



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

- 1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$b^2 = \frac{hk}{t} \cdot 2^9 \cdot 7^{-10} \quad \text{т.к. } b - \text{целое число, то}$$

$$\frac{hk}{t} = 2^{10} \cdot 7^{-10} \quad \text{или} \quad \frac{hk}{t} = 2^{10} \cdot 7^{-10}$$

минимум  
пока

$$\frac{hk}{t} = \frac{7^{10}}{2^9} \Rightarrow hk = \frac{7^{10}}{2^9} \cdot t \quad \text{мин } t = 2^9$$

$$kht = \frac{7^{10}}{2^9} \cdot t^2, \quad \text{значит } \min abc = \frac{7^{10}}{2^9} \cdot 2^9 \cdot 2^9 = 2^{18} \cdot 7^{10}$$

Приведем пример.

$$a = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad c = kh \cdot 2^{32} \cdot 7^{29}$$

$$ac = k^2 h \cdot 2^{47} \cdot 7^{40}$$

$$kh = \frac{7^{10}}{2^9}, \quad kht = 7^{10} \cdot 2^9$$

$$\text{значит } \min abc = 7^{10} \cdot 2^9 \cdot 2^9 \cdot 7^{10} = 2^{18} \cdot 7^{20}$$

пример:

$$a = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$c = h \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac = 2^{32} \cdot 7^{29}$$

если  $k=7; h=7$ , то

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1.

$a, b, c \in \mathbb{N}$

м.к.  $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$        $ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$ , где  $k \in \mathbb{N}$

м.к.  $bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$        $bc = h \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$ , где  $h \in \mathbb{N}$

м.к.  $ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$        $ac = t \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$ , где  $t \in \mathbb{N}$

$(abc)^2 = kht \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$

~~минимум  $kht = 1$ , но если  $kht = 1$ , то максимум  $kht = 2$ , если  $kht = 2$ , то  $(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68}$  а максим  $kht$  можем быть м.к. тогда  $abc$  - не натур.~~

~~если  $kht = 2$ , если  $kht = 2$~~

~~$(abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{68}$        $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$~~

~~Приведем пример~~

~~$a = \frac{t \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}}{c}$        $b = \frac{h \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}}{c}$~~

~~$ab = \frac{ht \cdot 2^{40} \cdot 7^{57}}{c^2} = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \Rightarrow c^2 = \frac{2^{25} \cdot 7^{46} \cdot ht}{k}$~~

~~$a^2 = \frac{t^2 \cdot 2^{46} \cdot 7^{78}}{c^2} \cdot \frac{k}{2^{25} \cdot 7^{46} \cdot ht} = \frac{tk}{h} \cdot 2^{21} \cdot 7^{32}$~~

~~$b^2 = \frac{h^2 \cdot 2^{34} \cdot 7^{36}}{2^{25} \cdot 7^{46} \cdot ht} \cdot k = \frac{hk}{t} \cdot 2^9 \cdot 7^{-10}$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2.  $a, b \in \mathbb{N}$

а) Будем обозначать  $\text{НОД}(ax; y) \stackrel{za}{=} (x; y)$

$\frac{a}{b}$  - несократима - это означает, что  $(a; b) = 1$

$$\begin{aligned} & (a+b; a^2 - 7ab + b^2) = m \\ & \text{из } (a+b)^2 - 9ab \quad a+b \\ & \text{по алгоритму Евклида вычтем } (a+b) \text{ раз} \\ & = ((a+b)^2 - 9ab; a+b) = (-9ab; a+b) = (9ab; a+b) \neq \\ & \text{всего вычтем } \underset{\text{из } 9ab}{9a} \text{ раз } (a+b) \text{ (по алгоритму Евклида)} \\ & = (9ab - 9a(a+b); a+b) = (-9a^2; a+b) = (9a^2; a+b) = m \end{aligned}$$

т.к.  $(a; b) = 1$ , но  $a+b \nmid a$ , значит  $\text{НОД}(9a^2; a+b)$   
будет максимум  $9$

Приведем пример если  $a=1; b=8$ , то

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{9}{1 + 64 - 7 \cdot 8} = \frac{9}{9} = 1 \quad \text{дробь сократима на } 9, \text{ значит макс делимая}$$

Ответ: при  $m=9$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

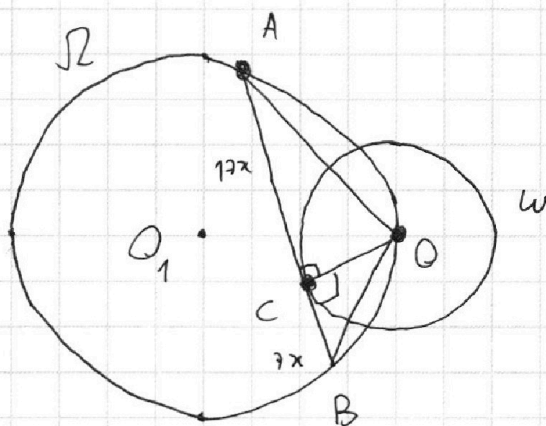
Дано:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{9}$$

$$OC = 7 = r$$

$$O_1O = 13 = R$$

AB = ?



