



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot X$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{13}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{13} \cdot Y$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot Z$$

где X, Y и Z
— простые
числа

$$abc: ab, abc: ac \text{ и } abc: bc$$

$$\text{тогда } abc: 2^{23} \cdot 7^{39} \rightarrow (abc)^2: 2^{56} \cdot 7^{78}$$

предположим, ab, bc и ac

$$ab \cdot bc \cdot ac = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot X \cdot 2^{17} \cdot 7^{13} \cdot Y \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot Z$$

$$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot XYZ$$

$$\text{но } (abc)^2: 2^{56} \cdot 7^{78}$$

$$\text{тогда } XYZ = k \cdot 2 \cdot 7^{10}$$

$$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot k \cdot 2 \cdot 7^{10}$$

$$(abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{78} \cdot k$$

abc минимально при $k=1$

$$\text{тогда } abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

приведем пример
таких чисел:

$$a = 2^{10} \cdot 7^4$$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11} : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$\text{тогда } bc = 2^{17} \cdot 7^{13} : 2^{17} \cdot 7^{13}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №2

$\frac{a}{b}$ несократима

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{-(a^2+2ab+b^2)+9ab} = \frac{a+b}{-(a+b)^2+9ab}$$

дробь максимально сокращается
на НОД числителя и знаменателя

$$\text{НОД}((a+b), -(a+b)^2+9ab) = \text{НОД}(a+b, 9ab)$$

$$\text{НОД}(ab, (a+b)) = 1$$

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots$$

$$b = k_1^{\beta_1} \cdot k_2^{\beta_2} \dots$$

где p_i, k_i — простые и различные
или (т.н. $\text{НОД}(a, b) = 1$)

тогда

$$ab = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots \cdot k_1^{\beta_1} \cdot k_2^{\beta_2} \dots$$

$$a+b = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots + k_1^{\beta_1} \cdot k_2^{\beta_2} \dots$$

у ab и $a+b$ нет общих делителей

$$\text{т.е. } \text{НОД}(ab, (a+b)) = 1$$

тогда $\text{НОД}(a+b, 9ab)$ будет наибольшим,
если $a+b \div 9$

$$\text{НОД}(a+b, 9ab) = 9 \text{ если } a+b \div 9$$

привести пример: $a=4$ $b=5$ $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{4+5}{16-7 \cdot 20+25} = \frac{9}{41-141} = \frac{9}{-99} = \frac{-1}{11}$$

$m=9$

Ответ: при $m=9$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

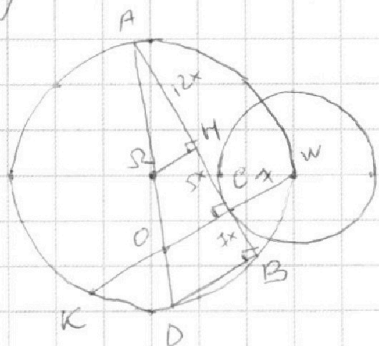
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача № 3



$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7} \quad \begin{matrix} AC = 17x \\ CB = 7x \end{matrix} \quad AB = 24x$$

$\angle CWN \text{ по } \text{оп. } \angle \text{ в } K$
по теореме Птолемея AD

$\angle ABD = 90^\circ$ т.к. $AB \perp AD$, AD — диаметр
 $\angle ACK = 90^\circ$ т.к. $AB \perp AC$, CW — хорда
(CK и CW — диаметры)

$$AC \cdot CB = CW \cdot KE \quad CW = r = 7$$

$$17x \cdot 7x = 7 \cdot KE$$

$$KE = 17x^2 \quad \angle OC = a$$

$$KW = 17x^2 - a$$

опустим ΔOH — вернейший

$$\Delta OH \perp AC$$

т.к. Δ — у. о.ч. AB — хорда, $\Delta OH \perp AB$
то $AH = HB = 12x$

$$\Delta AOH \sim \Delta AOC \quad AO = R = 13$$

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AO}{AC} \quad AO = \frac{17x}{12x} \cdot 13 = \frac{17 \cdot 13}{12}$$

$$OD = AD - AO = 26 - \frac{17 \cdot 13}{12} = \frac{13 \cdot 2 \cdot 12 - 17 \cdot 13}{12} = \frac{13 \cdot 7}{12}$$

$$AO \cdot OD = KO \cdot OW$$

$$\frac{17 \cdot 13}{12} \cdot \frac{13 \cdot 7}{12} = (17x^2 - a)(7 + a)$$

$$\frac{17 \cdot 7 \cdot 13^2}{12^2} = 17x^2 + 17x^2 \cdot a - 7a - a^2$$

ΔAOC — прав.

