МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(1) 1) Заметим, что если $\exists k \in \mathbb{N}$: $k>1$, $k\not\vdots 2$, $k\not\vdots 7$, $a \vdots k$ или $b \vdots k$ или $c \vdots k$, то мы можем заменить числа на $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$ или $\frac{c}{k}$, и от этого условие не перестанет выполняться. То есть ~~НОД~~ все числа представимы в виде $2^x \cdot 7^y$.

2) Пусть $a = 2^x \cdot 7^y$, $b = 2^\alpha \cdot 7^\beta$, $c = 2^k \cdot 7^m$

$ab = 2^{(x+\alpha)} \cdot 7^{(y+\beta)} \vdots 2^{17} \cdot 7^{10}$

$bc = 2^{(\alpha+k)} \cdot 7^{(m+\beta)} \vdots 2^{17} \cdot 7^{7}$

$ac = 2^{x+k} \cdot 7^{y+m} \vdots 2^{20} \cdot 7^{37}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+\alpha \geq 14 \\ y+\beta \geq 10 \\ \alpha+k \geq 17 \\ \beta+m \geq 17 \\ x+k \geq 20 \\ y+m \geq 37 \end{cases}$

$(x, y, \alpha, \beta, k, m \in \mathbb{Z}\mathbb{N}\cup\{0\})$ ← все степени ≥ 0, т.к. числа $a, b, c \in \mathbb{N}$ -(цел, неотр)

3) $abc = 2^{(x+\alpha+k)} \cdot 7^{(m+y+\beta)}$

4) Заметим, что условия по ст-ням 2ки и 7ки независимы, т.е. мы можем отдельно минимизировать каждый сомножитель

5) для 2:
$\begin{cases} x+\alpha \geq 14 \\ \alpha+k \geq 17 \\ x+k \geq 20 \end{cases}$

$2(x+\alpha+k) \geq 51$, т.к. все числа ~~неотриц~~ целые, то $2(\ )$ - четно и мин. зн-е. для $(x+\alpha+k) \geq \frac{51}{2} = 25{,}5 \Rightarrow (x+\alpha+k) = 26$.

6) Аналогично для 7.

(2) $\begin{cases} y+\beta \geq 10 \\ \beta+m \geq 17 \\ y+m \geq 37 \end{cases}$ 54

$2(y+\beta+m) \geq 64$ $\quad m+\beta+y \geq 32$

$abc = 2^{x+\alpha+k} \cdot 7^{m+y+\beta} \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$ по доказанному.

Пример: для 2ки.
$x = 8$
$\alpha = 6$
$k = 12$

однако. заметим, что решая систему (2), мы получим, что $y - \beta \geq 20$ (вычев 2 и 3 нер-ва) в то время как $y+\beta \geq 10$, т.е. в примере для минимума
$y \geq 20+\beta$, $\beta \leq y-20$, $10 \leq y+\beta \leq 2y-20 \Rightarrow$
$\Rightarrow y \geq 15$ $\Rightarrow$ но из условия $\beta \geq 0$ (степени делит. у нат. чисел) $y \geq 20$

$\Rightarrow \underline{y \geq 20} \Rightarrow m \geq 17 \Rightarrow \beta \geq 0$ и

$\beta = 0$ $\quad m = 17$ $\quad y = 20$ удовлетворяет всем условиям, (при этом показано, почему y не меньше 20), а сумма $\beta+m$ ~~стороны~~ ≥ 17 по усл, при этом все нер-ва выполнены)

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 3^{37}$ при $a = 2^8 \cdot 7^{20}$;
$b = 2^6 \cdot 7^0$
$c = 2^{12} \cdot 7^{17}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик + построение пример

$x+\alpha=14$
$\alpha+k=18$
$x+k=20$

$k-\alpha=6$
$k+\alpha=18$

$k=12$
$\alpha=6$

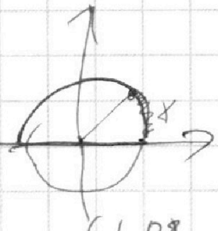
$8+6=14$
$12+6=18$
$12+8$

$y+\beta=10$
$\beta+m=17$
$y+m=37$

$y-\beta=20$
$y+\beta=10$

$y=15$
$x=-5$

$tg\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}\right)$
$ctg(\alpha+\beta)$



$\cos(\alpha+\beta-90)=$
$=\cos\left(\gamma-\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\gamma)$

$\frac{4x}{5}=\frac{1}{\sqrt{7x^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $7x\cdot x$

$\frac{4x}{5}=\frac{1-7x^2}{\sqrt{7x^2+1}\cdot\sqrt{x^2+1}}$

$1-7x^2$

$4x\cdot\left(\frac{4}{7}+\sqrt{25-4x^2}\right)=\frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}}\cdot\left(\quad\right)\cdot\sqrt{16x^2+\frac{16}{49}}$

$\frac{7x}{1}=tg\alpha$ $\frac{x}{1}=tg\beta$ $\Rightarrow$ $tg\alpha=7tg\beta$ $\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$