П.к.  $OC$  - радиус, проведенный в точку касания  $\Omega \cup \Omega'$ .

Пусть  $AC = 17x$ , тогда  $BC = 9x$

$\angle AOB = \alpha$ , тогда по т. синусов:

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2 \cdot O_1O = 26 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{24x}{26} = \frac{12x}{13}$$

$$AO = \sqrt{(17x)^2 + 7^2}; \quad OB = \sqrt{(9x)^2 + 7^2} = 7\sqrt{x^2 + 1}$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{OC \cdot AB}{2} = \frac{7 \cdot 24x}{2} = AO \cdot OB \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha$$

$$7 \cdot 24x = \sqrt{(17x)^2 + 7^2} \cdot 7\sqrt{x^2 + 1} \cdot \frac{12x}{13} \quad x \neq 0 \quad (x \neq 0)$$

$$26 = \sqrt{(17x)^2 + 49} \cdot \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{Пусть } x^2 = t$$

$$26^2 = (289t + 49)(t + 1) \Rightarrow 289t^2 + 338t + 49 = 676$$

$$289t^2 + 338t - 627 = 0$$

$$169t^2 + 169t - 315 = 0$$

$t \neq 1$  если

$t = 1$ :

$$26^2 = 338$$

$$338 \cdot 2 = 13 \cdot 26 \cdot 2 = 26^2$$

равенство выполняется

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$289t^2 + 338t - 627 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(289t + 627) = 0$$

$$t > 0, \text{ значит } t = 1$$

$$t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \quad x = 1$$

$$AB = 24x = 24$$

$$\text{Ответ: } AB = 24$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Положим  $3x^2 - 6x + 2 = a$ ;  $3x^2 + 3x + 1 = b$

Тогда  $a - b = 1 - 9x$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \quad \text{на } O \cup Z \quad a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$$

или

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 1 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \quad \left| \begin{aligned} & 3 \cdot \frac{1}{9^2} + \frac{3}{9} + 1 = \\ & = \frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1 > 0 \end{aligned} \right.$$

знаем  $x = \frac{1}{9}$  подходит

или

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 1 - \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 2\sqrt{b} + b \quad (3) \\ 1 \geq \sqrt{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 9x = 1 - 2\sqrt{b} \\ 9x \leq 2\sqrt{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 81x^2 = 4b = 12x^2 + 12x + 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\Delta = 6^2 \times 4 \cdot 69 = 4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 23 =$$

$$= 4 \cdot 3 \cdot (3 + 23) = 12 \cdot 26 = 24 \cdot 13 = 4 \cdot 6 \cdot 13 = 4 \cdot 78$$

$$\begin{cases} x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6 \pm 2\sqrt{78} \\ 36 \pm 4 \cdot 78 \end{cases} \quad x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 0$$

знаем не подходит

$$x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Но также необходимо проверить неравенство

$$4. \quad 1 \geq \sqrt{b} \quad (2)$$

Мы знаем, что при ~~ка~~  $x = \frac{6+2\sqrt{78}}{69}$  выполняется

равенство (1);  $9x = 2\sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{b} = \frac{9x}{2}$

$$(2) \quad 1 \geq \sqrt{b} = \frac{9x}{2} = \frac{x(3+\sqrt{78})}{23} \cdot \frac{3}{x} = \frac{3(3+\sqrt{78})}{23}$$

и  $1 \geq \frac{3(3+\sqrt{78})}{23}$  и  $23 \geq 9+3\sqrt{78}$

$$14 \geq 3\sqrt{78}$$

$$196 \geq 9 \cdot 78$$

Значит:  $1 < \sqrt{b}$  ~~также~~ значит нер-во (2) неверно

$$x = \frac{6+2\sqrt{78}}{69} - \text{не подходит}$$

Ответ:  $x = \frac{1}{9}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

что  $l$  не будет иметь общих точек с пар-амной, а  
значит точек  $x_2$  с коорд.  $(x_2, y_2)$  тогда ~~кажд~~ точки  
с координатами  $(x_2, y_2)$  не найдется.

Проведем прямую  $AB: y \leq 18 - 2x$

Найдем все точки  $(x_1, y_1)$  лежащие ниже  
этой прямой.

в таком случае

Заметим, что для каждой точки  $(x_1, y_1)$

прямая  $l$  будет пересекать пар-амную ~~на~~ обра-  
зуя отрезок  $(QR)$  на этих

будет ~~кажд~~ по длине отрезка, ~~кажд~~  
будет ~~кажд~~ на отрезках будет всегда оди-

накова кол-во точек с целочисленными коорди-  
натами.

Для каждой целой  $x$  будет целой  $y$ .

