



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### ЗАДАЧА N1

$$a, b, c : 2^{20} \cdot 7^{37} \Rightarrow abc : 7^{37}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^{x_1} \cdot 7^{y_1} & (x_1, y_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \\ b &= 2^{y_2} \cdot 7^{z_2} & (y_2, z_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \\ c &= 2^{z_1} \cdot 7^{z_2} & (z_1, z_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \end{aligned}$$

заметим, что **минимальные** показатели в кратном разложении **каждого** из  $a, b, c$  **не могут** быть  $7^{37}$  **и**  $2^{20}$  **одновременно** (т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ ), а они не будут **каждым** из  $2^{20}$  **и**  $7^{37}$ , а **каждый** из них **выступит** **этим** **показателем**, но это никак не повлияет на **выполнение** **условия**, а **просто** **уменьшит** **каждый** **показатель** **(а** **таким** **образом** **каждый** **показатель** **уменьшится)**

$$\begin{cases} x_1 + y_1 \geq 14 \\ y_1 + z_1 \geq 17 \\ z_1 + x_1 \geq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 \geq 51 \end{cases} \Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 \geq \frac{51}{2} \Rightarrow 26$$

$$\Rightarrow \lceil \frac{51}{2} \rceil = 26$$

т.о. **каждый** **из** **возможных** **произведений** **будет** **делиться** **на**  $7^{26}$  **и** **на**  $2^{26}$ , а **значит** **каждое** **будет** **не** **меньше**  $7^{26} \cdot 2^{26}$

пример **какого**:

$$\begin{aligned} a &= 7^{10} \cdot 2^8 & ab &= 2^{17} \cdot 7^{10} : 2^{17} \cdot 7^{10} \\ b &= 2^6 \cdot 7^6 & bc &= 2^{18} \cdot 7^{12} : 2^{17} \cdot 7^{17} \\ c &= 7^{27} \cdot 2^{12} & ac &= 2^{20} \cdot 7^{37} : 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

т.о. **каждый** **произв.** **будет**  $2^{26} \cdot 7^{26}$   
**Ответ:**  $2^{26} \cdot 7^{26}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### ЗАДАЧА №2

$\frac{a}{b}$  несократима  $\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$   
 ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ )

Заметим, что  $\text{НОД}(a+b, a) = \text{НОД}(a+b, b) = 1$

т.к. гон-во от кром:

$\exists \alpha: \text{НОД}(a+b, a) = \alpha \Rightarrow a+b - a \vdots \alpha \Rightarrow b \vdots \alpha$   
 $a+b \vdots \alpha$

$\Rightarrow$  но  $\text{НОД}(a, b) = 1, a \begin{cases} a \vdots \alpha \\ b \vdots \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1$  ( $\alpha \in \mathbb{N}, \alpha > 1$ )

?!:

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2 - 8ab}$$

(НОД)<sup>2</sup>  $\vdots$  (НОД)  $\vdots$  (НОД)  $\vdots$  (НОД)

$\exists$  этот гон-во сократима на  $\alpha \in \mathbb{N}$ , тогда

$\begin{cases} a+b \vdots \alpha \\ (a+b)^2 - 8ab \vdots \alpha \end{cases} \Rightarrow 8ab \vdots \alpha$

т.о.  $\begin{cases} a+b \vdots \alpha \\ 8ab \vdots \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha \cdot 8 \vdots \alpha \Rightarrow \alpha \leq 8$

пример, где  $m=8$

~~$a=8^{100}, b=3, a+b=8^{100}+3, a^2-6ab+b^2=(8^{100}-3)^2-6(8^{100}-3)+3^2$~~

сокр. т.к.  $8^{100}-3 \not\vdots 3$  ( $3 \vdots 3, 8^{100} \not\vdots 3$ )

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{8^{100} - 3 + 3}{(8^{100} - 3)^2 - 6(8^{100} - 3) + 3^2} = \frac{8^{100} \vdots 8}{(8^{100})^2 - 8 \cdot (8^{100} - 3)}$$

