



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{16}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 7^{14}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37} \Rightarrow ac \cdot bc: 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot 2^{14} \cdot 7^{14} \neq 2^{34} \cdot 7^{51}$$

Пусть $a = 2^\alpha \cdot k$, где $k \not\equiv 2$

$$b = 2^\beta \cdot l, \text{ где } l \not\equiv 2$$

$$c = 2^\gamma \cdot m, \text{ где } m \not\equiv 2$$

$$ab: 2^{14}$$

$$2^{\alpha+\beta} \cdot kl: 2^{14} \Rightarrow \alpha + \beta \geq 14 \quad (1)$$

$$bc: 2^{14} \Rightarrow$$

$$2^{\beta+\gamma} \cdot lm: 2^{14} \Rightarrow \beta + \gamma \geq 14 \quad (2)$$

$$ac: 2^{20}$$

$$2^{\alpha+\gamma} \cdot km: 2^{20} \Rightarrow \alpha + \gamma \geq 20 \quad (3)$$

$$(1)+(2)+(3): 2\alpha + 2\beta + 2\gamma \geq 51$$

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 25,5, \text{ но } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}, \text{ значит}$$

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 26$$

$$abc = 2^{\alpha+\beta+\gamma} \cdot klm, \text{ т.к. } \alpha + \beta + \gamma \geq 26, \text{ то } abc: 2^{26}$$

$$ac: 7^{37} \Rightarrow abc: 7^{37}, \text{ т.к. } \text{НОД}(7^{37}, 2^{26}) = 1, \text{ то}$$

$$abc: 2^{26} \cdot 7^{37} \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пример на $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

$$a = 2^8 \cdot 7^{10}$$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10} : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$b = 2^6$$

$$bc = 2^{18} \cdot 7^{24} : 2^{14} \cdot 7^{14}$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{27}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Ответ: минимальное значение $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2.

Введем обозначение: $(a, b) = \text{НОД}(a, b)$

Т.к. $\frac{a}{b}$ - несократима, то $(a, b) = 1$. Если

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ - сократима на m , то $a+b : m$ и $a^2-6ab+b^2 : m$, но

$a^2-6ab+b^2 = (a+b)^2 - 8ab$, т.к. $a+b : m$ и

$a^2-6ab+b^2 : m$, то $8ab : m$. Пусть $(a, m) = q$,

и тогда $b \not\vdash q$, если $q \neq 1$, т.к. $(a, b) = 1$, но

$a+b : q$, т.к. $a+b : m$, а $m : q$, то $a : q$, а $b \not\vdash q$,

значит $q = 1$, значит $(a, m) = 1$, аналогично

но $(b, m) = 1$. Т.к. $8ab : m$, и $(a, m) = (b, m) = 1$,

то $8 : m \Rightarrow m \leq 8$

Пример на $m = 8$: $a = 5$ $b = 3$ $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$ - несократима

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{5+3}{5^2-6 \cdot 5 \cdot 3+3^2} = \frac{8}{-56} \text{ - сократима}$$

на $m = 8$, т.к. $8 : 8$ и $-56 : 8$.

Ответ: при $m = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

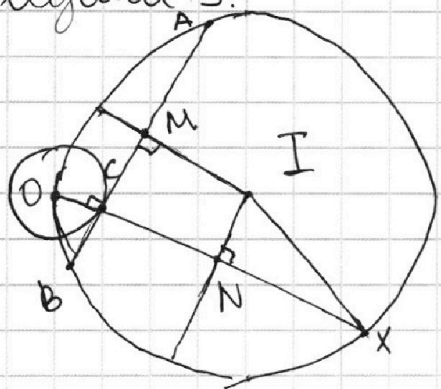
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3.



Пусть I - центр Ω , а

O - центр ω . $BC = x$, тогда $AC = 4x$.

$\perp OC \perp AB$ - радиусе в точку касания

Продлим до второго

пересечения с ω Ω в точке X ,
тогда $OC \cdot CX = AC \cdot CB$, так $OC = 1$, т.к.

