МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1

~~$ab \vdots 2^{14}\cdot 7^{16}$~~

~~$bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{17}$~~

~~$ac \vdots 2^{20}\cdot 7^{37} \Rightarrow ac\cdot bc \vdots 2^{20}\cdot 7^{37}\cdot 2^{17}\cdot 7^{17} = 2^{37}\cdot 7^{54}$~~

Пусть $a = 2^{\alpha}\cdot k$, где $k \not\vdots\, 2$

$b = 2^{\beta}\cdot l$, где $l \not\vdots\, 2$

$c = 2^{\gamma}\cdot m$, где $m \not\vdots\, 2$

$ab \vdots 2^{14}$

$2^{\alpha+\beta}\cdot kl \vdots 2^{14} \Rightarrow \alpha+\beta \geq 14$ (1)

$bc \vdots 2^{17}$

$2^{\beta+\gamma}\cdot l\cdot m \vdots 2^{17} \Rightarrow \beta+\gamma \geq 17$ (2)

$ac \vdots 2^{20}$

$2^{\alpha+\gamma}\cdot k\cdot m \vdots 2^{20} \Rightarrow \alpha+\gamma \geq 20$ (3)

(1)+(2)+(3): $2\alpha+2\beta+2\gamma \geq 51$

$\alpha+\beta+\gamma \geq 25{,}5$, но $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Z}$, значит

$\alpha+\beta+\gamma \geq 26$

$abc = 2^{\alpha+\beta+\gamma}\cdot klm$, т.к. $\alpha+\beta+\gamma \geq 26$, то $abc \vdots 2^{26}$

$ac \vdots 7^{37} \Rightarrow abc \vdots 7^{37}$, т.к. НОД$(7^{37}, 2^{26}) = 1$, то

$abc \vdots 2^{26}\cdot 7^{37} \Rightarrow abc \geq 2^{26}\cdot 7^{37}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пример на $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

$a = 2^{8} \cdot 7^{10}$ $\quad ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \,\vdots\, 2^{14} \cdot 7^{10}$

$b = 2^{6}$ $\quad bc = 2^{18} \cdot 7^{27} \,\vdots\, 2^{17} \cdot 7^{17}$

$c = 2^{12} \cdot 7^{27}$ $\quad ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \,\vdots\, 2^{20} \cdot 7^{37}$

$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$.

Ответ: минимальное значение $abc - 2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

Введем обозначение: $(a, b) = \text{НОД}(a, b)$

Т.к. $\frac{a}{b}$ - несократима, то $(a, b) = 1$. Если $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ - сократима на m, то $a+b \vdots m$ и $a^2-6ab+b^2 \vdots m$, но $a^2-6ab+b^2 = (a+b)^2 - 8ab$, т.к. $a+b \vdots m$ и $a^2-6ab+b^2 \vdots m$, то $8ab \vdots m$. Пусть $(a,m) = q$, тогда $b \not\vdots q$, если $q \neq 1$, т.к. $(a,b)=1$, но $a+b \vdots q$, т.к. $a+b \vdots m$, а $m \vdots q$, но $a \vdots q$, а $b \not\vdots q$, значит $q = 1$, значит $(a,m)=1$, аналогично $(b,m)=1$. Т.к. $8ab \vdots m$, и $(a,m)=(b,m)=1$, то $8 \vdots m \Rightarrow m \leq 8$

Пример на $m = 8$: $a = 5$ $b = 3$ $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$ - несократима

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{5+3}{5^2-6\cdot5\cdot3+3^2} = \frac{8}{-56}$$ - сократима на $m = 8$, т.к. $8 \vdots 8$ и $-56 \vdots 8$.

