МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^{15}7^{11}$, $bc$ делится на $2^{17}7^{18}$, $ac$ делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем $m$ могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на $m$?

3. [4 балла] Центр окружности $\omega$ лежит на окружности $\Omega$, хорда $AB$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $C$ так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину $AB$, если известно, что радиусы $\omega$ и $\Omega$ равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник $ABC$ вписан в окружность. Пусть $M$ – середина той дуги $AB$ описанной окружности, которая не содержит точку $C$; $N$ – середина той дуги $AC$ описанной окружности, которая не содержит точку $B$. Найдите расстояние от вершины $A$ до центра окружности, вписанной в треугольник $ABC$, если расстояния от точек $M$ и $N$ до сторон $AB$ и $AC$ соответсвенно равны 5 и 2,5.

Задание №1

$ab \vdots 2^{15}7^{11}$ $\quad ab = 2^{15}7^{11}\cdot X$

$bc \vdots 2^{17}7^{13}$ $\quad bc = 2^{17}7^{13}\cdot Y$ $\quad$ где $X, Y$ и $Z$ целые числа

$ac \vdots 2^{23}7^{39}$ $\quad ac = 2^{23}\cdot 7^{39}\cdot Z$

$abc \vdots ab$, $abc \vdots ac$ и $abc \vdots bc$

тогда $abc \vdots 2^{23}\cdot 7^{39} \rightarrow (abc)^2 \vdots 2^{56}\cdot 7^{78}$

перемножим $ab$ $bc$ и $ac$

$ab\cdot bc\, ac = 2^{15}7^{11}X\cdot 2^{17}7^{13}Y\cdot 2^{23}7^{39}Z$

$(abc)^2 = 2^{55}\cdot 7^{68}\cdot XYZ$

но $(abc)^2 \vdots 2^{56}\cdot 7^{78}$

тогда $XYZ = k\cdot 2\cdot 7^{10}$

$(abc)^2 = 2^{55}\cdot 7^{68}\cdot k\cdot 2\cdot 7^{10}$

$(abc)^2 = 2^{56}\cdot 7^{78}\cdot k$

$abc$ минимально при $k=1$

тогда $abc = 2^{28}\, 7^{39}$

приведём пример

таких чисел:

$a = 2^{10}\cdot 7^{11}$ $\qquad ab = 2^{15}\, 7^{11} \vdots 2^{15}7^{11}$

$b = 2^{5}$ $\qquad$ тогда $\quad bc = 2^{18}\cdot 7^{29} \vdots 2^{17}\cdot 7^{18}$

$c = 2^{13}\cdot 7^{29}$ $\qquad ac = 2^{23}\cdot 7^{39} \vdots 2^{23}\cdot 7^{39}$

Ответ: $2^{28}\cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №2 $\frac{a}{b}$ несократима НОД$(a;b)=1$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = -\frac{a+b}{(-(a^2+2ab+b^2)+9ab)} = -\frac{a+b}{(-(a+b)^2+9ab)}$$

дробь максимально сокращается на НОД числителя и знаменателя

$$\text{НОД}\left((a+b); \underbrace{-(a+b)^2}_{\vdots (a+b)}+9ab\right) = \text{НОД}(a+b;\ 9ab)$$

но НОД$(ab;(a+b))=1$

$a = n_1^{\alpha_1}\cdot n_2^{\alpha_2}\ldots$
$b = k_1^{\beta_1}\cdot k_2^{\beta_2}\ldots$ где $n_n$ и $k_n$ - простые и различные числа (т.к. НОД$(a;b)=1$)

тогда $ab = n_1^{\alpha}\cdot n_2^{\alpha_2}\ldots k_1^{\beta_1}\cdot k_2^{\beta_2}\ldots$
$a+b = n_1^{\alpha}\cdot n_2^{\alpha_2}\ldots + k_1^{\beta_1}\cdot k_2^{\beta_2}$
у $ab$ и $a+b$ нет общих делителей
т.е НОД$(ab;(a+b))=1$

тогда НОД$(a+b;\ 9ab)$ будет наибольшим, если $a+b \vdots 9$
НОД$(a+b;\ 9ab)=9$ при $a+b \vdots 9$