это радиусе ω , тогда $CX = AC \cdot CB = 4x^2$.

Опустим перпендикуляры из I на AB и OX , пусть их основания M и N соответ-

-ственно. Так т.к. I - центр, то $MI \perp AB$

и M и N - середины AB и OX .

$$MC = MB - BC = \frac{AB}{2} - BC = \frac{8x}{2} - x = 3x.$$

$MICN$ - прямоугольник, так как \perp , т.к.

$$MI \perp CM$$

$$CN \perp CM$$

$$\left. \begin{array}{l} MI \perp CM \\ CN \perp CM \end{array} \right\} \Rightarrow MI \parallel CN$$

$$IN \perp CN$$

$$MC \perp CN$$

$$\left. \begin{array}{l} MI \perp CM \\ IN \perp CN \\ MC \perp CN \end{array} \right\} \Rightarrow MINC - \text{пря-} \\ \text{моугольник,} \\ \text{значит. Так}$$

$$IN = MC = 3x.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Delta INX (L INX = 90^\circ)$$

$$NX = \sqrt{IN^2 + IX^2} \text{ по теореме Пифагора.}$$

IX — радиус Ω , значит $IX = 5$.

$$NX = \sqrt{25 - 9x^2}$$

$$XOC = 2NX = 2\sqrt{25 - 9x^2}$$

$$XOE = OC + CX = 1 + 4x^2$$

$$2\sqrt{25 - 9x^2} = 1 + 4x^2 \quad t = x^2 \geq 0$$

$$2\sqrt{25 - t} = 1 + 4t (*)$$

$1 + 4t$ возрастает
 $2\sqrt{25 - t}$ убывает $\Rightarrow (*)$ — максимум
один корень.

$t = 1$ — корень, $x = \pm 1$ и он единственный
 $x^2 = 1$

$$x = 1$$

$x = -1$ не удовлетворяет условию задачи

$$x = 1.$$

$$AB = 8x = 8.$$

Ответ: $AB = 8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4.

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$a = 2 - 7x$$

$$b = 2x^2 + 2x + 1 = x^2 + (x+1)^2 > 0$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{b} = a \quad \sqrt{a+b} \geq \sqrt{b} \text{ при } a \geq 0$$

$$\sqrt{a+b} = a + \sqrt{b} \quad \sqrt{a+b} \leq \sqrt{b} \text{ при } a < 0, \text{ значит}$$

значим $\sqrt{a+b} - \sqrt{b}$ и a одного знака,

$$\text{тогда } \sqrt{a+b} - \sqrt{b} = a \Leftrightarrow (\sqrt{a+b} - \sqrt{b})^2 = a^2$$

$$a+b - 2\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{b} + b = a^2$$

$$2b - 2\sqrt{b} \cdot \sqrt{a+b} = a^2 - a$$

$$2\sqrt{b}(\sqrt{b} - \sqrt{a+b}) = a(a-1)$$

$$a \geq 0 \quad \sqrt{b} - \sqrt{a+b} \leq 0 \Rightarrow 2\sqrt{b}(\sqrt{b} - \sqrt{a+b}) \leq 0, a(a-1) \leq 0$$

значит при $a \geq 0$ $a \leq 1$

$$a \leq 0 \quad \sqrt{b} - \sqrt{a+b} \geq 0$$

$$\sqrt{a+b} = a + \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = a^2 + 2a\sqrt{b} + b \\ a + \sqrt{b} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 2a\sqrt{b} - a = 0 \\ a + \sqrt{b} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a + 2\sqrt{b} - 1) = 0 \\ a + \sqrt{b} \geq 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} a = 0 & (1) \\ a - 1 = 2\sqrt{b} & (2) \\ a + \sqrt{b} \geq 0 & (3) \end{cases}$$