$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=\frac{7tg\beta}{1-7tg^2\beta}$

$\frac{4x}{h}=\frac{1-7x^2}{7x}$ $\frac{28x^2}{h}=1-7x^2$ $h=\frac{28x^2}{1-7x^2}$ $1-7x^2\geq0$
$7x^2\leq1$
$x^2\leq\frac{1}{7}$

$\left(\frac{28x^2}{1-7x^2}\right)^2+16x^2=25$ $t=x^2$ $\frac{7x}{1-7x^2}$

$tg\left(180-\alpha-\beta\right)$ $tg(-\alpha-\beta)=$

$(28t)^2+16t(1-7t)^2=$
$=25(1-7t)^2$

$(35-28)(35+28)$

$7\cdot63=49\cdot9$

$(25-16t)(49t^2+1-14t)=$
$=(28t)^2$

$28\cdot\frac{1}{16}$
$1-\frac{7}{16}$

$(35t)^2+25+350t+16\cdot49t^3-16t+16\cdot14t^2=$

$490-49$

$(28t)^2$ $14\cdot16$ 200 24

$\frac{28\cdot16}{9\cdot16}$ $\frac{28}{9}$

$16\cdot49t^3-451t^2-224t^2+366t-25=0$

$1-$

$\frac{4x}{h}=\frac{7x}{1-7x^2}$ $\frac{7}{4}h=1-7x^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

② 1) $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$

2) $\exists m$: m-макс и $\begin{cases}(a+b) \underset{m}{\equiv} 0 \\ (a^2-6ab+b^2) \underset{m}{\equiv} 0\end{cases}$

3) $a \underset{m}{\equiv} -b \Rightarrow a^2-6ab+b^2 \underset{m}{\equiv} (-b)^2-6(-b)b+b^2 \underset{m}{\equiv} 8b^2 \underset{m}{\equiv} 0.$

4) Имеем 3 условия $\begin{cases}8b^2 \underset{m}{\equiv} 0 \\ a \underset{m}{\equiv} -b \\ \text{НОД}(a,b)=1\end{cases}$ $\exists m = 8 \cdot k$, где $k > 1$, тогда т.к. $8b^2 \underset{m}{\equiv} 0$, то b^2 кратно k.

(т.е. $b^2 = k \cdot x$

(*) $\alpha, k, x, m \in \mathbb{N}$.

Тогда $a \underset{m}{\equiv} -b \Leftrightarrow a^2 \underset{m}{\equiv} b^2 \quad a^2 \underset{m}{\equiv} k \cdot x$

$a^2 = \alpha \cdot m + kx = k(\alpha \cdot 8 + x)$ з.я.

a^2 тоже кратен k. $k \neq 1$ $\begin{matrix} a^2 \vdots k \\ b^2 \vdots k \end{matrix}$, но тогда НОД (a,b) не равен единице.

что противоречит условию. $\Rightarrow$ предполож. неверно и $m \neq 8k$, где $k > 1 \Rightarrow$

$m \not> 8$. т.е. $m \leq 8$

Пример для $m=8$:

$b=1$, $a=7$. $\frac{8}{49-42+1} = \frac{8}{8} = 1$ $m=8$. $\frac{a}{b}=\frac{1}{7}$ - несократимо

Ответ: $m=8$

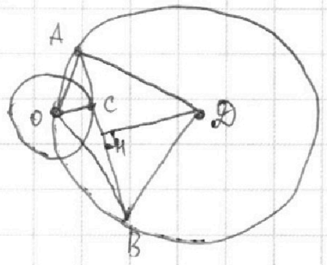
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

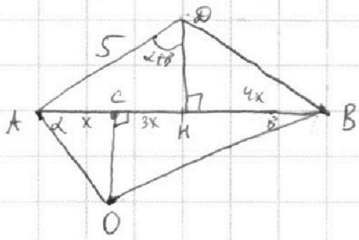
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3



$\exists$ 1) O – центр ω
$\exists$ 2) D – центр Ω
3) $DH \perp AB$. $\Rightarrow$ $\angle ADH = \angle BDH$; $AH = HB = \frac{AB}{2}$ (св-ва р/б $\triangle$) ($\triangle ADB$ – р/б, т.к. $AD = DB = 5$)



1) $\exists\ AC = x$
2) $\Rightarrow BC = 7x \Rightarrow HB = AH = 4x$.
3) $\exists\ \angle OAB = \alpha$, $\angle ABO = \beta$ $\Rightarrow$

$\smile AB = 2\alpha + 2\beta$ (св-ва впис. углов)

$\Rightarrow \angle ADB = 2\alpha + 2\beta$ (центр угол)

4) $\Rightarrow \angle ADH = \angle BDH = \angle \frac{ADB}{2} = \alpha + \beta$ (DH – бис-са)

5) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{1}$, $\operatorname{ctg}\beta = 7x$

6) $\operatorname{ctg}\angle ADH = \frac{DH}{AH} = \frac{\sqrt{25 - 16x^2}}{4x} = \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} =$

$= \frac{7x^2 - 1}{8x}$ $\Rightarrow$ $2\sqrt{25 - 16x^2} = 7x^2 - 1$.

