\sqrt{169-144x}$

$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 14$

$9x + y$

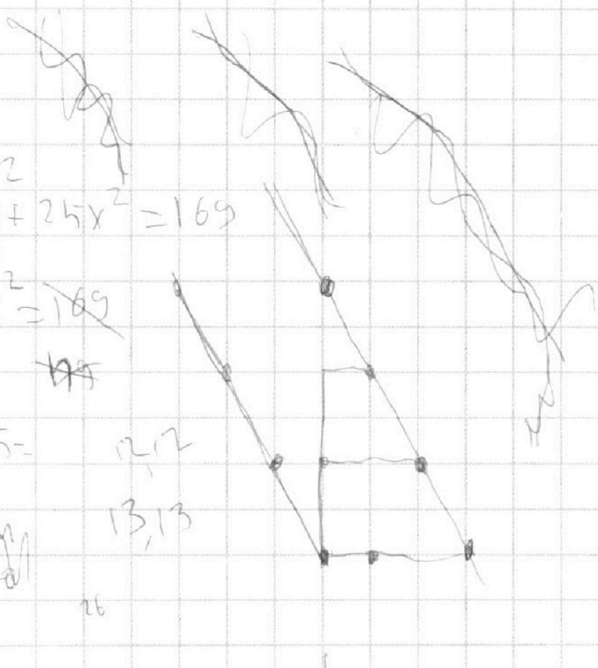
$\left(7 + \sqrt{169-144x}\right)^2 + 25x^2 = 169$

$49 + \cancel{169} - 144x + 14\sqrt{169-144x} + 25x^2 = \cancel{169}$

$70 + 49 + 25 =$

12, 12

13, 13



$(144x - 49 - 25x^2)^2 = 196(169 - 144x)$

(-13; 26) (3; 26)

$0 \le y \le 26$

(16; 0)

(0; 0)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом $y$ принимает можные значения от 0 до 26.
~~пока~~ (при этом точка точно не выйдет за пределы # в силу параллельности $y=2x_1+y_1-2x+14$ и (OP)) => при $(x_1, y_1)=(0;0)$ 14 точек.

2) $(1;0), (2;0) \dots (9;0)$. в этих точках все аналогично (0;0)
=> ~~9·27=243 вариантов~~ $9 \cdot 14 = 126$ вариантов

3) $(10;0), (11;0) \dots (16;0)$. в этих точках самая первая точка уже выходит за предела #
(для (10;0) первая точка это (17;0), и эта уже лежит вне #; (11;0) — (18;0)...), а значит и вся прямая образованная точками будет вне # => 0 вариантов

4) все остальные. заметим, что остальные точки выбираются увеличением $y$ на 2 и соответственно уменьшением $x$ на 1 (как прямые на которых лежат нужные точки). тогда (0;0) будет соответствовать следующие точка ~~(0;0)~~ (-1;2). Заметим, что ГМТ подходящих точек не изменится ($y=-1\cdot2+2-2x+14 \Leftrightarrow y=-2x+14$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Тогда~~ ур-я 2 и 3 описывают окружности $\omega$ и $\Omega$ ($\omega$ и $\Omega$ - это круги, а не окружности)

Значит вся совокупность - это множество точек ~~$\omega$ и $\Omega$~~ $\omega \cup \Omega$

$ax+y-b=0$ - это прямая $\Rightarrow$ будет только 2 решения только тогда, когда эта ~~окружность~~ прямая будет касаться сразу двух окружностей. Таких прямых существует 4.

$cx+dy-e=0$ - нормальное уравнение $ax+y-b$

тогда получаем систему (формула расст. от (.) до прям.)

$$\begin{cases} 1=|e| \\ 4=|c\cdot 12+e| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e=\pm 1 \\ 12c=e\pm 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cancel{\begin{cases} e=1 \\ c=\frac{5}{12} \\ d=\frac{\sqrt{119}}{12} \end{cases}} \\ \cancel{\begin{cases} e=1 \\ c=-\frac{1}{4} \\ d=\frac{\sqrt{15}}{16} \end{cases}} \\ \cancel{\begin{cases} e=-1 \\ c=-\frac{5}{12} \\ d=\frac{\sqrt{119}}{12} \end{cases}} \end{array}\right. \quad \left[ \begin{cases} e=-1 \\ c=\frac{1}{4} \\ d=\frac{\sqrt{15}}{16} \end{cases} \right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