$$\text{по теореме Птолемея } OC^2 = AO^2 - AC^2$$

$$a^2 = \left(\frac{17 \cdot 13}{12}\right)^2 - (17x)^2 = \left(\frac{17 \cdot 13}{12} - 17x\right) \left(\frac{17 \cdot 13}{12} + 17x\right)$$

$$\frac{17 \cdot 7 \cdot 13^2}{12^2} - 17x^2 + 17x^2 \cdot a - 7a - a^2 = \frac{17(13-12x) \cdot 17(13+12x)}{12 \cdot 12}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3 оформлена

$$a = \frac{17}{12} \sqrt{(13-12x)(13+12x)}$$

$$\frac{17 \cdot 7 \cdot 13^2}{12^2} = 17 \cdot 7x^2 + 17 \cdot 12x \cdot \frac{17}{12} \sqrt{(13-12x)(13+12x)} - \frac{17 \cdot 7 \cdot 13^2}{12^2} - \frac{17^2}{12^2} (13^2 - 144x^2)$$

$$x^2 = t$$

$$\cdot 12^2 \cdot \frac{17 \cdot 7 \cdot 13^2}{12^2} = 17 \cdot 7t + 17 \cdot 12t \cdot \frac{17}{12} \sqrt{169 - 144t} - 7 \cdot \frac{17^2}{12} \sqrt{169 - 144t} - \frac{17^2}{12^2} (169 - 144t)$$

$$\begin{aligned} 7 \cdot 13^2 - 12^2 \cdot 7t + 17 \cdot 12t \sqrt{} - 7 \cdot 12 \sqrt{} - 17(169 - 144t) \\ 7(169 - 144t) = 17 \cdot 12t \sqrt{} - 7 \cdot 12 \sqrt{} - 17(169 - 144t) \\ 34(169 - 144t) = 12(17t \sqrt{} - 7 \sqrt{}) \\ 17(169 - 144t) = 6(17t \sqrt{} - 7 \sqrt{}) \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$a = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \quad a^2 - b^2 = -9x + 1$$

$$b = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

~~$$a - b = a^2 - b^2$$~~

$$a - b = (a - b)(a + b)$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

1) $a = b$ 2) $a + b - 1 = 0$

1) $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$ \uparrow^2

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$9x = 1$$

$$x = 1/9$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

~~$$3x^2 + 3x + 1 > 0$$~~

$$3x^2 + 3x + 1 > 0$$

$$\text{н.л. } x = 1/9 \quad 3x^2 + 3x + 1 > 0$$

2) $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 = 0$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad \uparrow^2$$

$$x \in [-1; 0] \quad 3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

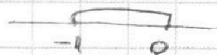
$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x \quad \uparrow^2$$

$$1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \leq 1$$

$$3x^2 + 3x \leq 0$$

$$x(x+1) \leq 0$$



$$x \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 12^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69 =$$

$$= 4^2 \cdot 3^2 + 4^2 \cdot 69 = 4^2 \cdot 78 =$$

$$= (4\sqrt{78})^2$$

$$x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69}$$

~~$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} < 0$$~~

н.л.