(но не наоборот т.к. при  $y/2$   $x$  будет дробным)

Целых координат  $x$  будет 14.  
(на  $l$ )  $\rightarrow$

Значит для каждой точки  $(x_1, y_1)$  лежащей  
ниже  $AB$ , будет соотв. по 14 точек  $(x_2, y_2)$

Найдем кол-во таких точек  $(x_1, y_1)$  их будет

$14 \cdot 10$  (все точки лежат на отрезках  $\parallel AB$ , таких  
будет 10, а на каждой отрезке 14 точек)

Для каждой  $(x_1, y_1)$  соотв. по 14 точек  $(x_2, y_2)$   
пар будет  $14 \cdot 14 \cdot 10 = 1960$  Ответ: 1960

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N6.

$$\begin{cases} ax+y-86=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$(2): \begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \\ x^2+(y-12)^2 \leq 16 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x^2+(y-12)^2 \geq 16 \end{cases}$$

$x^2+y^2=1$  - ур-е окружности  
и  $x^2+(y-12)^2=16$

Начертим на - во точек удобн. (2) (это будет 2 круга)

< центры

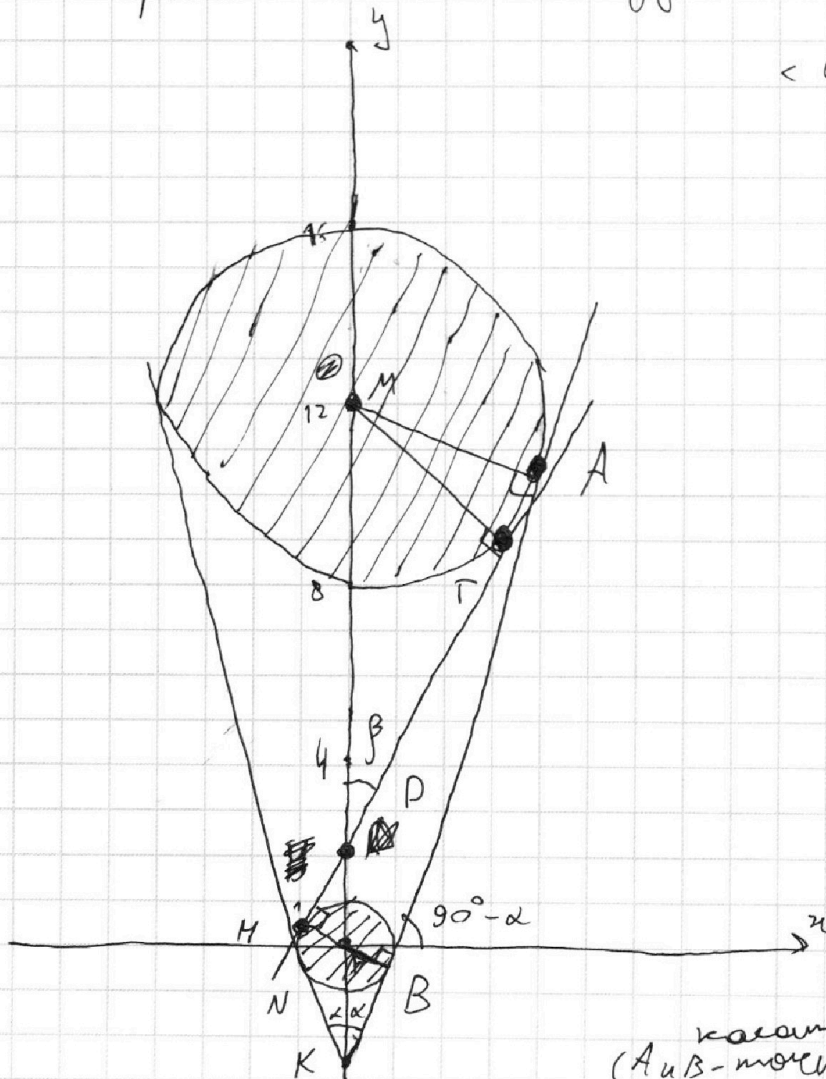
$M(0; 12)$  и  $N(0; 0)$

$L: ax+y-86=0$  - это ур-е прямой

2 решения у системы будет, если прямая касается каждой окружности. Но есть две точки касания.

Таким образом касательная у (2) будет и 2 внешн. и 2 внутр.

Проведем внешнюю касательную (A и B - точки касания)



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $\angle KCB = \alpha$

$$NK = \frac{NB}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}; \quad MK = \frac{AM}{\sin \alpha} = \frac{12}{\sin \alpha}$$

$$MK = \frac{MN + NK}{\sin \alpha} = \frac{12 + \frac{1}{\sin \alpha}}{\sin \alpha}$$

$$MK = 12 + \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{3}{\sin \alpha} = 12 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{4}$$

( $\sin \alpha \neq 0$ )

По теореме  $NK = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ ;  ~~$\tan \alpha =$~~

$$KB = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}; \quad \tan \alpha = \frac{KB}{NB} = \sqrt{15}$$

$\tan \alpha$  - катет. противолежащий, значит

$$a = \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha = \sqrt{15}$$

и при  $a = \sqrt{15}$  существует  $b$ , при котором прямая  $l$  совпадает с  $AB$ .