можно сокр. на 8

Ответ: при  $m=8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

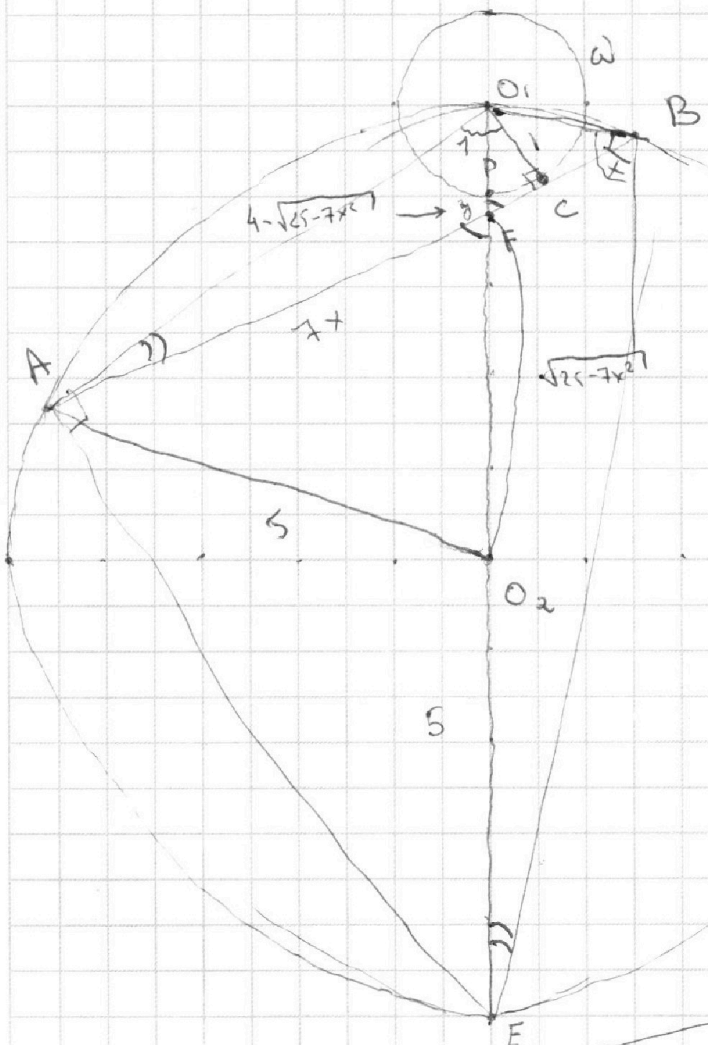
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### ЗАДАЧА №3



$$AC : CB = 7$$

$$\begin{cases} AC = 7x \\ CB = x \end{cases}$$

$$DF = y$$

по теор. о секущих:

$$7x \cdot x = (OD + y) \cdot (OD - y)$$

$$\cdot (ED - y) \cdot (ED + y)$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 = (1 + y) \cdot (9 - y)$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 = 9 + 8y - y^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 8y - (9 - 7x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot (9 - 7x^2)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \pm \sqrt{25 - 7x^2}$$

$$\Leftrightarrow y = 4 - \sqrt{25 - 7x^2}$$

(из условия  $y < 4$  и  $OD + y < 5$ )

(DF выг-ен мк. ссм AB ⊥ EO1, но AD = AB) D = C и AE = AB)

$$FC \text{ по теор. мк.} = \sqrt{\left(\frac{7x + \sqrt{25 - 7x^2}}{2}\right)^2 - 1} = FC = \sqrt{\left(\frac{7x + \sqrt{25 - 7x^2}}{2}\right)^2 - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{49x^2 + 25 - 7x^2 - 4}{4}} = \sqrt{\frac{42x^2 + 21}{4}} = \frac{\sqrt{21(2x^2 + 1)}}{2}$$

$\angle EAO_1 = \angle EBO_1$  (опис. кр. дуги, бисс.)  
 $\angle O_1EB = \angle O_1AB$  (опис. кр. дуги, бисс.)  
 $\triangle AOC \sim \triangle O_1BE$  (по двум углам и радиусам)