$$\frac{12 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} < 0$$

$$12 < 4\sqrt{78}$$

$$6 < 2\sqrt{78}$$

$$36 < 4 \cdot 78$$

$$x > 0$$

не подходит

(или $1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} < 0$

и $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 0$ не имеет)

$$\frac{12 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} < 0$$

не подходит

Ответ: $1/9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



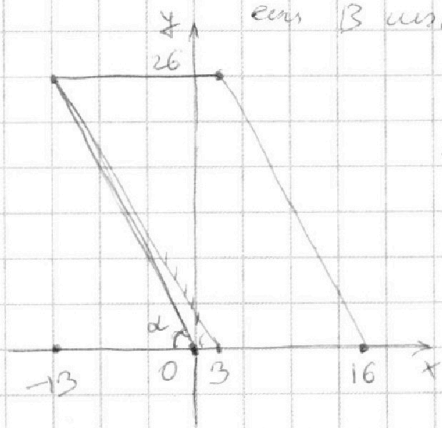
Задача №5

$$2t_2 - 2t_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(t_2 - t_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$t_2 - t_1$ расст. по t между A и B
если B правее, то $t_2 - t_1 > 0$
если B левее, то $t_2 - t_1 < 0$

$y_2 - y_1$ расст. по y от A до B
если B выше, то $y_2 - y_1 > 0$
если B ниже, то $y_2 - y_1 < 0$



~~14~~ ~~14~~

по оси t убыв на 13
идем в 14 строкат направо
(минимальное значение)

в том же строкат по 16 идет точка
в остальных строкат - ~~15~~ идет точек
 15

идем ~~14~~, когда $y_2 - y_1 = 0$
и $2(t_2 - t_1) = 14$

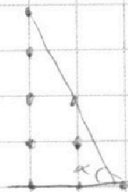
$$t_2 - t_1 = 7 \quad t_2 \text{ правее } t_1 \text{ на } 7 \quad 14$$

в 17 строкат с жестким началом: 9 время: ~~17~~ 9

в ост. строкат: 8 время ~~16~~ 8
 13

y может отличаться на любое число (иначе $t_2 - t_1$ не равно)

уров n -мат:



$$t_1 \text{ } f_{\text{р}} = 2 \quad (f_{\text{р}} = \frac{26}{13} = 2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5 оформление

век \vec{p}_2 в точке A на 2
 $y_2 - y_1 = 2$
то $x^2(t_2 - t_1) = 12$
 $(t_2 - t_1) = 6$

в пункт А

таких точек (на t) 10 но у каждой правой
точки y будет две n -мас

тогда 9 точек

и только 2 стороны вершины (также в две
сторона) n -мас

итого: ~~9~~ 13

в пункт: $8 \cdot 12$ (также только одна сторона вершины
сторона)

век в точке A на 4

$$(t_2 - t_1) = 5$$

в пункт таких точек 11 но у каждой правой B-а
и только 4 стороны n -мас

итого: ~~9~~ 12

у пункт: $8 \cdot 11$

в точке A на 6

$$t_2 - t_1 = 4$$

серед: $9 \cdot 11$

серед: $8 \cdot 10$

...

в точке A на 14

серед: $9 \cdot 7$

серед: $8 \cdot 6$

итого: $9(7+14) + 8(13+...+6)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №6

$$\begin{cases} ax + y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

окр. $O(0;0)$ $R=1$

$$x^2 + (y-12)^2 - 16 = 0$$

окр. $O(0;12)$ $R=4$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 & \text{внутри окр.} \\ x^2 + (y-12)^2 - 16 \geq 0 & \text{вне окр.} \\ x^2 + y^2 - 1 \geq 0 & \text{вне окр.} \\ x^2 + (y-12)^2 - 16 \leq 0 & \text{внутри окр.} \end{cases}$$

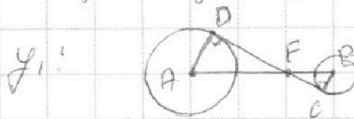
$$\text{т.е. } (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$$

если точка находится внутри одного
окружности и вне другого окр.
тогда решение (графиком окр. тоже
показать)

значит ровно два решения, если
прямая $y = -ax + 3b$ касается
двух окружностей

всего 4 касательных
по две с каждой окружностью
симметрично Oy

используем y_1 и y_2



$$\begin{aligned} AD &= 4; BC = 1 \\ AB &= 12 \\ |FB| &= x \end{aligned}$$

$$\triangle ADF \sim \triangle FBC$$

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AF}{FB} \quad \frac{4}{1} = \frac{12-x}{x}$$

$$\begin{aligned} 4x &= 12-x \\ x &= \frac{12}{5} \quad FB = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