$100 - 64x^2 = 49x^4 - 14x^2 + 1$

$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, \text{т.к. } x > 0 \\ x^2 = -\frac{99}{49} \in \varnothing \end{array}\right.$ $\Rightarrow AB = 8x = 8$ Ответ: $AB = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4) $\exists$ $2-7x=a$ $\Rightarrow$ ур-е можно записать в виде.
$2x^2+2x+1=b$

$$\sqrt{b+a}-\sqrt{b}=a.$$

(*) видно, что при $a=0$ ур-е верно. $(\sqrt{b}-\sqrt{b}=0)$. „Домножим на сопряженное" к левой части.

~~Возведем в $(\cdot)^2$ обе части~~

$$\cancel{b+a+b-2\sqrt{b^2+ab}=a^2}$$

$$\cancel{2\sqrt{(b^2+ab)}=a-a^2+2b}$$

~~Заметим, что под корнем у нас~~ ~~ф-я вида~~ ~~в то время как~~

~~справа, т.е. не более двух общих точек.~~

~~решение 1: $a=0$~~

~~реш-е 2: $a=1$ $\sqrt{2-5+3}-\sqrt{2+2+1}=2-7$~~

~~$0-\sqrt{5}=-7$~~

$$b^2 \cancel{+ab=(2x^2+2x+1)(2x^2-5x+3)}$$

$$\cancel{a-a^2+2b=2-7x-49x^2-4+14x+2x^2+2x+1=-47x^2+9x-1}$$

$$\left(\sqrt{b+a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{b+a}-\sqrt{b}\right)=a\cdot\left(\sqrt{b+a}+\sqrt{b}\right)$$ преобр равносильно, т.к. $\sqrt{a+b}+\sqrt{b}>0$

$$\left(\left(\sqrt{b+a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2\right)=a\cdot\left(\sqrt{b+a}+\sqrt{b}\right)$$

$$a=a\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b}\right)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ \sqrt{b}+\sqrt{a+b}=1 \end{array}\right.$$

$$\cancel{\sqrt{b}=1-\sqrt{a+b}}$$

$$\cancel{b=1-a-b}$$

$$\sqrt{b}=1-\sqrt{a+b}$$

$$b=a+b+1-2\sqrt{a+b}$$

$$a+1=2\sqrt{a+b}$$

$$a^2+2a+1=4a+4b$$

$$(3-7x)^2=4\left(2x^2-5x+3\right)$$

$$49x^2-42x+9-8x^2+20x-12=0$$

$$41x^2-22x-3=0$$

$$D=121+3\cdot41=121+123=244=4\cdot61$$

$$\cancel{x=\ldots}\quad x=\frac{11\pm2\sqrt{61}}{41}$$

$\frac{11+2\sqrt{61}}{41}\ ?\ 1$

$2\sqrt{61}\ ?\ 30$

$\sqrt{61}\ ?\ 15$

$\frac{11+2\sqrt{61}}{41}\ \gtrless\ \frac{3}{2}$

$22+4\sqrt{61}\ \gtrless\ 123$

$4\sqrt{61}\ \gtrless\ 101$

$\sqrt{61}\ \gtrless\ 24$

$b>0$ при $\forall x$

$$b+a=2x^2-5x+3=(2x-3)(x-1)>0 \Rightarrow x<1 \mid x>\frac{3}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(4) ~~8.~~ итак. 3 решения.

$a = 0 \Rightarrow 2 - 7x = 0 \quad x = \frac{7}{2}$

$x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$ > ~~3 заметим, что~~ ~~1~~

и ограничения $\left(\begin{matrix} b > 0 \\ a+b > 0 \end{matrix} \right.$ т.к. $\sqrt{\ }$ существуют)

$b > 0$ при $\forall x$, $(D < 0)$ $\quad a + b > 0$ при $\left\{ \begin{matrix} x < 1 \\ x > \frac{3}{2} \end{matrix} \right.$

$\frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \qquad \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} < 1$

т.к. $2\sqrt{61} < 41 - 11 = 30$

т.к. $\sqrt{61} < 15 = \sqrt{225}$

$\Rightarrow$ оба числа корни.

Ответ: $x = \frac{7}{2}$ (тоже подходит)