по теор. о хордах:  $\sqrt{AC} \cdot \sqrt{CB} = 1 \Rightarrow AC \cdot CB = 1$

FC не выг-ен мк.  $\triangle O_1CF$   
 $(7x + FC) \cdot (x - FC) = 1 \Leftrightarrow 7x^2 - 7x \cdot FC + FC^2 - FC^2 = 1 \Leftrightarrow 7x^2 - 7x \cdot FC = 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$$

$$x \leq 1$$

$$2x^2-2x+1 \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-5x+3} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1} \quad \text{орз}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5x+3 = 1 + 2x^2+2x+1 - 2\sqrt{2x^2+2x+1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7x+2 = 2\sqrt{2x^2+2x+1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49x^2+4-28x = 4 \cdot (2x^2+2x+1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41x^2-36x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{36}{41} \end{cases}$$

$$\text{орз: } \begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \\ 2x^2+2x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot (2x-3) \geq 0 \\ 2 \cdot (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus (1; \frac{3}{2})$$

$$\text{Ответ: } \left\{ 0; \frac{2}{7}; \frac{36}{41} \right\} \quad \text{проверим корни:}$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{1} = 2 - 0 = \text{комб}$$

$$\sqrt{2 \cdot \left(\frac{36}{41}\right)^2 - 5 \cdot \frac{36}{41} + 3} + \sqrt{2 \cdot \left(\frac{36}{41}\right)^2 + 2 \cdot \frac{36}{41} + 1} = 1 \quad \text{комб}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2}{7} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### ЗАДАЧА N 4

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 3 &\Leftrightarrow a \\ 2x^2 + 2x + 1 &\Leftrightarrow b \end{aligned} \quad (*)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \quad (***)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \quad (***) \quad \text{сл. чл. н.ч.}$$

~~Заметим, что кр. о.п.з.  $\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \end{cases}$~~

~~о.п.з.~~

~~$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$~~

~~$$\begin{cases} 2 \cdot (x-1) \cdot (x - \frac{3}{2}) \geq 0 \\ 2 \cdot ((x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus (1; \frac{3}{2})$$~~

~~о.п.з.~~

~~$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 + 2x + 1)} = 1 \quad (***)$$~~

~~$$\Leftrightarrow 4x^2 - 3x + 4 = -2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 + 2x + 1)} \quad (***)$$~~

~~$$\Leftrightarrow (4x^2 - 3x + 4)^2 = 4 \cdot (2x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 + 2x + 1) \quad (***)$$~~

~~$$\Leftrightarrow 16x^4 + 9x^2 - 9 - 18x + 24x^2 - 24x^3 = 16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12$$~~

~~$$\Leftrightarrow 33x^3 + 15x^2 - 22x - 41x^2 - 22x - 3 \Leftrightarrow$$~~

~~$$\Leftrightarrow x = \frac{22 \pm \sqrt{22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41}}{82} \quad \Leftrightarrow x = \frac{22 \pm \sqrt{976}}{82}$$~~

~~Углубим  $2x^2 - 5x + 3$  - парабола с ветв. вверх, укажем мин. значение в вершине.~~

~~$$\text{если } x > \frac{3}{2}, \text{ то } \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} > \sqrt{2x^2 + 2x + 1} > \sqrt{2(\frac{3}{2})^2 + 2 + 1} > 1$$~~

~~если  $x \leq 1$ , то сл. чл. н.ч. н.ч.~~

② если  $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 7x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$   $\frac{2}{7}$  - корень ур-ния (онк. о.п.з.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7  
                 

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### ЗАДАЧА N5

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12 \Leftrightarrow 2 \cdot (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$$

①  ~~$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) = (15 - (-12)) = 27$~~

т.д.  $(x_2 - x_1) \in [-27; 27] \Rightarrow 2 \cdot (x_2 - x_1) \in [-54; 54]$  число делится на 2

$$(y_2 - y_1) \in [-24; 24]$$

вариант:	$2 \cdot (x_2 - x_1)$	$y_2 - y_1$	$x_2 - x_1$
	-12	24	-6
	-10	22	-5
	-8	20	-4
			⋮
	36	-24	18