проверим пример: $a=4$ $b=5$ $\frac{a}{b}=\frac{4}{5}$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{4+5}{16-7\cdot 20+25} = \frac{9}{41-141} = \underbrace{\frac{9}{-99}}_{m=9} = \frac{-1}{11}$$

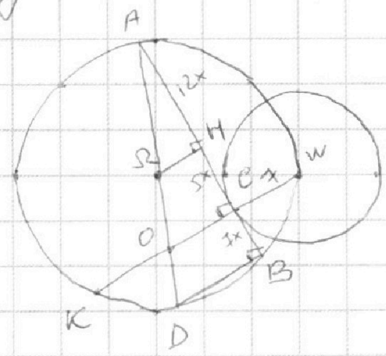
Ответ: при $m=9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 3




$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$ $AC = 17x$ $CB = 7x$ $AB = 24x$

Пусть $CW \cap$ окр. $\Omega$ в K
построим диаметр AD

$\angle ABD = 90^\circ$ т.к впис, опирается на d
$\angle ACK = 90^\circ$ т.к. AB - кас, CW - R
(CK и CW диаметр)

$AC \cdot CB = CW \cdot KC$ $CW = r = 7$
$17x \cdot 7x = 7 \cdot KC$
$KC = 17x^2$ Пусть $OC = a$
$KO = 17x^2 - a$

опустим $\Omega H$ - перпендикуляр
$\Omega H \perp AC$
т.к. $\Omega$ - ц. окр AB - хорда, $\Omega H \perp AB$
то $AH = HB = 12x$

$\triangle A\Omega H \sim \triangle AOC$ $A\Omega = R = 13$

$\frac{AH}{AC} = \frac{A\Omega}{AO}$ $AO = \frac{17x}{12x} \cdot 13 = \frac{17 \cdot 13}{12}$

$OD = AD - AO = 26 - \frac{17 \cdot 13}{12} = \frac{13 \cdot 2 \cdot 12 - 17 \cdot 13}{12} = \frac{13 \cdot 7}{12}$

$AO \cdot OD = KO \cdot OW$

$\frac{17 \cdot 13}{12} \cdot \frac{13 \cdot 7}{12} = (17x^2 - a)(7 + a)$

$\frac{17 \cdot 7 \cdot 13^2}{12^2} = 17 \cdot 7x^2 + 17x^2 \cdot a - 7a - a^2$

$\triangle AOC$ - прям
по т. Пифагора $OC^2 = AO^2 - AC^2$
$a^2 = \left(\frac{17 \cdot 13}{12}\right)^2 - (17x)^2 = \left(\frac{17 \cdot 13}{12} - 17x\right)\left(\frac{17 \cdot 13}{12} + 17x\right) =$

$\cancel{\frac{17 \cdot 7 \cdot 13^2}{12^2} = 17 \cdot 7x^2 + 17x^2 \cdot a - 7a - \frac{17^2 \cdot 13^2}{12^2} + (17x)^2}$

$= \frac{17(13 - 12x) \cdot 17(13 + 12x)}{12 \cdot 12}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☒ | ☒ | ☐ | ☐ | ☐ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №3 продолжение

$$a = \frac{17}{12}\sqrt{(13-12x)(13+12x)}$$

$$\frac{17\cdot 7\cdot 13^2}{12^2} = 17\cdot 7x^2 + 17x^2\cdot\frac{17}{12}\sqrt{(13-12x)(13+12x)} - 7\cdot\frac{17}{12}\sqrt{\dots} - \frac{17^2}{12^2}(13^2-144x^2)$$

$$x^2 = t$$

$$\cdot 12^2 \quad \frac{\cancel{17}\cdot 7\cdot 13^2}{12^2} = \cancel{17}\cdot 7t + \cancel{17}t\cdot\frac{17}{12}\sqrt{169-144t} - \overset{7\cdot\frac{17}{12}}{}\sqrt{169-144t} - \frac{17^2}{12^2}(169-144t)$$

$$7\cdot 13^2 - 12^2\cdot 7t + 17\cdot 12t\sqrt{\phantom{x}} - 7\cdot 12\sqrt{\phantom{x}} - 17(169+44t)$$

$$7(169-144t) = 17\cdot 12t\sqrt{\phantom{x}} - 7\cdot 12\sqrt{\phantom{x}} - 17(169-144t)$$

$$34(169-144t) = 12(17t\sqrt{\phantom{x}} - 7\sqrt{\phantom{x}})$$

$$17(169-144t) = 6(17t\sqrt{\phantom{x}} - 7\sqrt{\phantom{x}})$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$$