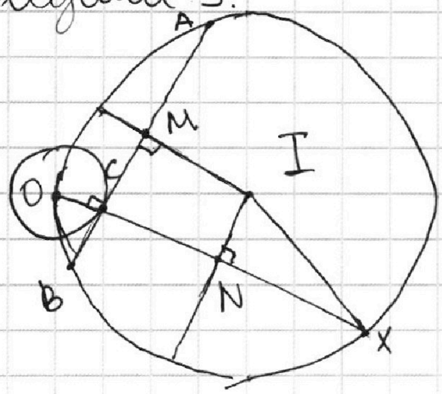
Ответ: при $m = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.



Пусть I — центр Ω, а O — центр ω. $BC = x$, тогда $AC = 7x$.

$OC \perp AB$ — радиус в точку касания.

Продлим до второго пересечения с Ω в точке X, тогда $OC \cdot CX = AC \cdot CB$, $OC = 1$, т.к. это радиус ω, тогда $CX = AC \cdot CB = 7x^2$.

Опустим перпендикуляры из I на AB и OX, пусть их основания M и N соответственно. т.к. I — центр, то M и N — середины AB и OX.

$$MC = MB - BC = \frac{AB}{2} - BC = \frac{8x}{2} - x = 3x.$$

$MICN$ — прямоугольник, т.к.

$$\left.\begin{array}{l} MI \perp CM \\ CN \perp CM \end{array}\right\} \Rightarrow MI \parallel CN$$

$$\left.\begin{array}{l} IN \perp CN \\ MC \perp CN \end{array}\right\} \Rightarrow IN \parallel MC$$

$MI \parallel CN$, $MI \perp CM$, $IN \parallel MC$ $\Rightarrow$ $MINC$ — прямоугольник, значит

$$IN = MC = 3x.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\triangle INX$ ($\angle INX = 90^\circ$)

$NX = \sqrt{IN^2 + IX^2}$ по теореме Пифагора.

IX – радиус Ω, значит $IX = 5$.

$NX = \sqrt{25 - 9x^2}$

$XOC = 2NX = 2\sqrt{25-9x^2}$

$XO = OC + CX = 1 + 7x^2$

$2\sqrt{25-9x^2} = 1 + 7x^2$ $\quad t = x^2 \geq 0$

$2\sqrt{25-t} = 1 + 7t$ (*)

$1+7t$ возрастает
$2\sqrt{25-t}$ убывает $\Rightarrow$ (*) – максимум один корень.

$t = 1$ – корень, и он единственный

$x^2 = 1$

$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \text{ не удовлетворяет условию задачи} \end{array}\right.$

$x = 1.$

$AB = 8x = 8.$

Ответ: $AB = 8.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$

ОДЗ:
$\begin{cases} 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;1]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$

$a=2-7x$

$b=2x^2+2x+1 = x^2+(x+1)^2>0$

$\sqrt{a+b}-\sqrt{b}=a$ $\quad \sqrt{a+b}\geq\sqrt{b}$ при $a\geq 0$

$\cancel{\sqrt{a+b}=a+\sqrt{b}}$ $\quad \sqrt{a+b}<\sqrt{b}$ при $a<0$, ~~зна~~

значит $\sqrt{a+b}-\sqrt{b}$ и a одного знака,

тогда $\sqrt{a+b}-\sqrt{b}=a \Leftrightarrow (\sqrt{a+b}-\sqrt{b})^2=a^2$

$a+b-2\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{b}+b=a^2$

$2b-2\sqrt{b}\cdot\sqrt{a+b}=a^2-a$

$2\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a+b})=a(a-1)$

$a\geq 0$ $\quad \sqrt{b}-\sqrt{a+b}\leq 0 \Rightarrow 2\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a+b})\leq 0,\ a(a-1)\leq 0$

значит при $a\geq 0$ $\quad a\leq 1$

$a\leq 0$ $\quad \sqrt{b}-\sqrt{a+b}\geq 0$

$\sqrt{a+b}=a+\sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=a^2+2a\sqrt{b}+b \\ a+\sqrt{b}\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2+2a\sqrt{b}-a=0 \\ a+\sqrt{b}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a+2\sqrt{b}-1)=0 \\ a+\sqrt{b}\geq 0 \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0 \ (1) \\ a-1=2\sqrt{b} \ (2) \end{array}\right. \\ a+\sqrt{b}\geq 0 \ (3) \end{cases}$$