$x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

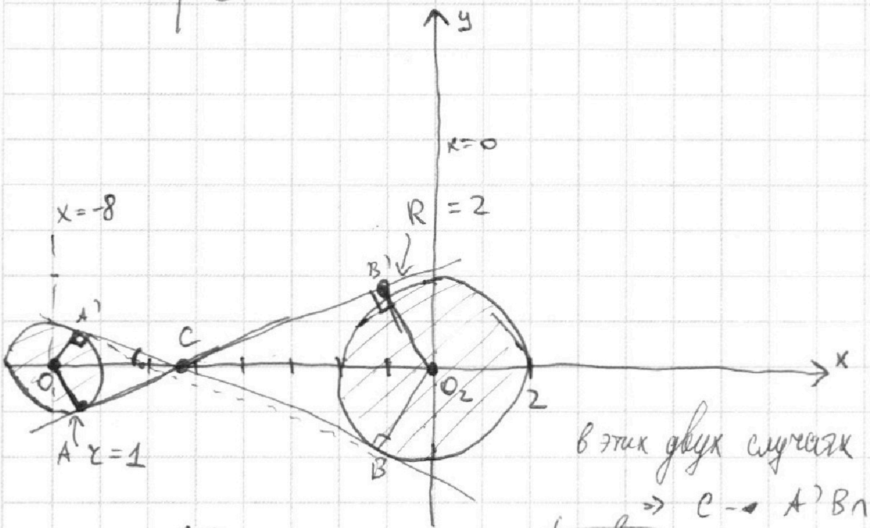
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(6) $\left((x-(-8))^2+y^2-1\right)(x^2+y^2-4)\leq 0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+y^2-4\geq 0\\(x+8)^2+y^2-1\leq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+y^2-4\leq 0\\(x+8)^2+y^2-1\geq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

это окр-ти. Начертим и отметим соотв области.



если такие a есть, то ~~ур~~ прямая ($\cancel{ax-y}$ $y=ax+10b$) – это общая насательная этих окр-тей.

в этих двух случаях Δ-ки $CA'O_1$, CAO_1 равны.

$\Rightarrow C - A'B\cap AB'=C$, $C_x=0$. ~~(равны)~~

$\triangle OA'C\sim\triangle O_2B'C$, $k=\frac{1}{2}$ $\frac{O_1C}{CO_2}=\frac{O_1A'}{O_2B'}=\frac{1}{2}\Rightarrow$

$\frac{O_1C}{\cancel{CO_2}\ 8-O_1C}=\frac{1}{2}$ $O_1C=\frac{8}{3}$

Тогда для пр-й $A'B$ ур-е имеет вид $y=ax+k$, где $a=\operatorname{tg}\angle A'CO_2=-\operatorname{tg}\angle A'CO_1=-\frac{O_1A'}{A'C}=-\frac{1}{\sqrt{\frac{64}{9}-1}}=-\frac{1}{\sqrt{\frac{55}{9}}}=$

$=-\frac{3}{\sqrt{55}}$ (нам также подойдет противоположный $a=\frac{3}{\sqrt{55}}$, т.к. он задает две общие внутр. насательные (AB'))

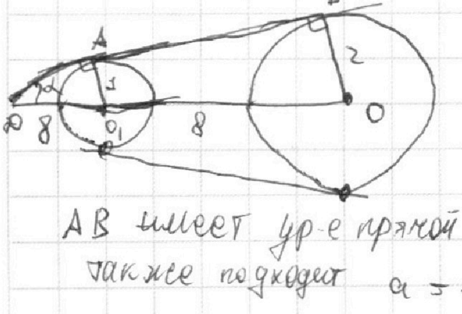
$\exists AB\cap OO_1=D$ $O_1A\parallel OB$ ($\perp$ им BD) $\frac{DO_1}{DO_1+8}=$

$\triangle ADO_1\sim\triangle OBD$, $\Rightarrow$ ~~$\frac{DO_1}{DO_1+8}$~~ $=\frac{1}{2}\Rightarrow$ k

~~$\Rightarrow DO_1=\ldots$~~

~~$\Rightarrow AD=\sqrt{64-1}=\ldots=3\sqrt{7}$~~ $AD=\sqrt{64-1}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$

~~$\Rightarrow AB=AD=3\sqrt{7}$~~



AB имеет ур-е прямой ~~$a=$~~ $y=ax+h$, $a=\operatorname{tg}\angle BAD=\frac{1}{3\sqrt{7}}$

также подходит $a=-\frac{1}{3\sqrt{7}}$, он задает противоположную внешн нас-ю $A'B'$. других a нет, т.к. общих нас-х окр-тей всего 4. ~~Ответ: $\pm\frac{\sqrt{7}}{21}$, $\pm\frac{3}{55}\sqrt{55}$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

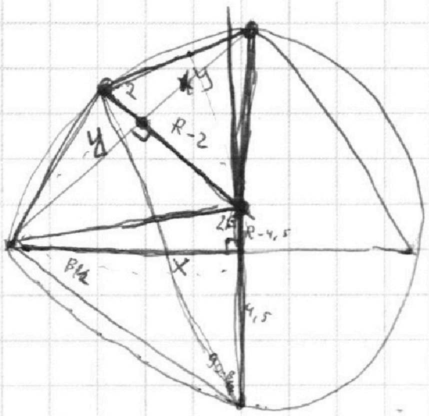
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $\pm\frac{\sqrt{7}}{21}$

$\pm\frac{3\sqrt{55}}{55}$



$x^2 = \frac{81}{4} - 9R$

~~$tg\beta = 9$~~

~~$ctg\beta$~~ $tg\beta = \frac{9}{2x}$

$tg 2\beta = \frac{2\cdot\frac{9}{2x}}{1-\frac{81}{4x^2}} = \frac{x}{R-\frac{9}{2}}$