$a=\sqrt{3x^2-6x+2}$ $\quad a^2-b^2=-9x+1$

$b=\sqrt{3x^2+3x+1}$

$$a-b=a^2-b^2$$

$$a-b=(a-b)(a+b)$$

$$(a-b)(a+b-1)=0$$

1) $a=b$ $\quad$ 2) $a+b-1=0$

1) $\sqrt{3x^2-6x+2}=\sqrt{3x^2+3x+1}$ $\uparrow^2$

$3x^2-6x+2=3x^2+3x+1$

$9x=1$

$x=1/9$

$3x^2+3x+1=0$

$D=9-12<0$

$3x^2+3x+1>0$ при $\forall x$

при $x=1/9$ $\quad 3x^2+3x+1>0$

2) $\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}-1=0$

$\sqrt{3x^2-6x+2}=1-\sqrt{3x^2+3x+1}$ $\uparrow^2$

$1-\sqrt{3x^2+3x+1}\geq 0$

$3x^2+3x+1\leq 1$

$3x^2+3x\leq 0$

$x(x+1)\leq 0$

$-1 \quad 0$

$x\in[-1;0]$ $\quad 3x^2-6x+2=1+3x^2+3x+1-2\sqrt{3x^2+3x+1}$

$2\sqrt{3x^2+3x+1}=9x$ $\quad\uparrow^2$

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ 3x^2+3x+1\geq 0 \\ 12x^2+12x+4=81x^2 \end{cases}$$

$69x^2-12x-4=0$

$D=12^2+4\cdot 4\cdot 69=$

$=4^2 3^2+4^2 69=4^2\cdot 78=$

$=(4\sqrt{78})^2$

$x=\dfrac{6+2\sqrt{78}}{69}$

$x=\dfrac{12\pm 4\sqrt{78}}{2\cdot 69}$

но $\dfrac{12-4\sqrt{78}}{2\cdot 69}$ и $0$

$12$ и $4\sqrt{78}$

$6$ и $2\sqrt{78}$

$36<4\cdot 78$

$\dfrac{12-4\sqrt{78}}{2\cdot 69}<0$

не подходит

$x>0$

не подходит

(иначе $1-\sqrt{3x^2+3x+1}<0$

и $\sqrt{3x^2-6x+2}=<0$ не может)

Ответ: $1/9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

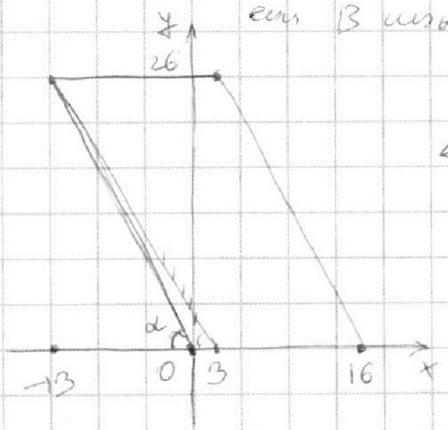
Задача №5

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$

$x_2 - x_1$ расст. по $x$ ~~шагу~~ от A до B
если B правее, то $x_2 - x_1 > 0$
если B левее, то $x_2 - x_1 < 0$

$y_2 - y_1$ расст. по $y$ от A до B
если B выше, то $y_2 - y_1 > 0$
если B ниже, то $y_2 - y_1 < 0$




по оси $x$ сдвиг на 13 единиц
значит в 14 строках крайне левые (нечетные значения)

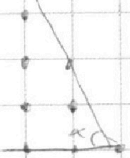
в таких строках по 16 целых точек
в остальных строках — 15 целых точек

значит, когда $y_2 - y_1 = 0$
и $2(x_2 - x_1) = 14$
$x_2 - x_1 = 7$ $x_2$ правее $x_1$ на 7