(1) $a = 0$

$$2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$$

(2) $a - 1 = 2\sqrt{b}$

$$1 - 7x = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 7x \geq 0 & (2a) \\ 1 - 14x + 49x^2 = 4(2x^2 + 2x + 1) & (2b) \end{cases}$$

(2a) $1 - 7x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{7}$

(2b) $1 - 14x + 49x^2 = 8x^2 + 8x + 4$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (11)^2 - (-3) \cdot 41 = 121 + 123 = 244 = 4 \cdot 61$$

$$x_1 = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < \frac{1}{7} < 0 < \frac{1}{7}$$

$$x_2 = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} > \frac{11 + 2\sqrt{49}}{41} = \frac{11 + 2 \cdot 7}{41} = \frac{25}{41} > \frac{1}{7} \text{ не подходит}$$

(3) $a + \sqrt{b} \geq 0 \quad \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 7x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 2 \leq 0 & (3a) \\ \begin{cases} 7x - 2 \geq 0 & (3b) \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq (7x - 2)^2 & (3b) \end{cases} \end{cases}$

(3a) $7x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{7}$

(3b) $7x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{7}$

(3b) $2x^2 + 2x + 1 \geq 49x^2 - 28x + 4$

$$47x^2 - 30x + 3 \leq 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$47x^2 - 30x + 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (15)^2 - 3 \cdot 47 = 225 - 141 = 84$$

$$x_1 = \frac{15 + \sqrt{84}}{47}$$

$$x_2 = \frac{15 - \sqrt{84}}{47}$$

$$x \in \left[\frac{15 - \sqrt{84}}{47}; \frac{15 + \sqrt{84}}{47} \right]$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{2}{7} \\ x > \frac{2}{7} \\ x \in \left[\frac{15 - \sqrt{84}}{47}; \frac{15 + \sqrt{84}}{47} \right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2}{7} \\ x \in \left(\frac{2}{7}; \frac{15 + \sqrt{84}}{47} \right] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{15 + \sqrt{84}}{47} \right]$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \\ x \in \left(-\infty; \frac{15 + \sqrt{84}}{47} \right] \end{cases} \quad \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} > \frac{15 + \sqrt{84}}{47} > \frac{11 + 2\sqrt{49}}{41}$$
$$> \frac{11 + 14}{41} = \frac{25}{41} > \frac{25}{47} > \frac{15 + \sqrt{100}}{47}$$
$$> \frac{15 + \sqrt{84}}{47}, \text{ значит}$$

$$x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \text{ не подходит}$$

$$x = \frac{2}{7} \text{ подходит по } 0 \leq x < 1$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2}{7} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

Возьмем ^{с заданными координатами} какую-то точку $A(x_1, y_1)$, помним,
где лежат ~~все~~ точки $B(x_2, y_2)$,

$$\text{что } 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 0$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 0 \Rightarrow y_2 = -2x_2 + 12 + y_1 + 2x_1$$

Значит ~~все точки~~ ^{такие} все точки B

лежат на прямой $y = -2x + 12 + y_1 + 2x_1$,

возьмем точку на прямой $y = -2x + 12 + y_1 + 2x_1$,
~~эта прямая получается параметрически~~ ^(*)
~~и есть тогда~~ $B(x_2, -2x_2 + 12 + y_1 + 2x_1)$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 2x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 12 + y_1 + 2x_1 + y_1 = 12.$$

Значит любая точка с заданными координатами на прямой подходит.

Тогда если ~~$12 + y_1 + 2x_1$~~ y_1 y_2 у двух точек совпадают значения выражений

$12 + y_1 + 2x_1$, то им подойдут в пару оси

и те же точки, т.к. прямая $y = -2x +$

$+ 12 + y_1 + 2x_1$ будет для них одинакова.

$$12 + y_1 + 2x_1 = 12 + y_2 + 2x_2 \Rightarrow y_2 - y_1 = -2(x_2 - x_1)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