$\frac{36}{4-\frac{81}{x^2}} = \frac{2x}{R-9}$

~~$(9R-81)(36) = 2x($~~

$(9R-81)\cdot 4 = 2x\left(4-\frac{81}{x^2}\right)$

$\left(\frac{81}{4}-x^2-81\right)\cdot 2 = \left(4x-\frac{81}{x}\right)$

$(81-4x^2-324) = \left(8x-\frac{162}{x}\right)$

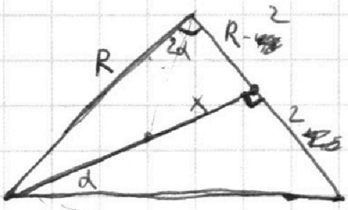
$4x^2 - 243 = 8x - \frac{162}{x}$

~~$4-243 ? 8-162$~~

$4x^3 - 8x^2 - 243x + 162 = 0$

~~$4\cdot 8 - 8\cdot 4 -$~~

~~$4\cdot 216 - 8\cdot 36 - 243\cdot 6$~~



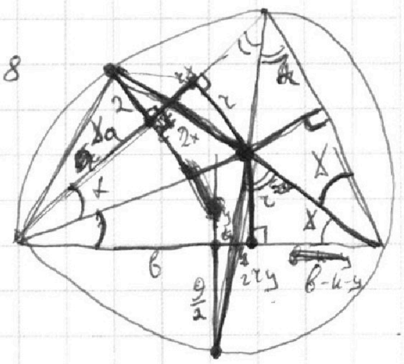
$x^2 = 4 - 4R$

$tg\alpha = \frac{2}{x}$

$tg 2\alpha = \frac{4/x}{1-\frac{16}{x^2}} = \frac{x}{R-2}$

$\frac{\frac{4}{x}\cdot x^2}{x^2-16} = \frac{4x}{4R-8}$

$\frac{4x}{x^2-16} = \frac{4x}{4-x^2-8}$



~~$a + x(r+r) = b$~~

$a + rx + rx = b + 9y + 2ry$

$(a+rx+rx)^2 + r^2$

$\sin\alpha = \frac{r}{d}$

$\left(\frac{ar}{2}\right)^2 + r^2 = d$

$\frac{a}{2} = \frac{b-9y-2ry}{r} = \frac{a+2x+rx}{r}$

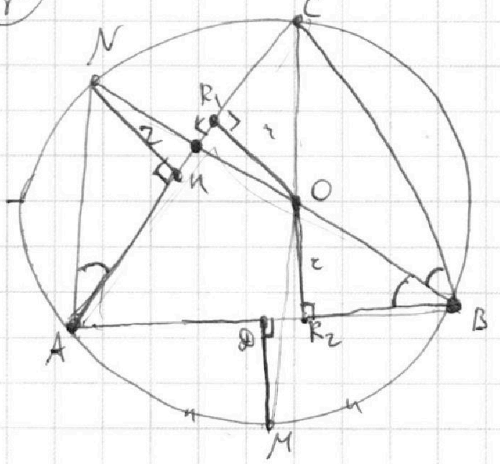
$\frac{ar}{2} = 2a + 2x + 2rx$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7



1) BN – бис-са, т.к. $\cup NC = \cup NA$
CM – бис-са

2) $BN \cap CM = O$
AO – искомая р-е (т.о. ∩ я бис-с – центр впис окр) впис

$\angle NAC = \angle OBA$ (на $\cup NC$)

3) $OR_1 \perp AC$ $OR_1 = OR_2 = r$
$OR_2 \perp AB$

4) $AR_1 = AR_2$ (отрезки кас-х)

5) а т.к. $\cup NA = \cup NC$, то $\angle OBA = \angle NAC$

6) $\cancel{\angle AN}$ $\frac{NH}{AH} = \cancel{OR_2}\ \frac{OR_2}{BR_2}$

$\triangle ANH \sim \triangle OR_2B$

$\frac{2}{AH} = \frac{r}{R_2B}$, аналогично $\cancel{AD}$ $\frac{9}{2AD} = \frac{r}{R_1C}$

$\Rightarrow \frac{2R_2B}{AH} = \frac{9 \cdot R_1C}{2AD} = 2r.$

~~(найти надо~~

7) $MD = 9$, NH – сер-перы, т.к. M, N – середины дуг.