в 17 строках с целыми числами: 9 всего: $14 \cdot 9$
в ост. строках: 8 всего: $13 \cdot 8$

$y$ могут отличаться на чётное число (иначе $x_2 - x_1$ не целое)

угол п-мма:




т.к. $\operatorname{tg}\alpha = 2$ $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{26}{13} = 2\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №5 продолжение

Если В выше А на 2

$y_2 - y_1 = 2$

то $2(x_2 - x_1) = 12$

$(x_2 - x_1) = 6$

В зелёных строках

таких точек (по x) 10 но у крайней правой точки У будет вне п-ка

тогда 9 точек

и минус 2 строки сверху (иначе В вне п-ка) (у них 1 зелёная)

итого: $9 \cdot 13$

в незелёных: $8 \cdot 12$ (только минус предпоследняя верхняя строка)

Если В выше А на 4

$(x_2 - x_1) = 5$

в зелёных таких точек 11 но у двух правых В за границей

и минус 4 строки (у них 2 зелёные)

итого: $9 \cdot 12$

у незелёных: $8 \cdot 11$

В выше А на 6

$x_2 - x_1 = 4$ зелёные: $9 \cdot 11$

незелёные: $8 \cdot 10$

...

В выше А на 14

зелён: $9 \cdot 7$

незелён: $8 \cdot 6$

Итого: $9 \cdot (7 + \ldots + 14) + 8(13 + \ldots + 6)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №6

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\leq 0 \end{cases}$$

$x^2+y^2-1=0$

окр ц. $(0;0)$ $R=1$

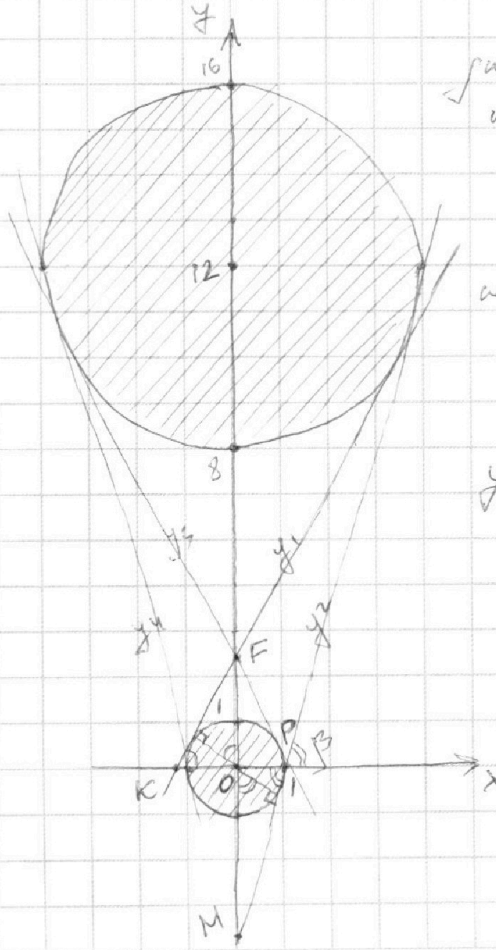
$x^2+(y-12)^2-16=0$

окр ц $(0;12)$ $R=4$

$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\leq 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2-1\leq 0 & \text{внутри окр} \\ x^2+(y-12)^2-16\geq 0 & \text{вне окр} \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2-1\geq 0 & \text{вне окр.} \\ x^2+(y-12)^2-16\leq 0 & \text{внутри окр} \end{cases} \end{array}\right.$$

т.е. $(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\leq 0$ если точка находится внутри одной окружности и вне другой окр одновременно (границы окр тоже подходят)

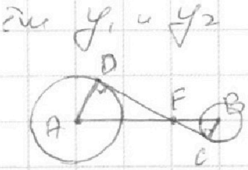



Система имеет ровно два решения, если прямая $y=-ax+8b$ касается двух окружностей

Всего 4 касательных каждые 2 у них симметричны относительно Oy

найдём $y_1$ и $y_2$

$y_1$:




$AD=4$; $BC=1$

$AB=12$

]$FB=x$

$\triangle ADF \sim \triangle FBC$

$\frac{AD}{BC}=\frac{AF}{FB}$ $\quad \frac{4}{1}=\frac{12-x}{x}$

$4x=12-x$

$x=\frac{12}{5}$ $\quad FB=\frac{12}{5}$

$\triangle FBC$ – прям

$BC=1$; $FB=\frac{12}{5}$

по т Пифагора $FC=\frac{13}{5}$

$tg\angle FBC=\frac{FC}{BC}=\frac{13}{5}$

$\angle FBC=\angle FKO$ (на графике) $\quad tg\angle FKO=\frac{13}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

задача 6 продолжение

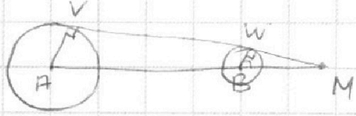
тогда $y_1 = k_1 x + b_1$

$k_1 = \frac{13}{5}$ $\quad b_1 = \frac{12}{5}$

$k_1 = -a$ $\quad b_1 = 8b$

$a = -\frac{13}{5}$ $\quad b = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

$y_2$:



$AV = 4$; $BW = 1$; $AB = 12$

$BM = x$

$\triangle MWB \sim \triangle MVA$

$\frac{MB}{MA} = \frac{WB}{VA}$ $\quad \frac{x}{x+12} = \frac{1}{4}$

$4x = x + 12$

$x = 4$

$BM = 4$

$\triangle BWM$ - прям $WB = 1$; $BM = 4$

~~[illegible]~~ из т Пифагора

$WM = \sqrt{15}$

$tg \angle MBW = \cancel{\ } = \frac{WM}{BW} = \sqrt{15}$

на графике $\angle MOW = \angle OPM = \angle\beta$ $\quad tg\beta = \sqrt{15}$

$(\angle MBW)$

тогда $y_2 = k_2 x + b_2$

$k_2 = \sqrt{15}$ $\quad b_2 = -4$

$k_2 = -a$ $\quad b_2 = 8b$

$a_2 = -\sqrt{15}$ $\quad b_2 = -\frac{1}{2}$

и соответственно $y_3$ и $y_4$

симметричные им $(k_3 = -k_1 \quad k_4 = -k_2)$

$y_3 = \frac{13}{5}x + \frac{3}{10}$ $\quad a = \frac{13}{5}$

$y_4 = \sqrt{15}x - \frac{1}{2}$ $\quad a = \sqrt{15}$

Ответ: при $a = \frac{13}{5}$, $a = -\frac{13}{5}$; $a = \sqrt{15}$, $a = -\sqrt{15}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №1

$ab \vdots 2^{15}7^{11}$ $\quad ab = 2^{15}\cdot 7^{11}\cdot X$

$bc \vdots 2^{17}7^{18}$ $\quad bc = 2^{17}\cdot 7^{13}\cdot Y$ , где X, Y и Z целые числа

$ac \vdots 2^{23}7^{39}$ $\quad ac = 2^{23}\cdot 7^{39}\cdot Z$

перемножим ab bc и ac

$ab\cdot bc\cdot ac = 2^{15}\cdot 7^{11}\cdot X\cdot 2^{17}\cdot 7^{18}\cdot Y\cdot 2^{23}\cdot 7^{39}\cdot Z$

$\underbrace{(abc)^2}_{\text{полный квадрат}} = 2^{55}\cdot 7^{68}\cdot XYZ$

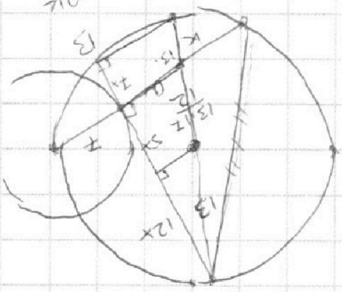
тогда $2^{55}\cdot 7^{68}\cdot XYZ$ тоже должно быть полным квадратом

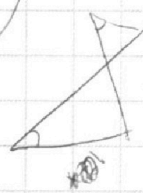
до минимального полного квадрата не хватает 2 тогда X или Y или Z равно 2 (XYZ = 2)