для внутр. касательной  $a = \tan(90^\circ + \alpha) =$

$$= -\cot \alpha = -\frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\cos(90^\circ + \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\cot \alpha = -\sqrt{15}$$

$$= -\sqrt{15}$$

Проведем внутр. касательную  $MT$ .

$$ND = \frac{NH}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \beta}; \quad MD = \frac{MT}{\sin \beta} = \frac{4}{\sin \beta}$$

$$ND + MD = 12 = \frac{5}{\sin \beta} \quad \sin \beta = \frac{5}{12} \quad (\text{н.к. } \sin \beta \neq 0)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$\text{ctg} \beta = \frac{ND}{NH} = \frac{12}{5}$~~   ~~$ND = \frac{12}{5}$~~   ~~$NH = \sqrt{\frac{12^2}{5^2} - 1} = \frac{\sqrt{119}}{5}$~~

$ND = \frac{12}{5}; NH = \sqrt{\frac{12^2}{5^2} - 1} = \frac{\sqrt{119}}{5}$

$\text{ctg} \beta = \frac{ND}{NH} = \frac{\sqrt{119}}{5}$

$\alpha = a$  - угол наклона НТ, значит  $\text{tg}(90^\circ - \beta) = a$

$$a = \text{ctg} \beta = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

Аналогично угол наклона другой внутренней касательной равен  $\text{tg}(90^\circ + \beta) = -\text{ctg} \beta = -\frac{\sqrt{119}}{5} = a$

при всех возможных  $a$  будут существовать  
(разные)  $b$ , при которых прямые станут общими касат.  
значит, эти  $a$  подходят.

Ответ:  $a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$

$$a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \beta \approx \frac{1}{DN}; \quad \sin \beta = \frac{AM}{MD} = \frac{4}{MD}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 144 \\ \hline 145 \end{array}$$

$$DN + MD = 12 \Leftrightarrow \frac{4}{\sin \beta} \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{4}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{25} = \frac{144}{25} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \beta \Leftrightarrow \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{119}{25} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{119}}{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~kh t = 2~~  $kh t = 2^\alpha \cdot 7^\beta$

$$c = a \cdot 2^2 \cdot 7 \cdot \frac{h}{k}; b = \frac{a}{2^4 \cdot 7^{21}} \cdot \frac{k}{t} \quad k$$

$$a k \geq \frac{2^4 \cdot 7^{21} \cdot t}{h} \quad \Rightarrow$$

$$a = 2^4 \cdot 7^{21}$$

$$b \neq k \quad b = k \cdot 2^{11} \cdot 7^{10} =$$

$$k \Rightarrow 2^0$$

$$ab \neq c; \quad b \neq k \quad ba = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$\frac{a^2}{2^4 \cdot 7^{21}} \cdot \frac{k}{t} = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \Leftrightarrow \frac{a^2 k}{k t} = 2^{19} \cdot 7^{32}$$

3

~~kh t = 4~~ ~~kh t = 7~~ ~~kh t = 2~~  $\frac{a^2 k}{k t} = 2^{18} \cdot 7^{32}$

$$kh t = 4; \quad k t = \frac{4}{h} \quad \frac{a^2 k}{4} = 2^{19} \cdot 7^{32}$$

$$kh t \neq 4;$$

$$kh t = 7; \quad \frac{a^2 k^2}{7} = 2^{19} \cdot 7^{32} \quad \cancel{}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{t}{k} \cdot 2^6 \cdot 7^{21} \Rightarrow$$

$$kh t = 2$$

$$ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \quad \frac{a^2}{k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}} = \frac{t}{h} \cdot 2^6 \cdot 7^{21}$$

$$\frac{a^2}{k t} \cdot h = 2^{21} \cdot 7^{32}$$

$$kh t = 2^\alpha \cdot 7^\beta$$

$$\frac{a^2 \cdot h^2}{2^\alpha \cdot 7^\beta} = 2^{21} \cdot 7^{32} \Leftrightarrow (ah)^2 = 2^{21+\alpha} \cdot 7^{32+\beta}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$h=1:$

$$a^2 = 2^{22} \cdot 7^{32} \Rightarrow a = 2^{11} \cdot 7^{16}$$

$b=$   $k=2:$

$$b = 2^{26-11} \cdot 7^{11-16}$$

$kht = \min$   $11 \cdot 32 + 16 \cdot 11$   
 $16 \cdot \frac{11}{2}$

$c > a$

$a \nabla ac > ab$   
 $c > b$

$bc > ab$   
 $c > a$

$c = \max$

$ab^2c = 1109$   
 $= b^2 \cdot c \cdot 2^{33} \cdot 7^{39} = kh \cdot 2^{37} \cdot 7^{35}$

$$b^2 \cdot c \cdot 7^{10} = kh \cdot 2^9$$

$$b = \frac{k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}}{c}$$

$$a = \frac{c \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}}{c}$$

$$c = k \cdot 2^x$$

$$b = \frac{k \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}}{c}$$

$$\frac{kh \cdot 2^{40} \cdot 7^{57}}{c^2} = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$c^2 = \frac{kh}{k} \cdot 2^{25} \cdot 7^{46}$$