(1) $a=0$

$2-7x=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{7}$

(2) $a-1=2\sqrt{b}$

$$1-7x=2\sqrt{2x^2+2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-7x\geq 0 \ (2a) \\ 1-14x+49x^2=4(2x^2+2x+1) \ (2б) \end{cases}$$

(2a) $1-7x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq\frac{1}{7}$

(2б) $1-14x+49x^2=8x^2+8x+4$

$41x^2-22x-3=0$

$\frac{D}{4}=(11)^2-(-3)\cdot 41=121+123=244=4\cdot 61$

$x_1=\frac{11-2\sqrt{61}}{41}<\cancel{\frac{1}{7}}\,0<\frac{1}{7}$

$x_2=\frac{11+2\sqrt{61}}{41}>\frac{11+2\sqrt{49}}{41}=\frac{11+2\cdot 7}{41}=\frac{25}{41}>\frac{1}{7}$ не подходит

(3) $a+\sqrt{b}\geq 0 \quad \sqrt{2x^2+2x+1}\geq 7x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x-2\leq 0 \ (3a) \\ \begin{cases} 7x-2\geq 0 \ (3б) \\ 2x^2+2x+1\geq(7x-2)^2 \ (3в) \end{cases} \end{array}\right.$

(3a) $7x-2\leq 0 \Leftrightarrow x\leq\frac{2}{7}$

(3б) $7x-2>0 \Leftrightarrow x>\frac{2}{7}$

(3в) $2x^2+2x+1\geq 49x^2-28x+4$

$47x^2-30x+3\leq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$47x^2-30x+3 \overset{=}{\cancel{\leq}} 0$

$\frac{D}{4}=(15)^2-3\cdot 47=225-141=84$

$x_1=\frac{15+\sqrt{84}}{47}$

$x_2=\frac{15-\sqrt{84}}{47}$

$x\in\left[\frac{15-\sqrt{84}}{47};\frac{15+\sqrt{84}}{47}\right].$

$\left[\begin{array}{l} x\leq\frac{2}{7} \\ \begin{cases} x>\frac{2}{7} \\ x\in\left[\frac{15-\sqrt{84}}{47};\frac{15+\sqrt{84}}{47}\right] \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq\frac{2}{7} \\ x\in\left(\frac{2}{7};\frac{15+\sqrt{84}}{47}\right] \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{15+\sqrt{84}}{47}\right]$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{7} \\ x=\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \end{array}\right. \\ x\in\left(-\infty;\frac{15+\sqrt{84}}{47}\right] \end{cases}$

$\frac{11+2\sqrt{61}}{41}>\cancel{\frac{15+\sqrt{84}}{47}}\ \frac{11+2\sqrt{49}}{41}>\frac{11+14}{41}=\frac{25}{41}>\frac{25}{47}>\frac{15+\sqrt{100}}{47}>\frac{15+\sqrt{84}}{47}$, значит

$x=\frac{11+2\sqrt{61}}{41}$ не подходит

$x=\frac{2}{7}$ подходит под ОДЗ

Ответ: $\left\{\frac{2}{7}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

Возьмем какую-то точку $A(x_1, y_1)$ с целыми координатами, посмотрим, где лежат ~~все~~ точки $B(x_2; y_2)$, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=0$

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=0 \Rightarrow y_2=-2x_2+12+y_1+2x_1$

Значит ~~все точки с~~ все такие точки B лежат на прямой $y=-2x+12+y_1+2x_1$, возьмем точку на прямой $y=-2x+12+y_1+2x_1$, (*) ~~эта прямая получается параллельной с целью тогда~~ $B(x_2; -2x_2+12+y_1+2x_1)$

$2x_2-2x_1+\cancel{4}\,y_2-y_1=2x_2-2x_1-2x_2+12+y_1+2x_1+y_1=12$. Значит любая точка с целыми координатами на прямой подходит.