$(abc)^2 = 2^{55}\cdot 7^{68}\cdot 2$

$(abc)^2 = 2^{56}\cdot 7^{68}$

$abc = 2^{28}\cdot 7^{34}$



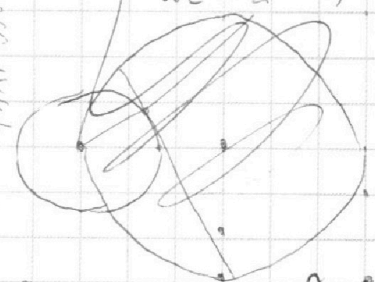


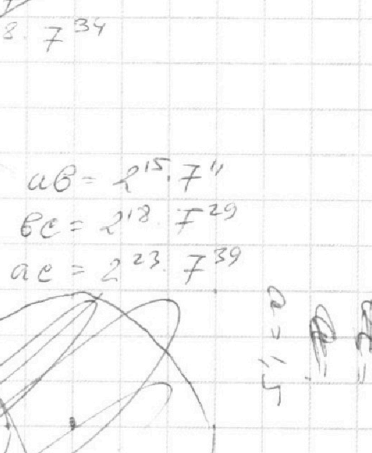
приведём пример таких a, b и c:

$a = 2^{10}\cdot 7^{11}$ $\quad$ тогда $ab = 2^{15}\cdot 7^{11}$

$b = 2^{5}\cdot 1$ $\quad bc = 2^{18}\cdot 7^{29}$

$c = 2^{13}\cdot 7^{29}$ $\quad ac = 2^{23}\cdot 7^{39}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Задание 4~~

$$\begin{cases} ax+y-3b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases}$$