8) $\exists\ BN \cap AC = K$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} \qquad \frac{b+1}{b^2-6b+1}$$

$b^2-6b+1 = k(b+1)$ 1400-31

$a+b=m$

$b^2-(6+k)b+(1-k)=0$

$b^2-6ab+a^2 = (a+b)k$

1556

$b^2 - b(6a+k)+(a^2-ak)=0$

$D = 36a^2+k^2-12ak-4a^2+4ak = 32a^2-8ak+k^2$

$(4a-k)(8a+k)$

$\frac{1+b}{b^2-6b+1}$ $\frac{1+7}{49-42+1} = 1$

389 = 350+39

$ctg(\alpha+\beta) = \frac{\cos^2-\sin^2}{\cos\sin+\sin\cos} = \frac{ctg^2-1}{ctg+ctg}$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$a \underset{m}{\equiv} -b$

$a^2-6ab+b^2 \underset{m}{\equiv} b^2+6b^2+b^2 = 8b^2 \underset{m}{\equiv} 0$

$8b^2 \underset{m}{\equiv} 0$

$a \underset{m}{\equiv} -b$

$8a^2 \underset{m}{\equiv} 0$

72 $b=a=9$ 389 = 350+39

340+49

$\frac{9+9}{81-6\cdot81+81} = \frac{18}{81\cdot(-4)}$

$8b^2 \underset{m}{\equiv} 0$

$a \underset{m}{\equiv} -b$

$b^2+6(m-b)b+(m-b)^2 = m\cdot k$

$8b^2-6mb-2bm+m^2-mk=0$

$m=8$

$b \to \forall$

$\Rightarrow a \to \forall$

$8b^2-8bm+(m^2-mk)=0$

$D = 64m^2-32(m^2-mk) =$

$= \underline{32m^2+32mk}$

$m^2+mk = 2x^2$

$m>8$ $b^2 \equiv 0$

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

$a+b = m\cdot k$

$\frac{a}{8}+\frac{b}{8}$

$8b^2 \equiv 0$

$b \vdots 3$ 24

$a \underset{24}{\equiv} -b \underset{24}{\equiv} 3k$ $k\in\mathbb{Z}$

$a = 24+3k$

$\frac{5}{4} = \frac{5+d}{4}$

$35 = 20+4d$

$d = \frac{15}{4}$

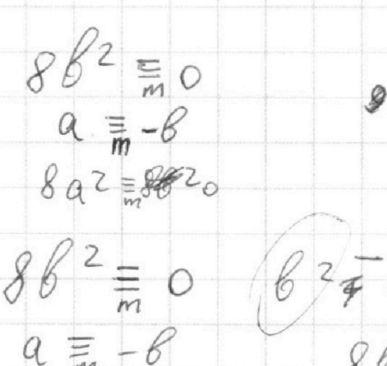
$\frac{360-2\alpha-2\beta}{2}$ $90-180+\alpha+\beta$

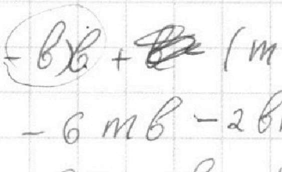
$180-\alpha-\beta$

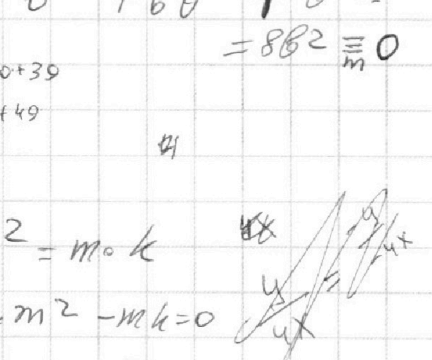
$180-\alpha+\beta$

$360-2\alpha-2\beta = x$

25







$\sqrt{\frac{25}{16}-x^2}$

$\frac{3}{4}\sqrt{25-4x^2}$

$\frac{4x}{5} = \cos(\alpha+\beta)$

$= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{7x^2+1}}$

$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

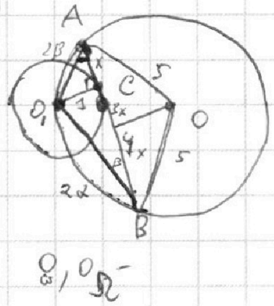
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

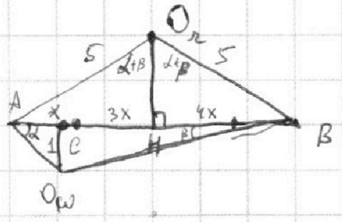
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(3)



O_1, O_Ω –



1) Соедиим OA, OB.
$O_\Omega A = O_\Omega B = R_\Omega = 5$

2) $O_\Omega H \perp AB$ (построим

3) $O_\omega C \perp AB$ (радиус $\perp$ в т.-ке касания)

4) $\exists\ AC = x \Rightarrow CB = 7x \Rightarrow AH = HB = 4x = \frac{AB}{2} \Rightarrow CH = 3x$

5) $\exists \angle O_\omega AC = \alpha$, $\angle O_\omega BC = \beta$. $\Rightarrow \smile AO_\omega = 2\beta$, $\smile BO_\omega = 2\alpha$ $\Rightarrow \smile AB = 2\alpha + 2\beta$

$\Rightarrow \angle AO_\Omega B = 2\alpha + 2\beta$, а т.к. $O_\Omega H$ – высота в р/б $\triangle AO_\Omega B$, то $\angle AO_\Omega H =$
$= \angle BO_\Omega H = \alpha+\beta$