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

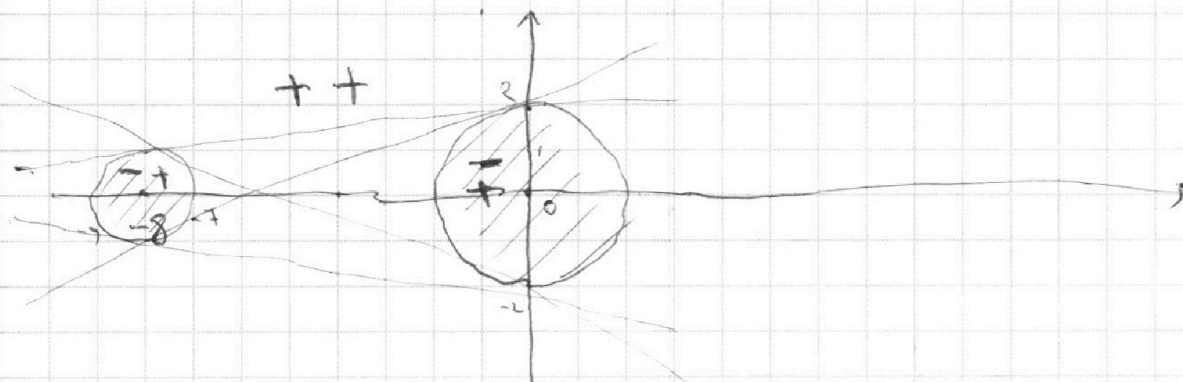
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### ЗАДАЧА 6



$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$  - окружность центр:  $(-8; 0)$   $R = 1$

$x^2 + y^2 - 4 = 0$  - окружность центр:  $(0; 0)$   $R = 2$

неравенство  $((x+8)^2 + y^2 - 1) \cdot (x^2 + y^2 - 4) \leq 0$  означает

то окружности на границе окружностей

или так как шарик от одной будет кругом.

напомню - и окружность, и от обеих центров. и напомню

если уравнение имеет единственный ответ  
только 2 решения  $\Rightarrow ax - y + 10b = 0$  - касательная для обеих окружностей

$ax - y + 10b = 0 \Leftrightarrow y = ax + 10b$

~~$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 16x + 64 + y^2 - 1 = x^2 + y^2 - 4$~~

~~$\Leftrightarrow 16x = -68 \Leftrightarrow x = -\frac{68}{16} = -\frac{17}{4}$~~

$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$

$x^2 + y^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 16x + 64 + y^2 - 1 = x^2 + y^2 - 4$

$\Leftrightarrow 16x = -67 \Leftrightarrow x = -\frac{67}{16}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



касательная к окружности всего параболы а касательная  
к, как и 4 касательных

касательных для левой параболы

$$\left. \begin{array}{l} y = cx + d \\ (x+8)^2 + y^2 - 14 = 1 \end{array} \right\}$$

или-то для параболы:

$$\left. \begin{array}{l} y = Ex + F \\ x^2 + y^2 = 4 \end{array} \right\}$$

и имеют пересечение, когда  $c = E, F = d$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y^2 - 8y - (9 - 7x^2) = 0$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot (9 - 7x^2)}}{2} = 4 \pm \sqrt{16 + 9 - 7x^2} =$$

$$= 4 \pm \sqrt{25 - 7x^2}$$

⚠  $\sqrt{a^2} = |a|$

$$y = 4 - \sqrt{25 - 7x^2} \quad \text{из условия}$$

$$4 - \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

5x = 2 \* a \* b  
b = 5 / (2 \* a)

$$\sqrt{\left(\sqrt{2}x - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 > 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{15}{2} + \frac{6}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} (x-1) \cdot (x-2) > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{2} - \frac{15}{2}$$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$   
" "  
 $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (a - b) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 1$   
 $a + b + 2\sqrt{ab} = 1$

$$2x^2 + 2x + 1 > 0$$

$$-2 \pm \sqrt{4 - 8}$$

$$2 \cdot \left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)$$

$$\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = (2 - 7x) + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = (2 - 7x)^2 + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 2 \cdot (2 - 7x)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 - (2 - 7x)^2 - 2x^2 - 2x - 1 = (4 - 14x) \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$(x-1) \cdot (2x-3) = 2x^2 - 2x - 3x + 3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7