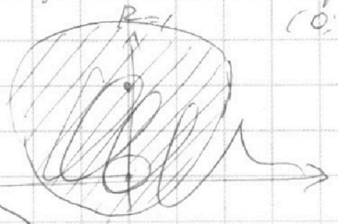
окр. у (0,0) R=1 Окр. у (0;12) R=4

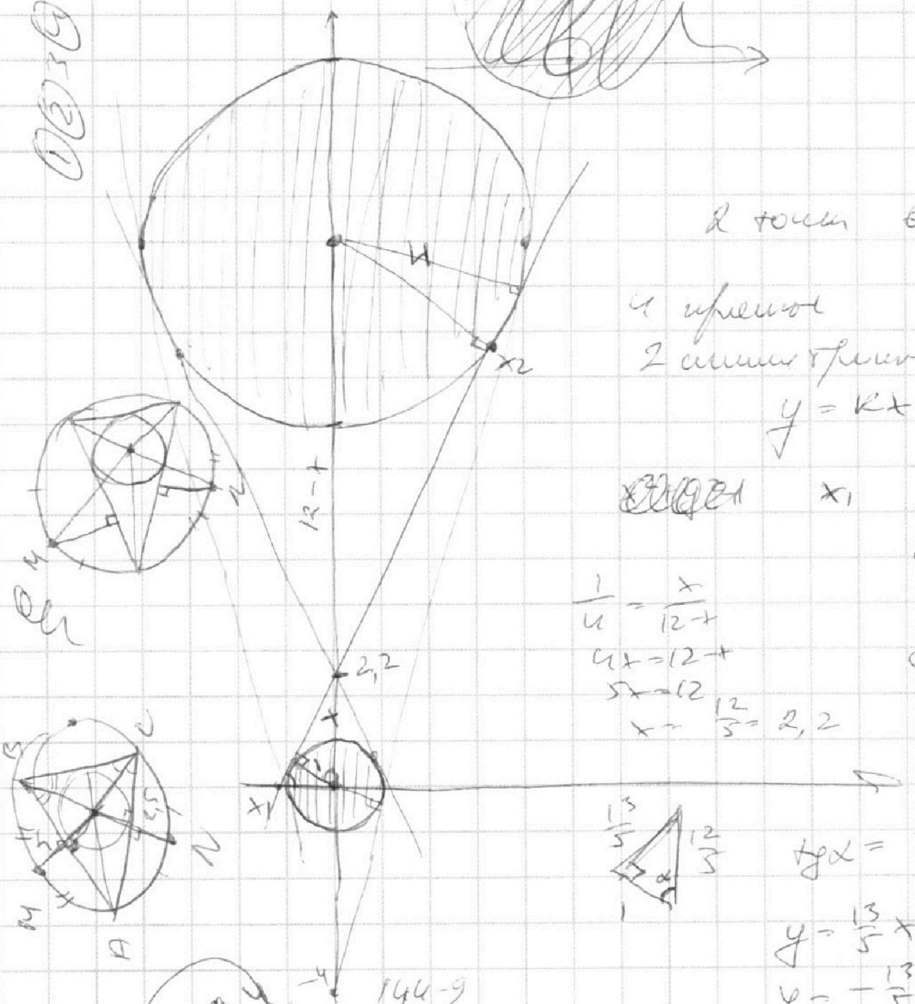
$(x^2+y^2-1)\ge 0$

$(x^2+(y-12)^2-16)\le 0$

или наоборот

вне одного внутри другого






2 точки в положительност

4 прямые

2 симметричны

$y=kx+b$

$x_1$ $y_1=kx_1+b$

$y_1^2+x_1^2-1=0$

$y_2=kx_2+b$

$x_2^2+(y_2-12)^2-16=0$

$\frac{1}{4}=\frac{x}{12-x}$

$4x=12-x$

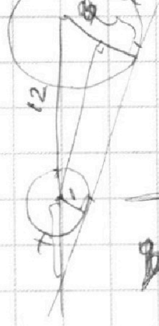
$5x=12$

$x=\frac{12}{5}=2,2$

$tg\alpha=\frac{13}{5}$

$y=\frac{13}{5}x+\frac{12}{5}$

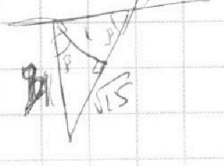
$y=-\frac{13}{5}x+\frac{12}{5}$




$\frac{1}{4}=\frac{x}{x+12}$

$4x=x+12$

$3x=12$ $x=4$ $b=-4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$

$(2x_2+y_2)-(2x_1+y_1)=14$

$2x_2+y_2=2x_1+y_1+14$

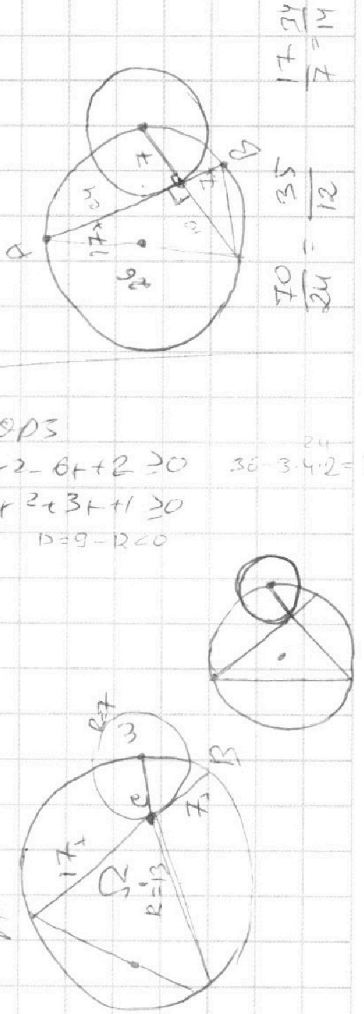
$y_2=-2x_2+b_2$

$y_1=-2x_1+b_1$ $\quad b_2-b_1=14$

$y_2-y_1=-2x_2+2x_1+b_2-b_1$

$\rho(A,B)-(x_2-x_1)^2$

$(y_2-y_1)^2$



(4) $\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$

ОДЗ

$3x^2-6x+2\geq0$

$3x^2+3x+1\geq0$

$D=9-12<0$

$36-3\cdot4\cdot2=12$

$\sqrt{3x^2-6x+2}=a$ $\quad a^2-b^2=-9x+1$

$\sqrt{3x^2+3x+1}=b$ $\quad a-b=a^2-b^2$

$a-b=(a-b)(a+b)$

$(a-b)(a+b-1)=0$

$a=b$ $\quad a+b-1=0$

1) $\qquad$ 2)