Тогда если ~~$12+y_1+2x_1$ y~~ у двух точек совпадают значения выражений $12+y+2x$, то им подходят в пару одни и те же точки, т.к. прямая $y=-2x+12+y_1+2x_1$ будет для них одинакова.

$12+y_1+2x_1=12+y_2+2x_2 \Rightarrow \cancel{y_1+2x_1}$ $y_2-y_1=-2(x_2-x_1)$

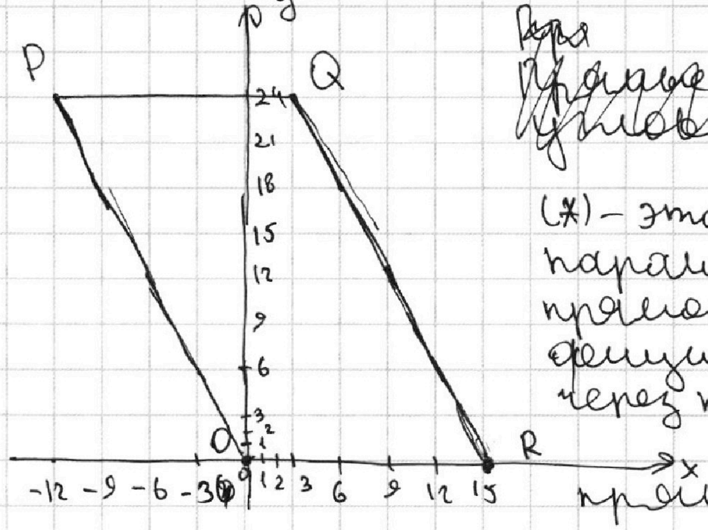
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит все такие точки лежат на прямой с угловым коэффициентом -2.



~~Прямые PQ и QR имеют угловой коэффициент −2.~~

(*) — эта прямая получается параллельным переносом прямой, с угловым коэффициентом -2, проходящ через точку A, вправо на 6 единиц, т.к. этот прямая имеет уравнение

$$y = \cancel{(x+6)} -2x + 2x_1 + y_1 = -2(x-6) + 12 + 2x_1 + y_1.$$

Прямая PO − $y = -2x$, QR − $y = -2x + 30$

Возьмем отрезок PO, т.к. угловой коэффициент прямой PO -2, то всем точкам с целыми координатами на PO в пару подходят все точки с целыми координатами на прямой $y = -2x + 12$, в пределах PQRO и точек с целыми координатами на PO и на y по 13, значит ~~возможн~~ пар между этими точками $13 \cdot 13 = 13^2$

Теперь подвинем прямую PO на 1 единицу вправо вместе с PO подвинется и прямая y, она сдвинется также на 1 вправо, ~~опять на каждой~~ на PO и на y также будет по 13 точек с целыми координатами, значит пар будет 13^2. Продолжим двигать PO пока y не совпадет с QR. Если мы продолжим двигать PO, то точки подходящие в пары будут вне PQRO, значит дальше пар не будет. Таким образом мы прошлись по всем точкам ~~пара~~ PQRO с целыми координатами, чтобы первоначальная прямая $y=-2x+12$ перешла $\cancel{-2x}$ QR $-2x+30$ потребовалось сдвинуть её вправо на 10 единиц, на каждом шаге пар было 13^2, ~~значит~~ всего шагов было 10, значит пар

$10 \cdot 13^2 = 1690$

Ответ: 1690 пар

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

Мы хотим найти при каких a и в у этой системы ровно 2 решения и тогда мы ответим на вопрос задачи

$$\begin{cases} y = ax + 10b \quad (2) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad (1) \end{cases}$$

(1) $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Чтобы у системы было два решения, у данной совокупности должно быть два решения, при $y = ax + 10b$.

Каждая из систем в данной совокупности имеет либо бесконечно много решений, либо одно, либо ноль, тогда чтобы было два решения у каждой из систем должно быть по одному решению.