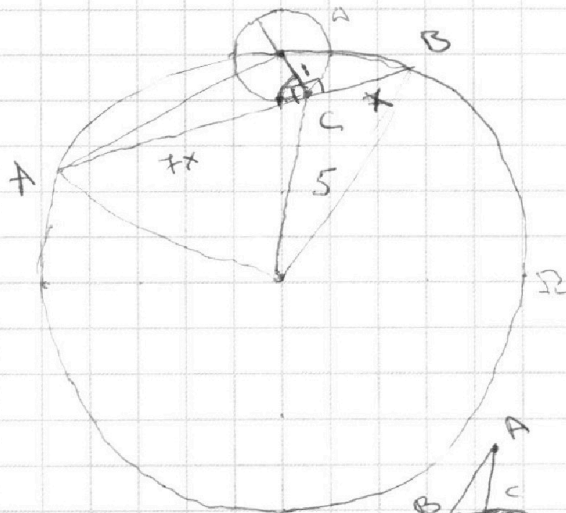
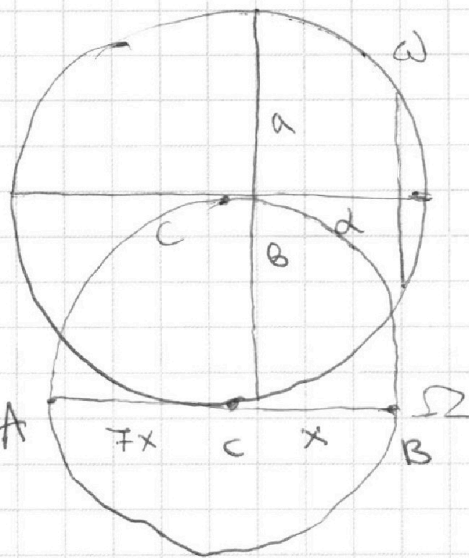
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



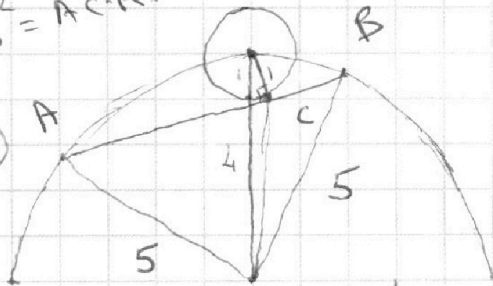
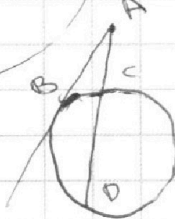
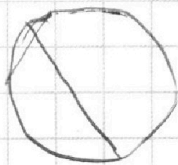
3



$$\left. \begin{array}{l} 4-3 \quad 12 \\ 5-5 \quad 15 \\ 6 \quad 6 \end{array} \right\} 33$$

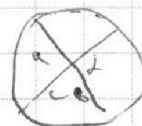


$$AB^2 = AC \cdot AD$$



$$ab = cd$$

$$y^2 - 8y - 9 + 7x^2 = 0$$



$$7x \cdot x = (9 - y) \cdot (1 + y)$$

$$7x^2 = 9 + 8y - y^2$$

$$y^2 - 8y - 9 + 7x^2 = 0$$

$$y = 8 \pm \sqrt{64 - 4(7x^2 - 9)}$$

$$\left( 5 - \sqrt{25 - 7x^2} \right) \cdot \left( -\sqrt{25 - 7x^2} \right) = 7x^2$$

$$-5\sqrt{25 - 7x^2} + 25 - 7x^2 = 7x^2$$

$$14x^2 = 25 - 5\sqrt{25 - 7x^2}$$

$$y = 8 - \sqrt{64 - 4(7x^2 - 9)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}, \quad bc: 2^{17} \cdot 7^{17}, \quad ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\min(a \cdot b \cdot c) = ?$$

$$\forall k, l \in \mathbb{N} \quad kl \geq m \Rightarrow kl \geq m$$

$$\min(a \cdot b) = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$\min(b \cdot c) = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$\min(ac) = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\Rightarrow \min((a \cdot b) \cdot (b \cdot c) \cdot (a \cdot c)) = 2^{14+17+20} \cdot 7^{10+17+37} =$$

$$= 2^{51} \cdot 7^{64} \Rightarrow \min(a$$

$$x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{N} \quad x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{N}$$

$$a = 2^{x_1} \cdot 7^{y_1} \cdot 7^{z_1}$$

$$b = 2^{x_2} \cdot 7^{y_2} \cdot 7^{z_2}$$

$$c = 2^{x_3} \cdot 7^{y_3} \cdot 7^{z_3}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 14 \\ x_2 + y_2 = 10 \\ y_1 + z_1 = 17 \\ y_2 + z_2 = 17 \\ x_1 + z_1 = 20 \\ x_2 + z_2 = 37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 14 \\ x_1 - y_1 = 20 - 17 \\ x_2 + y_2 = 10 \\ x_2 - y_2 = 37 - 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 14 + 3 \\ 2x_2 = 10 + 20 \\ x_1 + z_1 = 20 \\ x_1 + y_1 = 14 \\ x_2 + z_2 = 37 \\ x_2 + y_2 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 8,5 \\ x_2 = 15 \\ z_1 = 11,5 \\ y_1 = 5,5 \\ z_2 = 22 \\ y_2 = -5 \end{cases}$$