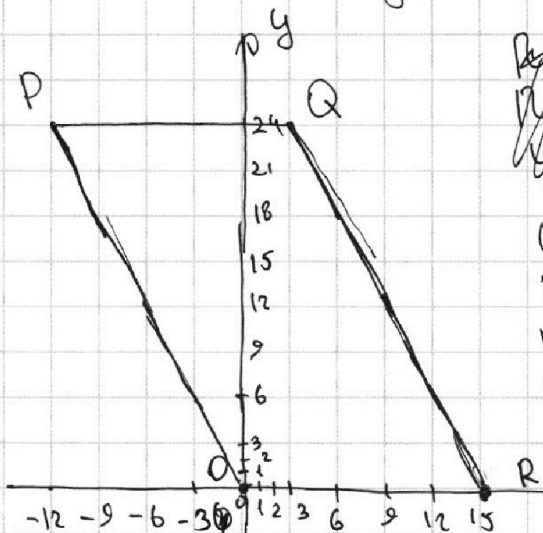
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Значит все такие точки лежат на
прямой с угловым коэффициентом -2 .



Для
прямых PQ и QR условие
углового коэффициента -2 .

(*) - эта прямая получается
параллельным переносом
прямой, с угловым коэф-
фициентом -2 , проходящей
через точку A , вправо на 6
единиц, т.к. это
прямая имеет уравнение

$$y = (-2 \cdot 6) - 2x + 2x + y_1 = -2(x - 6) + 12 + 2x + y_1.$$

Прямая $PO - y = -2x$, $QR - y = -2x + 30$

Возьмем отрезок PO , т.к. угловой
коэффициент прямой $PO - 2$, то все
с увеличением координат
точки на PO в пару подрадают ^{все} точки к

увеличив координаты на прямой

$y = -2x + 12$, в точке с увеличив коорди-
натами ^{в отрезках $PQRO$} на PO и на y по 12 , значит

возьмем пар между этими точками $13 \cdot 13 = 13^2$

Теперь подвигем прямую PO на единицу ^{вправо}

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

вместе с PO подвинется и прямая y , она
сдвинется также на 1 вправо, ~~отсюда на~~
~~каждой~~ на PO и на y также будет по
13 точек с целыми координатами, знач-
ит пар будет 13^2 . Продолжим сдвигать
 PO пока y не совпадет с QR . Если мы
продолжим сдвигать PO , то точки
подлежащие в пары будут вне $PQRO$,
значит дальше пар. не будет. Таким
образом мы пройдем по всем точкам
пары $PQRO$ с целыми координатами,
чтобы первоначальная прямая $y = -2x + 12$
перешла \leftarrow $QR - 2x + 30$ потребовалось
сдвинуть её вправо на 10 единиц, на
каждой шаге пар было 13^2 , значим
всего шагов было 10, значит пар
 $10 \cdot 13^2 = 1690$
Ответ: 1690 пар

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

Мы хотим найти при каких a и b y
этой системы ровно 2 решения и
тогда мы ответим на вопрос задачи

$$\begin{cases} y = ax + 10b \quad (2) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad (1) \end{cases}$$

$$(1) ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$

Чтобы у системы было
два решения, у данной
совокупности должно
быть два решения, при
 $y = ax + 10b$.

Каждая из систем в данной совокупности
имеет либо бесконечно много решений,
либо одно, либо none, тогда чтобы было
два решения у каждой из систем
должно быть по одному решению.

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases} - 1 \text{ решение}$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} - 1 \text{ решение}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

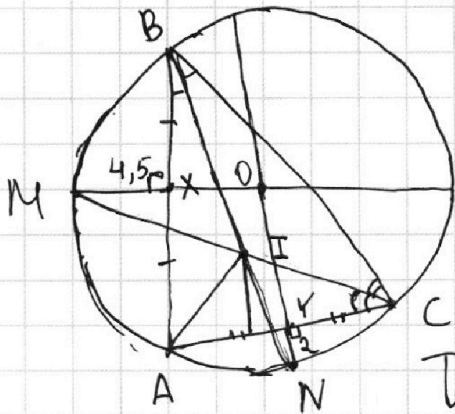
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7



Т.к. M и N - середины дуг AB и AC , то CM - биссектриса угла ACB , а BN - биссектриса угла ABC .