$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$ – 1 решение

$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$ – 1 решение

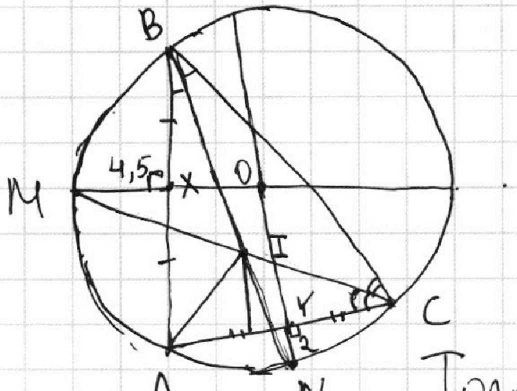
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 7



Т.к. M и N - середины дуг AB и AC, то CM - биссектриса угла ACB, а BN - биссектриса угла ABC. Тогда точка пересечения CM и BN - центр вписанной окружности треугольника ABC, обозначим её как I. Тогда нам надо найти расстояние AI.

M - середина дуги $\overset{\smile}{AB}$ => MA = MB, значит M на серединном перпендикуляре к AB, ~~тогда~~. Расстояние от M до AB - длина перпендикуляра из M на AB, пусть его основание X. Тогда MX = 4,5 и X - середина AB. Пусть Y - основание перпендикуляра из N на AC, тогда аналогично получаем Y - середина AC
NY = 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продлим MX и NY до пересечения, пусть они пересекаются в точке O, т.к. ~~MX⊥ сер.пер. к AB~~ MX и NY – серединные перпендикуляры к хордам окружности, описанной около ABC, то точка их пересечение – центр этой окружности. Значит O – центр. окружности, описанной около ABC

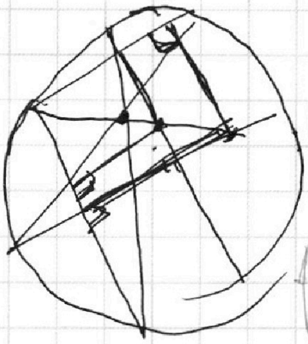
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

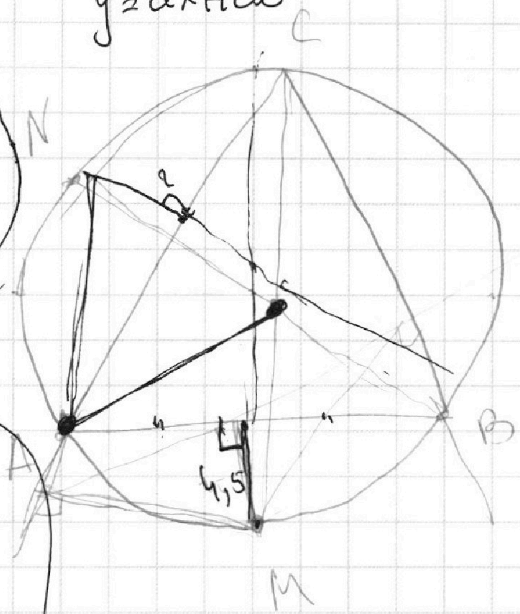
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

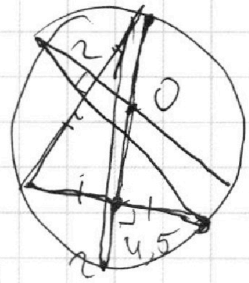
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