$$\frac{10 + 17 + 37}{2} = 32$$

$$x_1 + y_1 + z_1 = 26$$

$$x_2 + y_2 + z_2 = 32$$

$$\min((abc)^2) > 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 15 \\ x_2 + y_2 = 10 \\ y_1 + z_1 = 17 \\ y_2 + z_2 = 17 \\ x_1 + z_1 = 21 \\ x_2 + z_2 = 37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - z_1 = -2 \\ x_1 + z_1 = 21 \end{cases}$$

$$a + b \geq 14$$

$$b + c \geq 17$$

$$a + c \geq 20$$

$$ab \geq 2^{14}$$

$$ac \geq 2^{20}$$

$$bc \geq 2^{17}$$

$$2(a+b+c) \geq 51$$

$$ac \geq 7^{20}$$

$$abc \geq 7^{37} \cdot 2^{20}$$

$$a, b, c \in \mathbb{N}_0$$

$$a + b + c \geq 26$$

$$a = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$b = 1$$

$$c = 2^{17} \cdot 7^{37}$$

$$a = 2 \cdot 7^{17}$$

$$b = 2 \cdot 7^5$$

$$c =$$

$$a = 2^{17} \cdot 7^{19}$$

$$b = 1$$

$$c = 7^3 \cdot 8$$

$$a = 7^{10} \cdot 2^3$$

$$c = 7^{17} \cdot 2^3$$

$$b = 2^6$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2.  $\frac{a}{b}$  - несократ. ( $a, b \in \mathbb{N}$ )

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

max m :  $\begin{cases} a+b \equiv m \\ a^2-6ab+b^2 \equiv m \end{cases}$

$$2 \cdot ((x-1,25)^2 - 0,625)$$

$\frac{a}{b}$  - не сократ  $\Rightarrow$  НОД( $a, b$ ) = 1  $2 \cdot (x^2 - 2,5x + 1,25 - 0,625)$

$$\frac{(a+b)}{(a^2-6ab+b^2)} = \frac{(a+b)}{(a-b)^2 - 4ab} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2 - 8ab} \Rightarrow 8ab \equiv m$$

$$\frac{3}{7}$$

~~$$\frac{3+7}{3^2-6 \cdot 3 \cdot 7+7^2} = \frac{10}{9-49} = \frac{10}{-40} = -\frac{1}{4}$$~~

~~$$\frac{2}{3}$$~~

~~$$\frac{2+3}{2^2-6 \cdot 2 \cdot 3+3^2} = \frac{5}{4-36} = \frac{5}{-32}$$~~

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{m}{m}$$

$$\begin{cases} a \equiv m \\ b \equiv m \end{cases} \text{ - не верно}$$

$$m = (a+b)$$

~~$$\frac{20}{21}$$~~

~~$$499 = 50 \cdot 9 - 9$$~~

~~$$\frac{3+5}{3^2-6 \cdot 3 \cdot 5+5^2} = \frac{8}{9-90} = \frac{8}{-81}$$~~

$$\frac{100+99}{100^2-6 \cdot 100 \cdot 99-6} = \frac{199}{199^2-8 \cdot 100 \cdot 99}$$

~~$$\frac{41}{400+441} = \frac{41}{841}$$~~

~~$$8100 - 3 \cdot 3$$~~

~~$$\frac{100}{101} = \frac{100}{101}$$~~

$$\frac{100+99}{100^2-6 \cdot 100 \cdot 99-6} = \frac{199}{199^2-8 \cdot 100 \cdot 99}$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{m}{m}$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{m}{m}$$

~~$$\frac{201}{100^2-6 \cdot 100 \cdot 101} = \frac{201}{100^2-6 \cdot 100 \cdot 101}$$~~