$$a^2 = c^2 \cdot 2^{96}$$

$\frac{62}{abc}$   $\frac{62}{a \cdot c} \cdot c$   $\frac{78}{46}$   
 $\frac{32}{32}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$MN = 12$$

$$a \cdot b = \frac{bc}{ab} = \frac{c}{a} = \frac{k}{k} \cdot 2^2 \cdot 7^7 \quad \left. \begin{array}{l} 27 \\ 33 \end{array} \right\}$$

$$c = a \cdot 2^2 \cdot 7^7 \cdot \frac{h}{k}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = 2^5 \cdot 7^{21} \cdot \frac{h}{k} \Rightarrow b = \frac{a}{2^5 \cdot 7^{21}} \cdot \frac{h}{k}$$

$$c = a \cdot 2^3 \cdot 7^9 \quad a = 2^4 \cdot 7^{21} \quad a = 1$$

$$b = \frac{a}{2^9 \cdot 7^{21}}$$

$$\frac{a}{b} = 2^5 \cdot 7^{21} \cdot \frac{h}{k}$$

$$\sum_1 (a; b) = \frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} \quad (a+b; a^2 \rightarrow ab + b^2) =$$

$$= (a+b; -9ab) = (9ab; a+b) = (-9a^2; a+b) =$$

$$9a^2 + 9ab = 9a(a+b) \quad (-9a^2; a+b) \cdot \frac{55}{9}$$

$$9a^2 : a \quad 1 : a \quad 9 : a+b$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2 - 9ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9a(a+b) + 9a^2}$$

$$\frac{1}{a+b-9a + \frac{9a^2}{a+b}}$$

$$\frac{9}{1 - 7 \cdot 8 + 63} = \frac{9}{64 - 56} = \frac{9}{8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$   
 $bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$   
 $ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$

$abc - \min$   
 $ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$   
 $bc = t \cdot 2^{15} \cdot 7^{17} \cdot 2^2 \cdot 7^2$   
 $ac = h \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2^8 \cdot 7^{28}$

$(abc)^2 = kth \cdot p^3 \cdot 2^{10} \cdot 7^{35}$

$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{1}{a+b} - \frac{9ab}{a+b}$

$\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{1}{a+b} - \frac{9ab}{a+b}$

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 1 - \sqrt{b} \Rightarrow a = 1 - 2\sqrt{b} + b$

$1 - 9x = 1 - 2\sqrt{b} \Leftrightarrow 2\sqrt{b} = 9x$

$36 \cdot b^2 + 4 \cdot 81 = b^2 + 4 \cdot 3 \cdot 23 =$   
 $= 4 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 23 = 4 \cdot 3(3 + 23) = 12 \cdot 26 = 12 \cdot 2 \cdot 13$

$D = 496^2 - 46^2$   
 $\frac{a}{b} - \text{несокр.}$   
 $a^2 - 9ab + b^2 - a - b = k$   
 $\frac{1}{14} \cdot 14$   
 $\frac{13}{6}$   
 $\frac{7}{8}$   
 $= 1 - 9x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

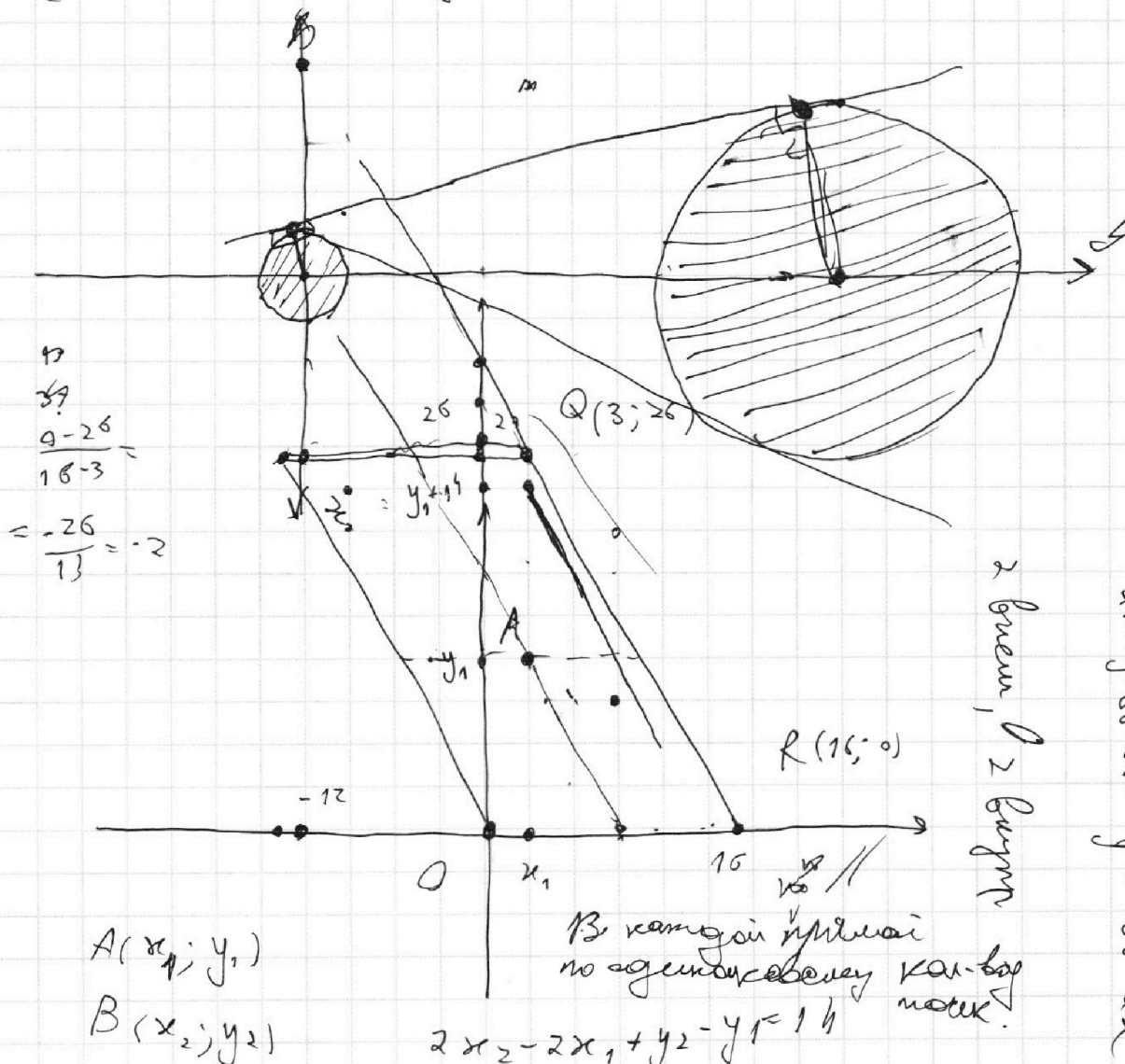
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 6.