Тогда точка пересечения CM и BN - центр вписанной окружности треугольника ABC , обозначим её как I . Тогда нам надо найти расстояние AI .

M - середина дуги $\overset{AB}{\curvearrowright} \Rightarrow MA = MB$, значит M на серединном перпендикуляре к AB , тогда расстояние от M до AB - длины перпендикуляра из M на AB , пусть его основание X . Тогда $MX = 4,5$ и X - середина AB . Пусть Y - основание перпендикуляра из N на AC , тогда аналогично получаем $NY = 2$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Прямые MX и NY до пересечения, пусть
они пересекаются в точке O , т.к.

$MX \perp \overline{AB}$, $NY \perp \overline{AC}$, AB и NY — средние
перпендикуляры к хордам
окружности, описанной около ABC ,
то точка их пересечения — центр ^{этой}
окружности. Значит O — центр
окружности, описанной около ABC



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

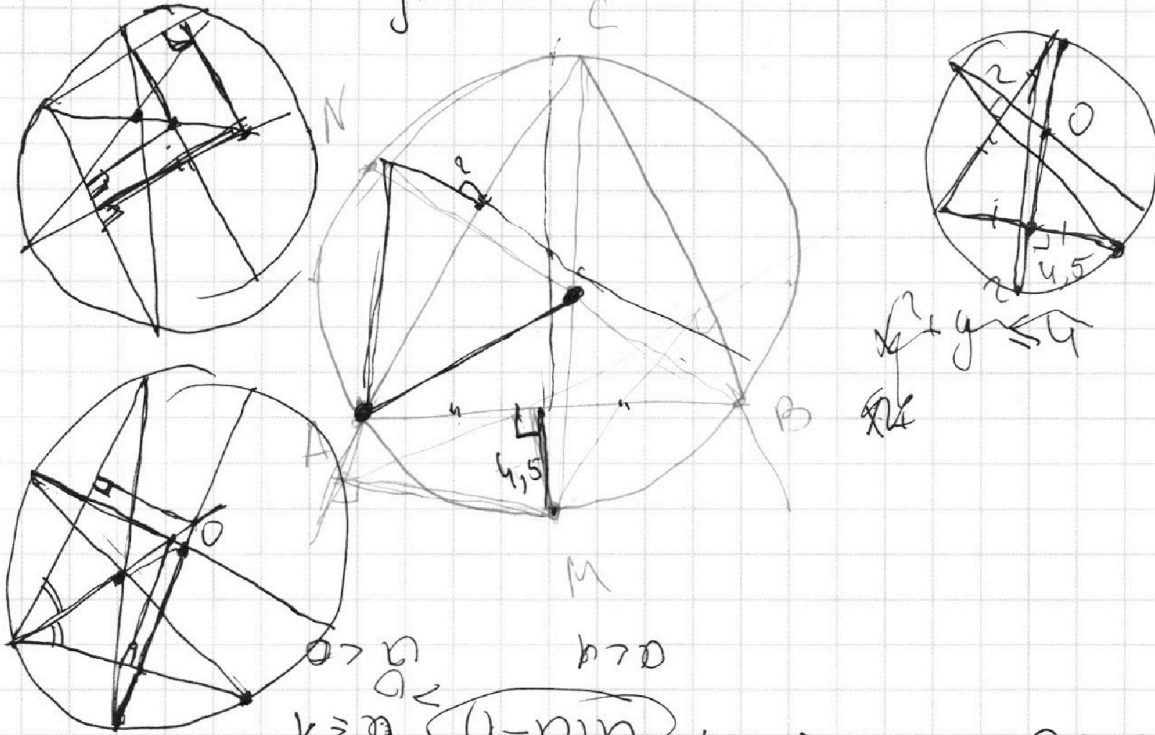
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Углов