6) $ctg\,\alpha = x$, $ctg\,\beta = 7x$

$$ctg\angle AO_\Omega H = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{4x} = ctg(\alpha+\beta) = \cancel{ctg\,\alpha \cdot ctg\,\beta}\ \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha} = \frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} - 1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{ctg\,\alpha\, ctg\,\beta - 1}{ctg\,\alpha + ctg\,\beta} = \frac{7x^2-1}{8x}$$

$$\frac{\sqrt{25-16x^2}}{4x} = \frac{7x^2-1}{8x} \qquad \sqrt{100-64x^2} = 7x^2-1 \qquad t = x^2,\ t > 0,\ \text{т.к. } \tfrac{1}{x} \Rightarrow x \neq 0$$

$$100 - 64t = 49t^2 + 1 - 14t$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0 \qquad t_1 = 1 \quad (49+50-99=0)$$

~~$\frac{D}{4} = 25^2 + 49 \cdot 99 = 625 + 490 \cdot 2 \cdot 49 = 625 + 980 \cdot 49 =$~~

~~$= 1556 = 4 \cdot 389$~~

~~$t = \frac{-25 + 2\sqrt{389}}{49}$ (+, т.к. $t>0$~~

~~$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{-25+2\sqrt{389}}{49}} \Rightarrow AB = 8x = \frac{8}{7}\sqrt{-25+2\sqrt{389}}$~~

~~$\frac{D}{4} = 625 + 4900 - 49 = 5000 + 600 - 100 - 49 + 25 = 5476 =$~~

~~$= 4 \cdot 1369 = 4 \cdot$~~

$t_2 = \frac{-99}{49} : 1 < 0 \Rightarrow$ не корень

по теор. Виета

$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AB = 8x = 8$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(4)

исходное ур-е $\sqrt{(2x-3)(x-1)} - \sqrt{(2x+1)(x+1)} = 2-7x$

$a = 2x+1$

$b = x$

$\sqrt{(a-2)(x-1)} - \sqrt{(a+2)(x+1)} = 2-7x$

$\sqrt{ax-2x-a+2} - \sqrt{ax+2x+a+2} = 2-7x$

$t = ax+2$

$k = 2x+a$

$\sqrt{t-k} - \sqrt{t+k} = 2-7x$

$k = 2x+2x-1 = 4x-1$

$\sqrt{t-k} - \sqrt{t+k} = \frac{1-7k}{4}$

$2-7x = -7x+\frac{7}{4}-\frac{7}{4}$

$= \frac{1}{4} - \frac{7}{4}k = \frac{1-7k}{4}$

$t-k-t-k-2\sqrt{t^2-k^2} = \frac{49k^2-14k+1}{16}$

$-32k - 32\sqrt{t^2-k^2} = 49k^2-14k+1$

$49k^2+18k+1 = -32\sqrt{t^2-k^2}$

$D = 81-49 = 32$

$t = \frac{-9 \pm 4\sqrt{2}}{49}$

$\sqrt{2x^2+2x+1-7x+2} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$a = 2-7x$

$b = 2x^2+2x+1$

$\begin{cases} b \geq 0 \\ b \geq a \end{cases}$

$\sqrt{b+a} - \sqrt{b} = a.$ (1)

~~$\sqrt{b-a} = a+\sqrt{b}$ $(b-a)^2 = (b)^2 - 2\sqrt{b^2-ab} - a^2$~~

~~$b-a-b-2\sqrt{b^2-ab} = a^2$~~ $D = 4-8$

$a^2 = 49x^2-14x+4$ $\quad 24+\frac{1}{2}-4$

~~$a^2+a = -2\sqrt{b^2-ab}$~~

~~если $\exists$ корни, то либо оба 0, либо $a^2+a<0 \Rightarrow$~~ $a \in (-1;0)$ $\quad 49+14 \quad 20,5$

~~$a=0 \quad 0 = -2\sqrt{b^2} = -2|b| = 2b$~~

$a^2 = 48x^2+48x+24+x^2+x+\frac{1}{2}-63x-20,5+18-18$

$\Rightarrow x = \frac{2}{7}$

~~$a=-1 \quad -2\sqrt{b^2+b}$~~

~~$2-7x=-1$ $7x=3$ $x=\frac{3}{7}$ $b\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{2\cdot 9}{49} + \frac{2\cdot 21}{49} + \frac{49}{49} = \frac{18+42+49}{49} = \frac{109}{49} > 0$~~

$b^2+b>0$

$(a-a^2) = 2\sqrt{b^2+ab}$ $\quad 24,5b-9a-38,5$

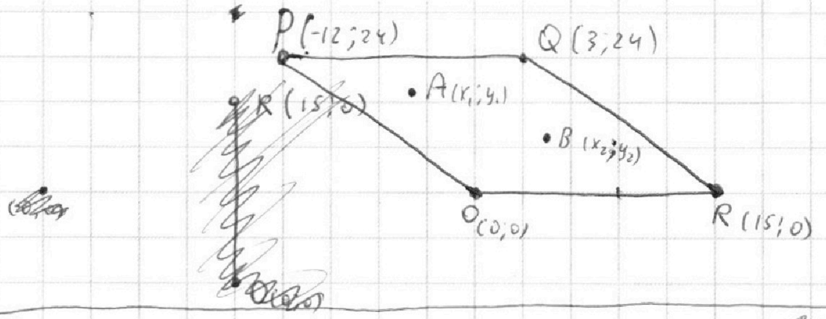
$a^4 - 2a^3+a^2 = 4b^2+4ab$ $\quad -24,5b+38,5$