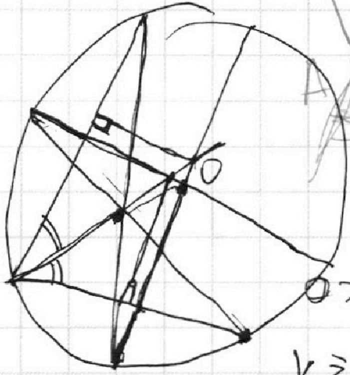
Угахнов







$x^2+y^2\le 4$



$a+b+b-2\sqrt{ab+b^2}=a^2$ $\quad a^2-a+2\cancel{\sqrt{ab+b^2}}+2b=0$

$a+\cancel{b}=a^2+2a\sqrt{b}+\cancel{b}$ $\quad a=$

$a(a-2\sqrt{b}-1)=0$ $\quad \sqrt{a+b}-\sqrt{b}=a$

$a=0$ $\quad a-1=2\sqrt{b}$ $\quad b=0$

$\cancel{4b=a^2-2a+1}$ $\quad \sqrt{a}=a$, $a=1$

$\sqrt{a+b}-\sqrt{b}=a$ $\quad b>0$

$2\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a+b})a(a-1)$

$\sqrt{a+b}=a+\sqrt{b}$

$a+2b=a^2+2\sqrt{a+\sqrt{b}}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$2\sqrt{b}\cdot\sqrt{a+b}$ $\quad a\le$

$2\sqrt{b}\cdot(\sqrt{b}-\sqrt{a+b})^2=a(a-1)$ $\quad a\le 1$

>0

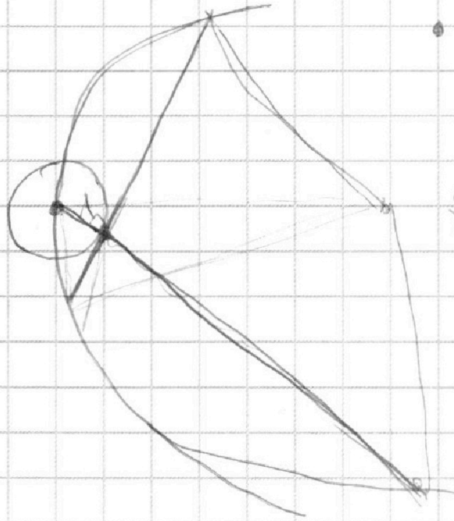
$a<1$ $\quad a<0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