$a > 0$
 $b > 0$
 $a > b$
 $a > 2$
 $a > 1$
 $a > 0$
 $a > 0$
 $a > 0$

$$2\sqrt{6} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{a+b}) = 2\sqrt{6} \cdot (1-a)(1-b)$$

$$a+b = a^2 + 2\sqrt{a+b} + 6 = 9 + 2\sqrt{a+b}$$

$$\sqrt{a+b} = a + \sqrt{6}$$

$$2\sqrt{6}(\sqrt{6} - \sqrt{a+b}) - 9 - 2\sqrt{a+b} = 11 - (a+b) - 9 - 2\sqrt{a+b}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{6} = a - \sqrt{6} + 2\sqrt{a+b}$$

$b > 0$
 $a > 0$
 $a > 1$
 $a > 0$
 $a > 0$
 $a > 0$

$$4\sqrt{6} = a - 2\sqrt{a+b}$$

$$a - 2\sqrt{a+b} = 4\sqrt{6}$$

$$a - 2\sqrt{a+b} = 4\sqrt{6}$$

$$a(a - 2\sqrt{a+b} - 4\sqrt{6}) = 0$$

$$a + 6 + \sqrt{a+b} = a^2 + 2\sqrt{a+b} + 6 + \sqrt{a+b}$$

$$a^2 - a + 2\sqrt{a+b} + 6 = 0$$

$$a + 6 + \sqrt{a+b} - 2\sqrt{a+b} = a^2$$



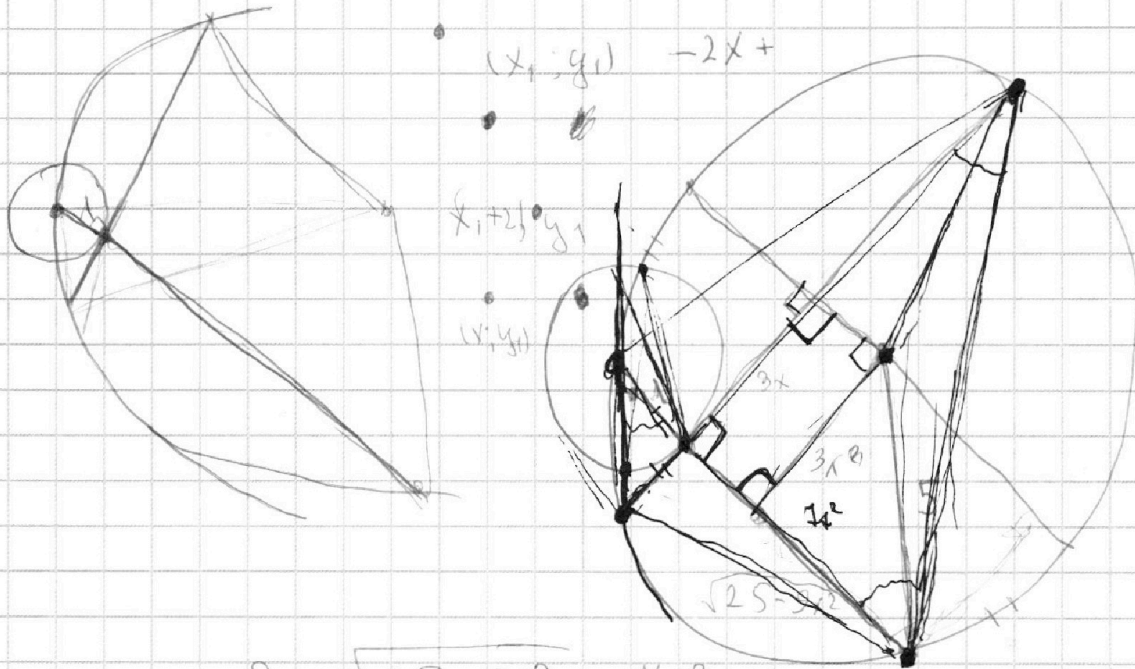
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2 \cdot \sqrt{25 - 9x^2} = 4x^2 + 1$$