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$



$$\frac{9 - 26}{16 - 3} = \frac{-17}{13} = -2$$

$$A(x_1; y_1)$$

$$B(x_2; y_2)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$y = 2x_2 + y_2 - 14 - 2x_1$$

$$-2(x_2 - x_1) = y_2 - (y_1 + 14)$$

фиксируем  $x_1; y_1$

2 биссектрисы, 2 биссектрисы

$$ax + y - 8b = 0 \text{ или } y = 8b - ax$$

В каждой точке по одному отрезку как-то меток.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 19 \\ \hline 1521 \\ + 1690 \\ \hline 3209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 54 \\ \times 8 \\ \hline 432 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 177 \\ \times 16 \\ \hline 1122 \\ + 11220 \\ \hline 2856 \end{array}$$

$$(290 - 1) 627$$

$$\begin{array}{r} + 1521 \\ + 1014 \\ \hline 2535 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 611 \\ \times 290 \\ \hline 54990 \\ + 6270 \\ \hline 17340 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28561 \\ + 289 \\ \hline 28850 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 2023 \\ \hline 2023 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 578 \\ \hline 2601 \end{array}$$

$$289t + 59 = 647$$

$$289t = -48$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 289 \\ \hline 289 \\ + 1754 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 181203 \\ - 338 \\ \hline 177823 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 26 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 627 \overline{) 209} \\ \underline{6} \\ 27 \\ \underline{27} \\ 0 \end{array}$$

$$t = 1$$

$$2 \cdot 13 - 26 = 0$$

$$11$$

$$\alpha = \begin{array}{r} 338 \\ + 289 \\ \hline 627 \end{array}$$

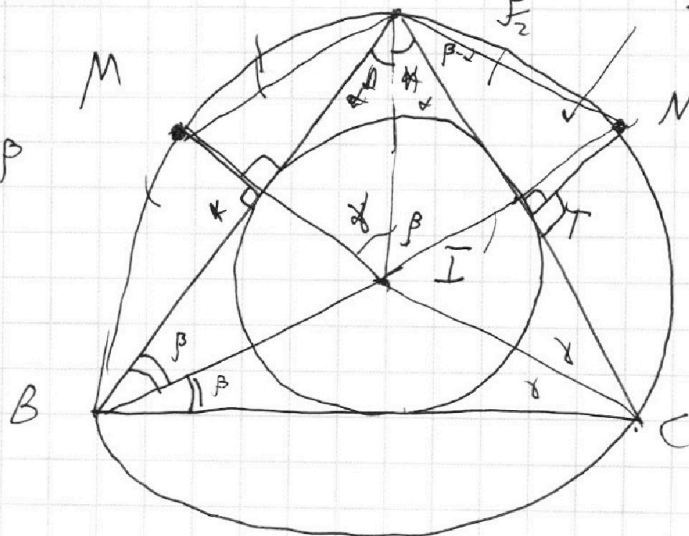
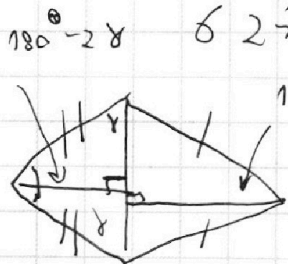
$$2 - 289 = -338$$

$$\begin{array}{r} 209 \overline{) 13} \\ \underline{13} \\ 0 \end{array}$$

$$MK = 5$$

$$NT = 2, 3$$

$$180^\circ - 2\beta \quad AI - 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$= \frac{4 \cdot (81 + 6\sqrt{78})}{69^2}$$