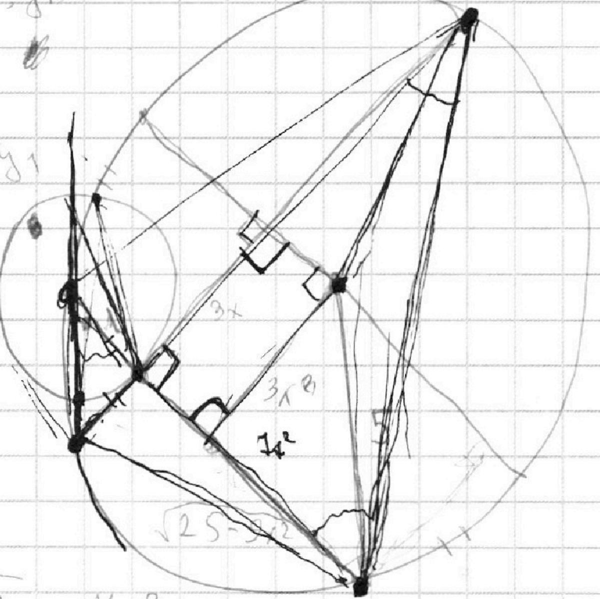
МФТИ



$(x_1; y_1)$ $-2x+$

$(x_1+2; y_1)$

$(x_1; y_1)$



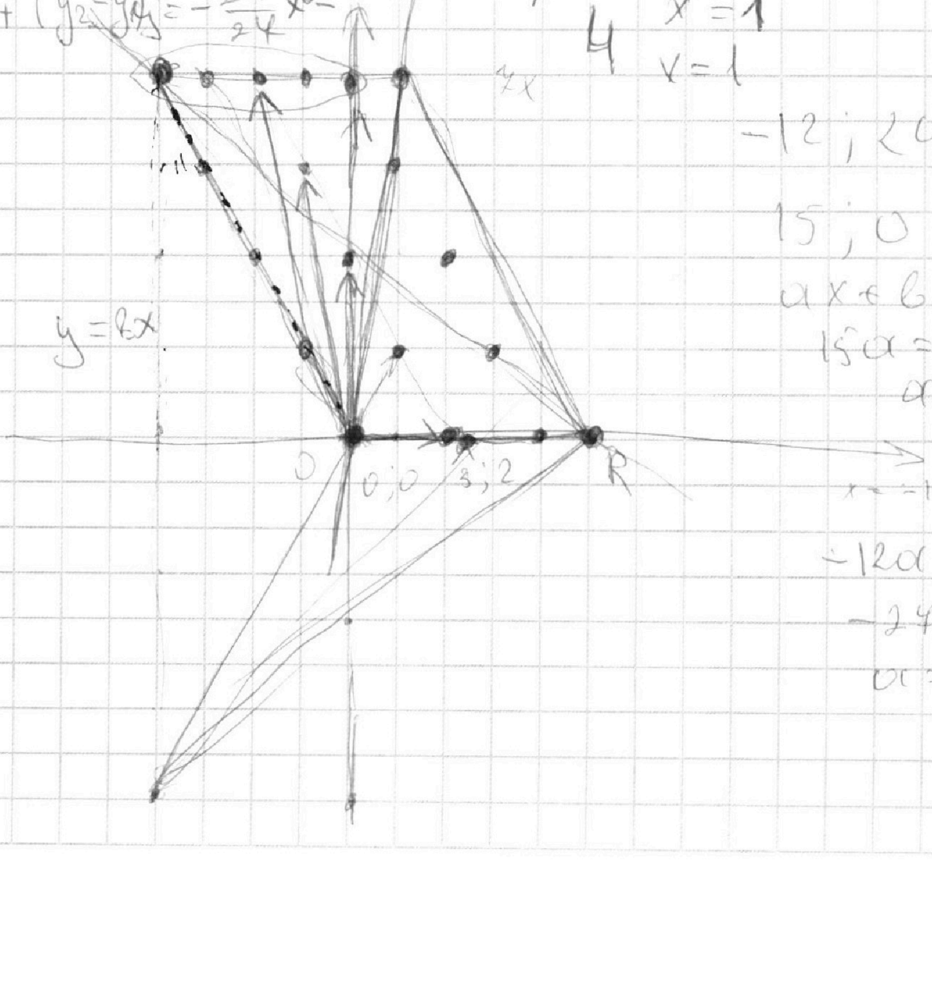
$$2 \cdot \sqrt{25-9x^2} = 7x^2+1$$

$$2 \cdot \sqrt{25-9t} = 7t+1 \quad t=1$$

$2(x_2-x_1)+(y_2-y_1) = -\frac{24}{24}x$

4 $x^2=1$

$x=1$



$y = bx$

$-12; 24$

$15; 0$

$ax+b$

$15a=-b$

$ax-15a$

$x=-12$

$-12a-15a=24$

$-27a=24$

$a=-\frac{24}{27}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^{14} 7^{10}$ $bc \vdots 2^{14} 7^{17}$ $ac \vdots 2^{20} 7^{37}$

ab $a^2b^2c^2 \vdots 2^{51} 7^{64}$

$a = 7^{20} 7^{37}$ 7^{37}

$c = 7^{27} c \geq$ $c \geq 2^{20}$

$a^2b^2c^2 \geq 2^{51} 7^{64}$ $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$ 2^{26} $c \geq 2^{12}$

$\alpha + y \geq$

$\alpha + \beta \geq 14$
20

$(a, b) = 1$ $2^{20} \cdot 7^{37}$ $\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$ a^{14} $abc^2 a \vdots 2^{14} 7^{17}$