$$2 \cdot \sqrt{25 - 9t} = 4t + 1 \quad t=1$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = -\frac{24}{24}x_1 = -x_1$$

$$4 \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$-12; 24$$

$$15; 0$$

$$ax + b$$

$$15a = -b$$

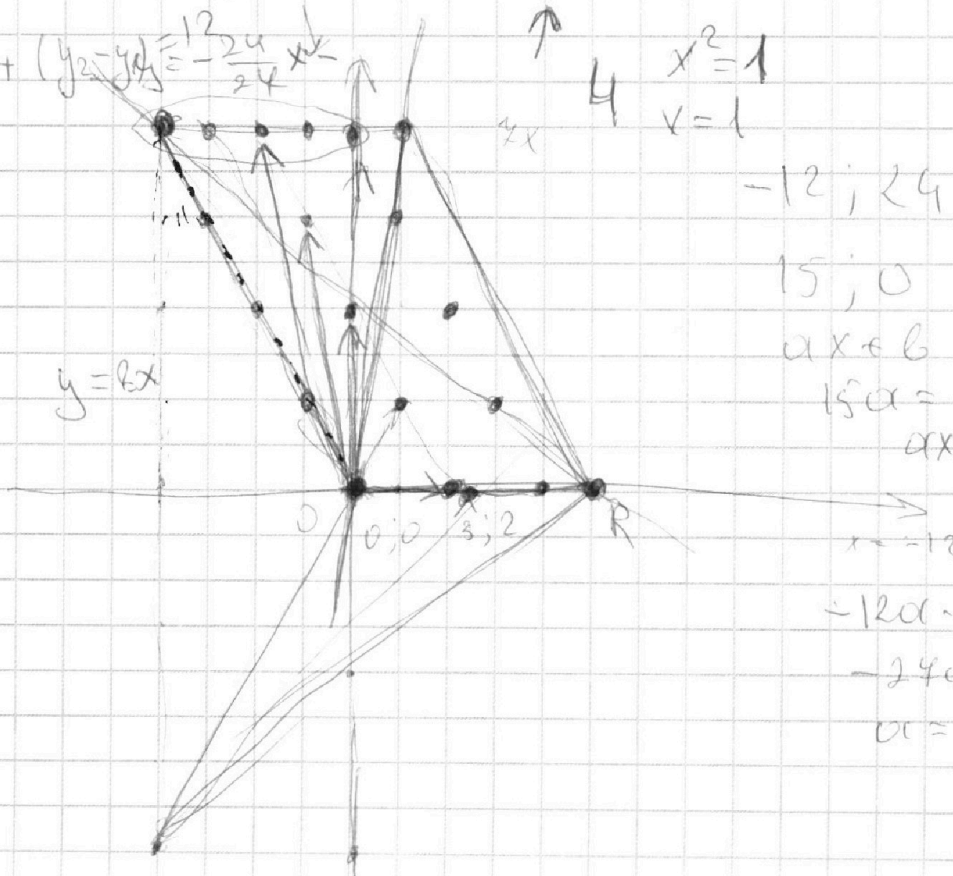
$$ax - 15a$$

$$x = -12$$

$$-12a - 15a = 24$$

$$-27a = 24$$

$$a = -\frac{24}{27}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

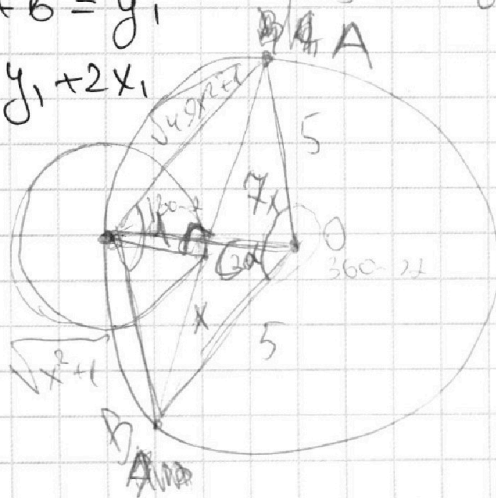


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$ $bc: 2^{14} \cdot 7^{17}$ $ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$
 $a^2 b^2 c^2: 2^{54} \cdot 7^{64}$ $a = 2^{10} \cdot 7^{37}$ $c = 2^{20}$
 $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{54} \cdot 7^{64}$ $2abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$ $2^{26} \cdot 7^{32}$ $c = 2^{12}$
 $(a, b) = 1$ $a + b = 2^{20} \cdot 7^{37}$ $a + b = 2^{14} \cdot 7^{17}$ $a = 2^6$
 $a + b: m$ $x + y \geq 14$ $x + y + z = 17$ $2x + 2y + 2z \geq 17$ $b = 2^6$
 $a^2 - 2ab + b^2: m$ $x + z \geq 20$ $x + z \geq 20$ $2x + 2y + 2z \geq 17$
 $= (a+b)^2 - 2ab =$
 $2ab: m$ $c = 1$ $a = 2^{14} \cdot 7^{14}$ $b = 2^{20} \cdot 7^{37}$
 $a + b: m$ q $(a, m) = 1 \Rightarrow (a, m) = q$
 $2ab: m$ $(a, m) = 1$ $(a, b) = 1 \Rightarrow b \nmid a$