1) $3x^2-6x+2=3x^2+3x+1$

$9x=1$

$x=1/9$

2) $\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1$

$\sqrt{3x^2-6x+2}=1-\sqrt{3x^2+3x+1}$

$\cancel{3x^2}-6x+\cancel{2}=1+\cancel{3x^2}+3x+\cancel{1}-2\sqrt{\phantom{x}}$

$2\sqrt{\phantom{x}}=9x$

$\begin{cases}x\geq0\\4(3x^2+3x+1)=81x^2\\3x^2+3x+1\geq0\end{cases}$

$D<0$

$12x^2+12x+4=81x^2$

$69x^2-12x-4=0$

$D=12^2+4^2\cdot69=$

$=4^2\cdot3^2+4^2\cdot69=$

$=4^2(9+69)=4^2\cdot78=$

$=4^2\cdot2\cdot3\cdot13=(4\sqrt{78})^2$

$\frac{18}{69}$

$x=\frac{+12\pm4\sqrt{78}}{2\cdot69}$ $\quad -12-4\sqrt{78}<0$

$3x^2+3x+1<1$

$3x^2+3x<0$

$x(x+1)$

$-\frac{3}{6}\quad\frac{1}{2}$

$x=\frac{-6+2\sqrt{78}}{69}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

① $ab \vdots 2^{15}7^{11}$
$bc \vdots 2^{17}7^{13}$
$ac \vdots 2^{23}7^{39}$

$a = 2^{0..15} \cdot 7^{0..11} \quad / 2^{0..23} \cdot 7^{0..39}$
$b = 2^{0..15} \cdot 7^{0..11} \quad / 2^{0..17} \cdot 7^{0..18}$
$c = 2^{0..17} \cdot 7^{0..18} \quad / 2^{0..23} \cdot 7^{0..39}$

$ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot X$
$bc = 2^{17} 7^{18} \cdot Y$
$ac = 2^{23} 7^{39} \cdot Z$
$(abc)^2 = 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+18+39} \cdot XYZ$
$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot XYZ$

до квадрата для двойки

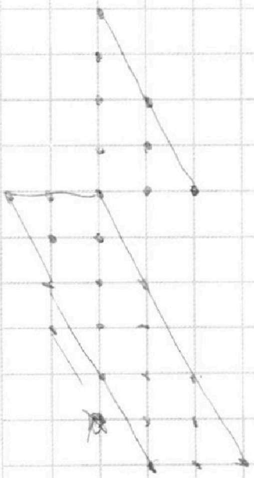
$(abc)^2 \; 2^{56} \cdot 7^{68} \cdot K \qquad K = \frac{XYZ}{2} \qquad \exists K = 1$
$abc = 2^{28} 7^{34} \qquad XYZ = 2$
$X = 2$ или $Y = 2$ или $Z = 2$

$a = 2^{10}$
$b = 2^{5}$
$c = 2^{13}$

пример: $a = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2$
$b = 1$
$c = 2^{17} \cdot 7^{28}$

$ab \vdots 2^{15} 7^{11}$
$bc \vdots 2^{17} 7^{18}$
$ac \vdots 2^{23} 7^{39}$

② НОД $(a, b) = 1$



$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$

$a = a \% b$

$-\frac{(a+b)^2 - 9ab}{(a+b)^2} \Big| \frac{a+b}{a+b}$
$-9ab$

НОД $((a+b), -(a+b)^2 + 9ab) =$ НОД $(a+b, +9ab)$

НОД $(a+b, 9ab)$

$a+b$ и $9ab$

$a + b \vdots 9$
max

$a = 5$
$b = 4$

$ab \not\vdots a+b$

$a = n_1^{\alpha_1} \cdot n_2^{\beta_1}$
$b = k_1^{\alpha_2} \cdot k_2^{\beta_2}$

$n_1^{\alpha_1} \cdot n_2^{\beta_1} \cdot k_1^{\alpha_2} \cdot k_2^{\beta_2} \not\vdots n_1^{\alpha_1} \cdot n_2^{\beta_1} + k_1^{\alpha_2} \cdot k_2^{\beta_2}$

где $n$ и $k$ простые

$ab > a+b$ ($a$ и $b$ зелёные)

проверка: $\frac{5+4}{25 - 7 \cdot 20 + 16} = \frac{5+4}{41 - 140} = \frac{9}{-99}$

Ответ: 9