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{m}{m}$$

$$\frac{3}{13}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2 \cdot (x^2 - 2,5x + 1,5) = 2 \cdot ((x-1,25)^2 - 0,625)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2+2x+1} + \sqrt{2x^2-5x+3} = \frac{b}{2a} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{3}{2} : \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+3+1} + \sqrt{\dots}$$

$$3x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 5x + 3 = -0,125$$

$x \in (-\infty; 1]$

$(x-1) \cdot (x-\frac{3}{2})$

но не

$\frac{2}{2} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

Верши:  $(1,25; -0,125)$     Верши:  $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

$\frac{10}{7} = \frac{2}{7}$   
 $\frac{2}{7} \cdot 5 + 3$

go 1,25

$\frac{2}{7} \cdot 2 + 1 = \frac{4}{7} + 1 = \frac{11}{7}$

am 1,25 go

$7x = 2$

$x = 3,5$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \Leftrightarrow$

$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$   
 $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$

$2 \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{35}{2} + 3 = \frac{49}{2} - \frac{35}{2} + \frac{6}{2} = \frac{10}{2}$

$2 \sqrt{\frac{49}{2} + \frac{6}{2}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(4x^2 - 3x + 3) \cdot (4x^2 - 3x + 3) =$$

$$= 16x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 12x^3 + 9x^2 - 9x + 12x^2 - 9x + 9 =$$

$$= 16x^4 + 9x^2 + 9 - 18x + 24x^2 - 24x^3$$

$$(2x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 + 2x + 1) =$$

$$= 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3 =$$

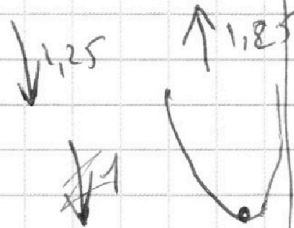
$$= 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 6x + 3$$

$$22 + 12 \cdot 41$$

$$2 \cdot (x^2 - 2,5x + 3)$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 12 \\ \hline 82 \\ 41 \\ \hline 492 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 1484 \\ \times 492 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$976 = 2$$

$$\begin{array}{r} 976 \overline{) 244} \\ \underline{-8} \\ 17 \\ \underline{-16} \\ 16 \end{array}$$

$$4 \cdot 244 = 122$$

$$12$$

$$\begin{array}{r} 244 \\ \times 4 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$4 \cdot 4 \cdot 3 = 61,2$$

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times 96 \\ \hline 366 \\ 549 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$960 - 96 \cdot 60 + 96$$

121

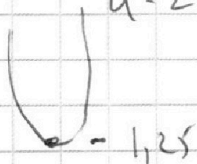
$$976$$

$$244 = 2 \cdot 122$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 3 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$-\frac{D}{4a}$$

$$-\frac{1}{8}$$



$$4 \cdot 2 \cdot 122 = 4 \cdot 4 \cdot 61$$

$$\sqrt{1,25} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{25 - 4 \cdot 2 \cdot 3}{8}$$

$$-0,125$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$x \leq 1$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow 2x \cdot (x+1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$x \in [0; 1]$$

$$(1, 25, -0, 125)$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\uparrow \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$$

$$\uparrow (-\infty, 1, 25)$$

$$x \in [-1, 0]$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$(x+3)^2 - 8^2 - 1 \cdot (x^2 + y^2 - 4)$$

$$\begin{matrix} \text{пусть } 1 \\ -4, 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{пусть } 2 \\ 0, 0. \end{matrix}$$

$$x \in [-1, 0]$$

$$2x^2 - 5x + 3 = \left(1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}\right)^2$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{36 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$-7x + 2 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\sqrt{31} - \sqrt{1} = 2$$