 $8: m$ $(b, m) = 1$
 $m = 8$ $8 \geq m$ $5 \quad 3$ 8

$-2x_1 + b = y_1$
 $b = y_1 + 2x_1$



$\cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha$

$x_1 \quad y_1$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$y_2 = -2x_2 + 2 + 2x_1 + y_1$



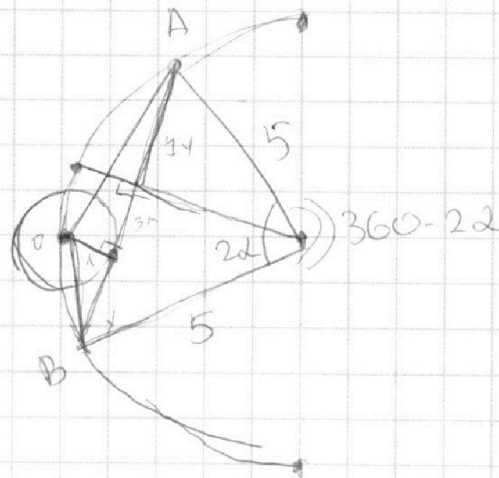
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} (x^2 + 1) + (49x^2 + 1) - 2 \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \sqrt{1 + x^2} \cdot \sqrt{49x^2 + 1} \\ = 50x^2 + 2 + 2 \cos \alpha \cdot \sqrt{1 + x^2} \cdot \sqrt{49x^2 + 1} \end{aligned}$$

$$50 + -2 \cdot \cos 2\alpha \cdot 25 = 50 \cdot (1 - \cos 2\alpha)$$

$$1 - 2 \cos^2 \alpha \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \frac{2 - 4x}{a} \quad \begin{matrix} a < 0 \\ x \geq \frac{2}{7} \end{matrix}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{b} = a$$

$$2x^2 - 5x + 3 =$$

$$\sqrt{a+b} = a + \sqrt{b}$$

$$= 2(x-1)(x-\frac{3}{2})$$

$$a + \sqrt{b} \leq a + \sqrt{b}$$

$$\begin{matrix} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 1 \end{matrix} \quad +$$

$$a+b \geq 0$$

$$a+\sqrt{b} \geq 0$$

$$a(a+2\sqrt{b}-1) = 0$$

$$a+b = a^2 + 2a\sqrt{b} + b$$

$$a=0$$

$$a+2\sqrt{b}=1 \quad a^2 + 2a\sqrt{b} + b = 0$$