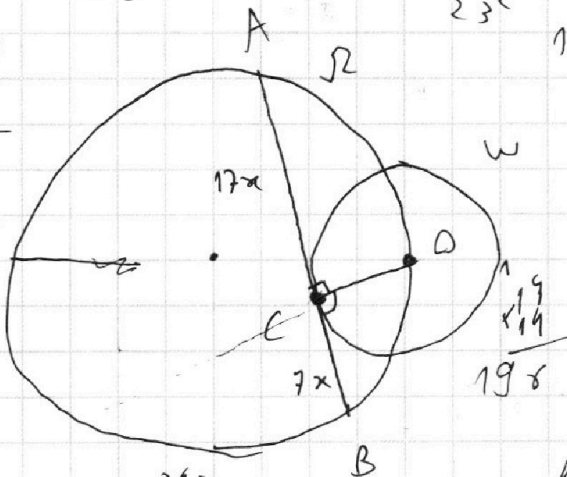
$$= \frac{4(9 + 2\sqrt{78})}{23^2} - \frac{8 \cdot 2(3 + \sqrt{78})}{69 \cdot 23} = \frac{4}{23} \left( \frac{9 + 2\sqrt{78}}{23} - \frac{2(3 + \sqrt{78})}{23} \right)$$

$$= \frac{4}{23} \cdot \frac{-60 - 21\sqrt{78}}{23} = -\frac{4 \cdot 3(20 + 7\sqrt{78})}{23^2}$$

$$a \approx x^2 = \left( \frac{2(3 + \sqrt{78})}{69} \right)^2 = \frac{4(81 + 6\sqrt{78})}{69^2}$$

$$3x^2 = \frac{4(81 + 6\sqrt{78})}{69^2} \cdot 3 = \frac{4 \cdot 3(81 + 6\sqrt{78})}{69^2} = \frac{4 \cdot 3(9 + 2\sqrt{78})}{23^2}$$

Handwritten calculations:  
 $22 \cdot 17 = 374$   
 $17 \cdot 17 = 289$   
 $374 + 289 = 663$   
 $663 / 17 = 39$   
 $17 \cdot 39 = 663$



$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$$

Handwritten calculations:  
 $r = 7$   
 $R = 13$   
 $AB = ?$   
 $156 + 52 = 208$   
 $208 - 49 = 159$   
 $159 / 3 = 53$

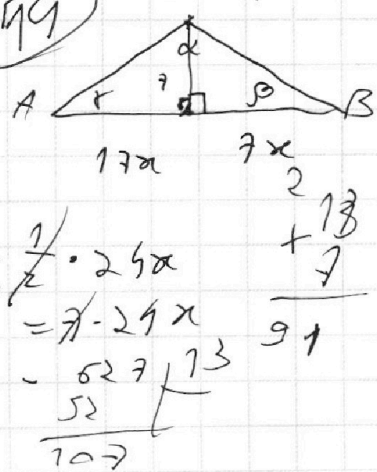
$$\angle AOB = \angle AOB = 2R = 26$$

$$\sin \alpha = \sin \angle AOB = \frac{29x}{25} \cdot \frac{25}{28} = \frac{12x}{13}$$

$$AO = \sqrt{(17x)^2 + 7^2}; \quad BO = \sqrt{(7x)^2 + 7^2}$$

$$\frac{AO}{\sin \beta} = \frac{AO}{\sin \beta} = \frac{AO \cdot OB \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha}{\frac{1}{2} \cdot 29x} = \frac{7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 29x}{\frac{1}{2} \cdot 29x} = 7$$

$$(289t + 49)(t + 1) = t \cdot 29^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos(\beta + 2\alpha) = \cos 2\alpha - 2\cos 2\beta$$

$$\frac{\cos \alpha}{\cos(\beta + 2\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\cos(\beta + 2\alpha)}$$

$$\text{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\text{ctg}(\beta + 15)$$

$$\frac{17}{7}$$

$$119$$

$$\frac{199}{25}$$

NI.