$$x \cdot (41x - 36) = 0$$

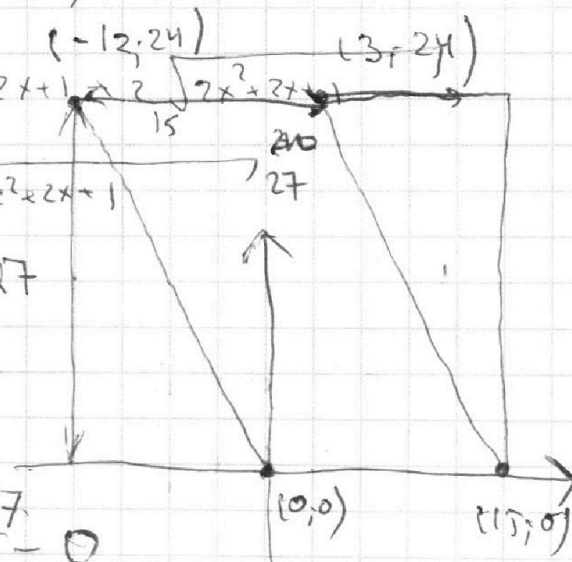
$$x = \frac{36}{41}$$

$$\begin{matrix} 27 \\ 27 - 0 \\ 24 - 0 \end{matrix}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2 \cdot (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$\begin{matrix} y_2 = y_1 \\ x_2 - x_1 = 6 \end{matrix}$$



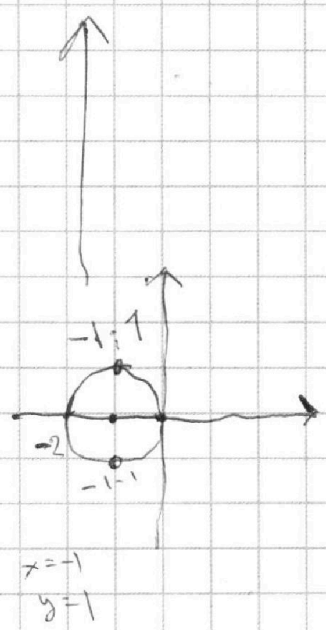
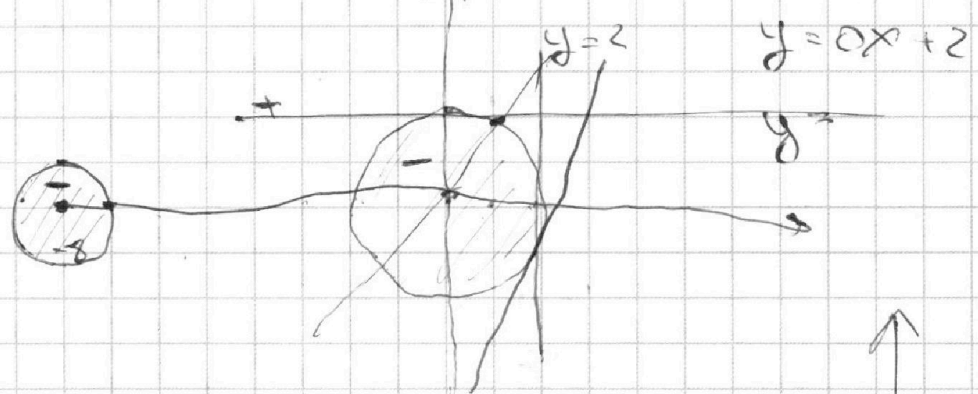
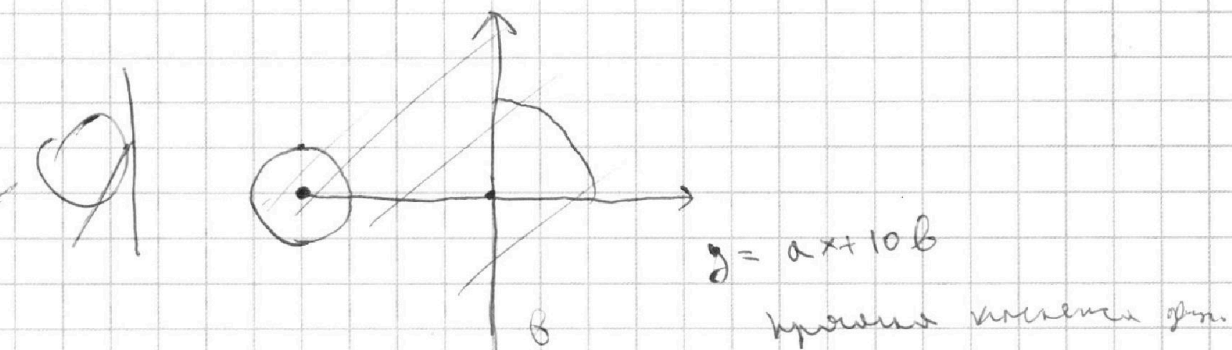
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



касание 1

$$\left. \begin{aligned} & y = cx + d \\ & (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{aligned} \right\} (*)$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$