$10a$

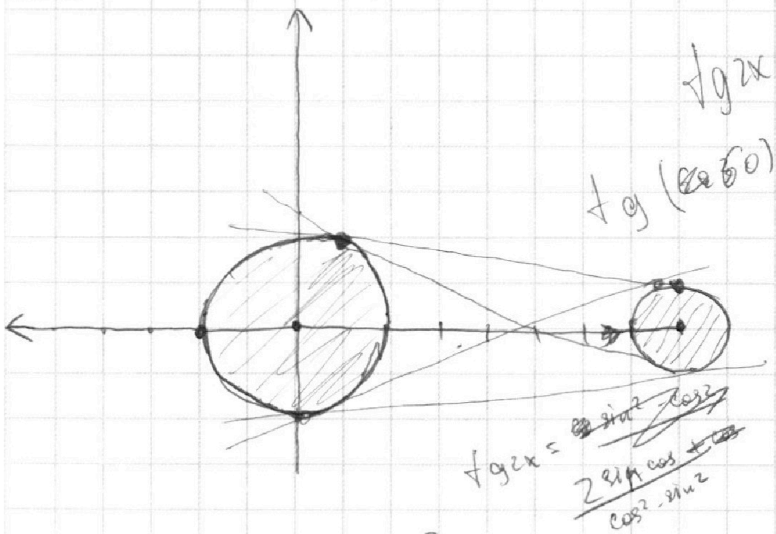
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$



$\operatorname{tg} 2x = \dfrac{1}{\ldots}$

$\operatorname{tg}(\ldots 60) = \dfrac{1 - 1/3}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt3}} = \dfrac{2/3}{2/\sqrt3} = \dfrac{1/3}{1/\sqrt3}$

$\dfrac{\sqrt3}{3}$

$\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \sin \cos}{\cos^2 - \sin^2}$

$\dfrac{b}{R - \frac{9}{2}} = \operatorname{tg}(2\beta)$

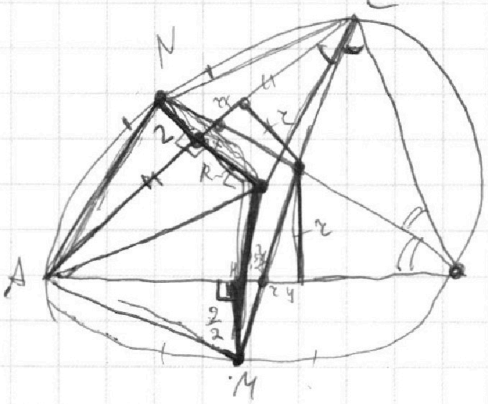
$\dfrac{b}{R - \frac{9}{2}} = \dfrac{2 \cdot \frac{9}{2b}}{1 - \frac{81}{4b^2}}$

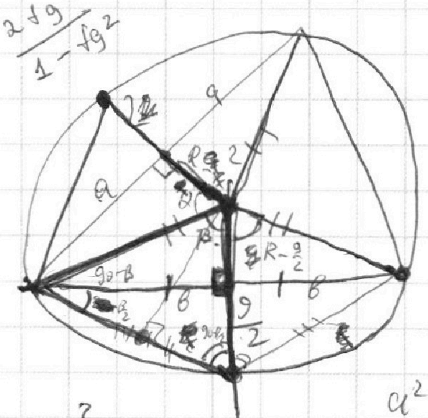
$\dfrac{9}{2} / b = \operatorname{tg}\beta$

$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{a}{R} \\ \sin\beta = \dfrac{b}{R} \end{cases}$

$\dfrac{2\operatorname{tg}}{1 - \operatorname{tg}^2}$

$\dfrac{180 - \beta}{2}$





$b \cdot R =$

$a^2 + x^2 = 9^2 + b^2$

$b\left(1 - \dfrac{81}{4b^2}\right) = \left(R - \dfrac{9}{2}\right)\left(\dfrac{18}{2b}\right)$

$\underbrace{(R-2)^2 + a^2} = \underbrace{\left(R - \dfrac{9}{2}\right)^2 + b^2}$

$R^2 - 4R + 4 + a^2 = R^2 - 9R + \dfrac{81}{4} + b^2$

$b^2 + \left(R - \dfrac{9}{2}\right)^2 = R^2$

$5R + 4 + a^2 = \dfrac{81}{4} + b^2$

$b^2 = \dfrac{81}{4} - 9R = \left(\dfrac{9}{2} - 3\sqrt{R}\right)\left(\dfrac{9}{2} + 3\sqrt{R}\right)$

$a^2 + (R-2)^2 = R^2$

$a^2 - 4R + 4 = 0$

$\boxed{a^2 = 4 - 4R} = (2 - 2\sqrt{R})(2 + 2\sqrt{R})$