$$\frac{15}{17} + \frac{32}{23} = \frac{55}{55}$$

$$\frac{98}{5} + \frac{12}{5} = 12$$

$$\frac{56}{4} = 14$$

$$\frac{29}{39} = \frac{68}{68}$$

$$7 \cdot 17$$

$$a = 2 \cdot 7$$

$$b = 5 \cdot 7 = 35$$

$$c = 2 \cdot 13 \cdot 7 = 182$$

abc kth c

$$(abc)^2 = kth \cdot \frac{55}{2} \cdot 68$$

kt tl min kth - 2

$$(abc) = 2 \cdot 28 \cdot 34$$

$$a = 2 \cdot 7$$

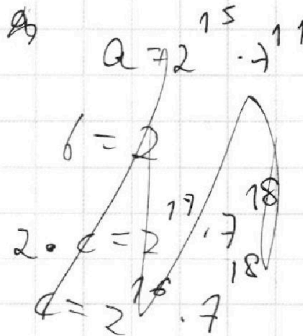
$$b = 2 \cdot 7$$

$$c = 2 \cdot 7$$

$$a = 2 \cdot 15 \cdot 11$$

$$b = 2 \cdot 18 \cdot 39$$

$$c = 2 \cdot 23 \cdot 50$$



$$\sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{KN}$$

$$\sin \alpha = \frac{9}{MK}$$

$$\alpha + \alpha_2 = 23$$

$$\beta + \beta_2 = 39$$

$$\alpha + \alpha_1 = 15$$

$$\beta + \beta_1 = 11$$

$$\alpha + \alpha_2 = 17$$

$$\beta + \beta_2 = 18$$

$$\alpha_2 + \alpha_1 = 18$$

$$\beta - \beta_1 = 11$$

$$\beta + \beta_1 = 11$$

$$\alpha - \alpha_1 = 5$$

$$\alpha + \alpha_1 = 15$$

$$2\alpha = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 10$$

$$\alpha_1 = 5$$

$$\alpha_2 = 13$$

$$\beta_2 = 39$$

$$\beta = 11$$

$$\beta_1 = 0$$

$$MK - KN =$$

$$= 12$$

$$= \frac{3}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

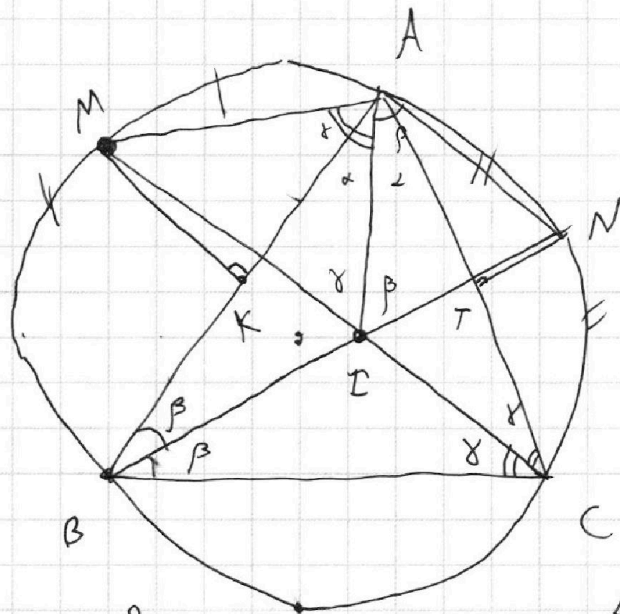
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(\alpha + \gamma) + \cos(\alpha - \gamma) = 2\cos\alpha\cos\gamma$$

14



$$\frac{MK}{\sin(\delta - \alpha)} = MA$$

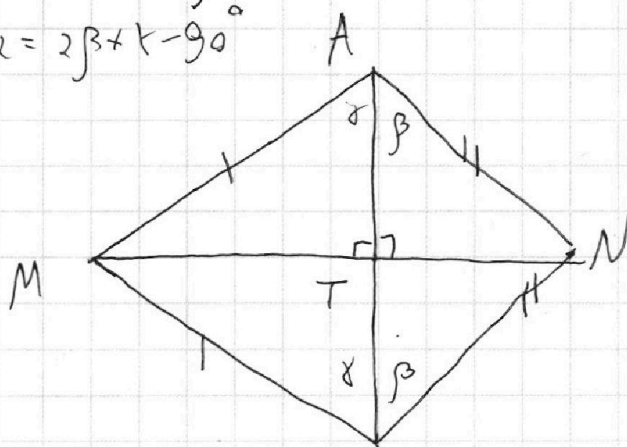
$$\frac{AN \cdot NT}{\sin(\beta - \alpha)} = AN$$

$$\delta + \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ - \delta - \beta$$

$$\delta - \alpha = 2\delta - 90^\circ + \beta$$

$$\beta - \alpha = 2\beta + \delta - 90^\circ$$



$$AM^2 \cdot \frac{1}{2} \sin(2\delta) =$$

$$= MT \cdot AN \cdot \frac{1}{2}$$

$$2AM^2(1 - \cos(180^\circ - 2\delta)) = AN^2$$

~~AT~~

$$AT = AM \cdot \cos\delta$$

$$AT = AN \cdot \cos\beta$$

$$AM \cos\delta = \frac{2}{\sin(\delta - \alpha)} \cdot \cos\delta = \frac{2 \cdot \cos\delta}{\sin(\delta - \alpha)} \cdot \cos\beta$$

$$\frac{2}{\sin(90^\circ - (\beta + 2\delta))} \cdot \cos\delta = \frac{1}{\sin(90^\circ - (\beta + \delta))} \cdot \cos\beta$$

$$\frac{2}{\cos(\beta + 2\delta)}$$

$$2\cos\delta \cos(\beta + 2\delta) = \cos\beta \cos(\beta + 2\delta)$$

$$\cos(2\beta + 2\delta) + \cos(2\beta) = \frac{1}{2} (\cos(2\beta + 2\delta) + \cos(2\delta))$$