$x + y \geq 14$ $x + y + z$ $a = 2^8$

$a + b \vdots m$ $y + z \geq 17$ $2x + 2y + 2z \geq$ $b = 2^6$

$x + z \geq 20$

$a^2 - 6ab + b^2 \vdots m$ $a^2 + 2ab + b^2 - 8ab =$

$= (a+b)^2 - 8ab$ $c = 1$

$8ab \vdots m$ $a = 2^{17} \cdot 7^{14}$

$b = 2^{20} \cdot 7^{37}$

$a + b \vdots m$ a $\exists (a, m) \neq 1 \Rightarrow (a, m) = a$

$8ab \vdots m$ $(a, m) = 1$ $(a, b) = 1 \Rightarrow b \not\vdots a$

$8 \vdots m$ $(b, m) = 1$

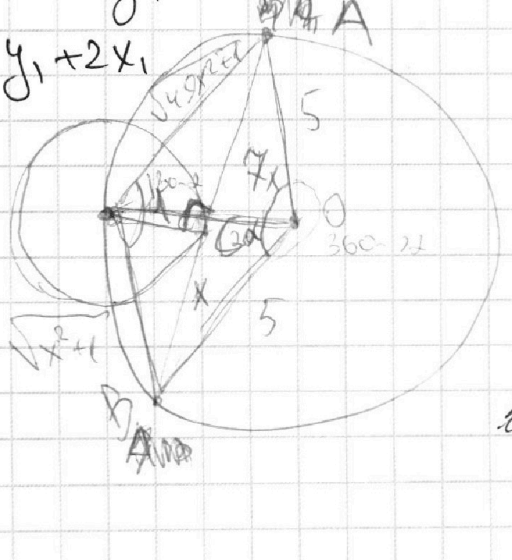
$8 \geq m$ $\frac{8}{}$

$m = 8$ 5 3

$25 + 9 - 6 \cdot 5 \cdot 3 = 34 - 90 = -56 \vdots 8$

$-2x_1 + b = y_1$

№3 $b = y_1 + 2x_1$ $\cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha$



x_1 y_1

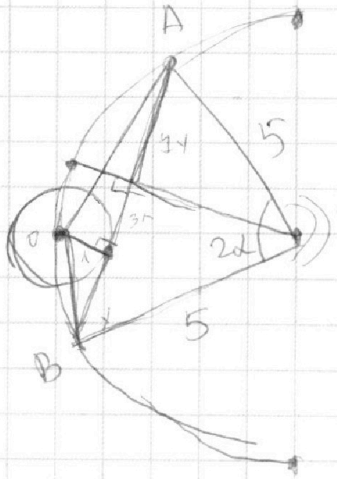
$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 13$

$y_2 = -2x_2 + 12 + 2x_1 + y_1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$b>0$

$(x^2+1)+(49x^2+1)-2\cos(180-\alpha)\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+49x^2}=$

$=50x^2+2+2\cos\alpha\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+49x^2}$

$50\cancel{*}-2\cdot\cos2\alpha\cdot25=50\cdot(1-\cos2\alpha)$

$1-2\cos^2\alpha \qquad \sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\cos^2 2\alpha=1-4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1-(1-\cos^2\alpha)\cdot$

$\cos^2\alpha=1-\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$

$a<0$

$\sqrt{\underbrace{2x^2-5x+3}_{c}}-\sqrt{\underbrace{2x^2+2x+1}_{b}}=\underbrace{2-7x}_{a} \qquad x\geq\frac{2}{7}$

$\sqrt{a+b}-\sqrt{b}=a \qquad 2x^2-5x+3=$

$\sqrt{a+b}=a+\sqrt{b} \qquad =2(x-1)(x-\frac{3}{2})$

~~$a+\sqrt{b}\ \angle\ a\sqrt{a+b}$~~

$x\geq\frac{3}{2}$
$x\leq1$

$a+b\geq0$

$a+\sqrt{b}\geq0$

$a(a+2\sqrt{b}-1)=0 \qquad a+\cancel{b}=a^2+2a\sqrt{b}+\cancel{b}$

$a=0$

$a+2\sqrt{b}=1 \qquad a^2+2a\sqrt{b}\cancel{+}-a=0$