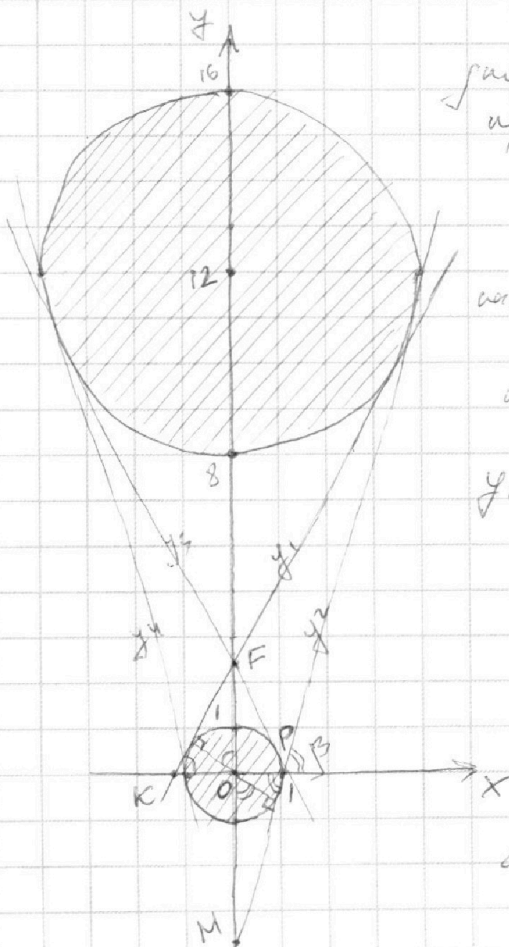
$$\triangle FBC \text{ - прямоугольный}$$

$$BC = 1; FB = \frac{12}{5}$$

$$\text{по теореме Пифагора } FC = \frac{13}{5}$$

$$\angle \varphi = \angle FBC = \frac{FC}{BC} = \frac{13}{5}$$

$$\angle \varphi = \angle FCO \text{ (на графике)} \quad \angle \varphi = \angle FCO = \frac{13}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

задача 6 оформляем
тогда

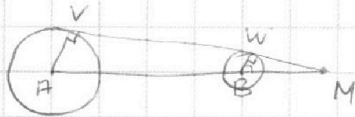
$$y_1 = k_1 x + b_1$$

$$k_1 = \frac{13}{5} \quad b_1 = \frac{12}{5}$$

$$k_1 = -a \quad b_1 = 8b$$

$$a = -\frac{13}{5} \quad b = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

y_2 :



$$AV = 4, \quad BW = 1, \quad AB = 12$$

$$\angle BWM = x$$

$$\triangle MWB \sim \triangle MVA$$

$$\frac{MB}{MA} = \frac{WB}{VA}$$

$$\frac{x}{x+12} = \frac{1}{4}$$

$$4x = x + 12$$

$$x = 4 \quad BM = 4$$

$\triangle BWM$ - при $WB = 1, BM = 4$

~~по теореме Пифагора~~ и с помощью теоремы

$$WM = \sqrt{15}$$

$$\angle MBW = \angle M = \frac{WM}{BM} = \sqrt{15}$$

и с
графиком

$$\angle MOW = \angle OPM = \angle \beta$$

$$\angle \beta = \sqrt{15}$$

тогда

$$y_2 = k_2 x + b_2$$

$$k_2 = -a$$

$$a = -\sqrt{15}$$

$$b_2 = -4$$

$$b_2 = 8b$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

и соответственно $y_3 = y_4$

симметричные им ($k_3 = -k_1, k_4 = -k_2$)

$$y_3 = \frac{13}{5}x + \frac{3}{10} \quad a = \frac{13}{5}$$

$$y_4 = \sqrt{15}x - \frac{1}{2} \quad a = \sqrt{15}$$

Ответ: при $a = \frac{13}{5}, a = -\frac{13}{5}, a = \sqrt{15}, a = -\sqrt{15}$



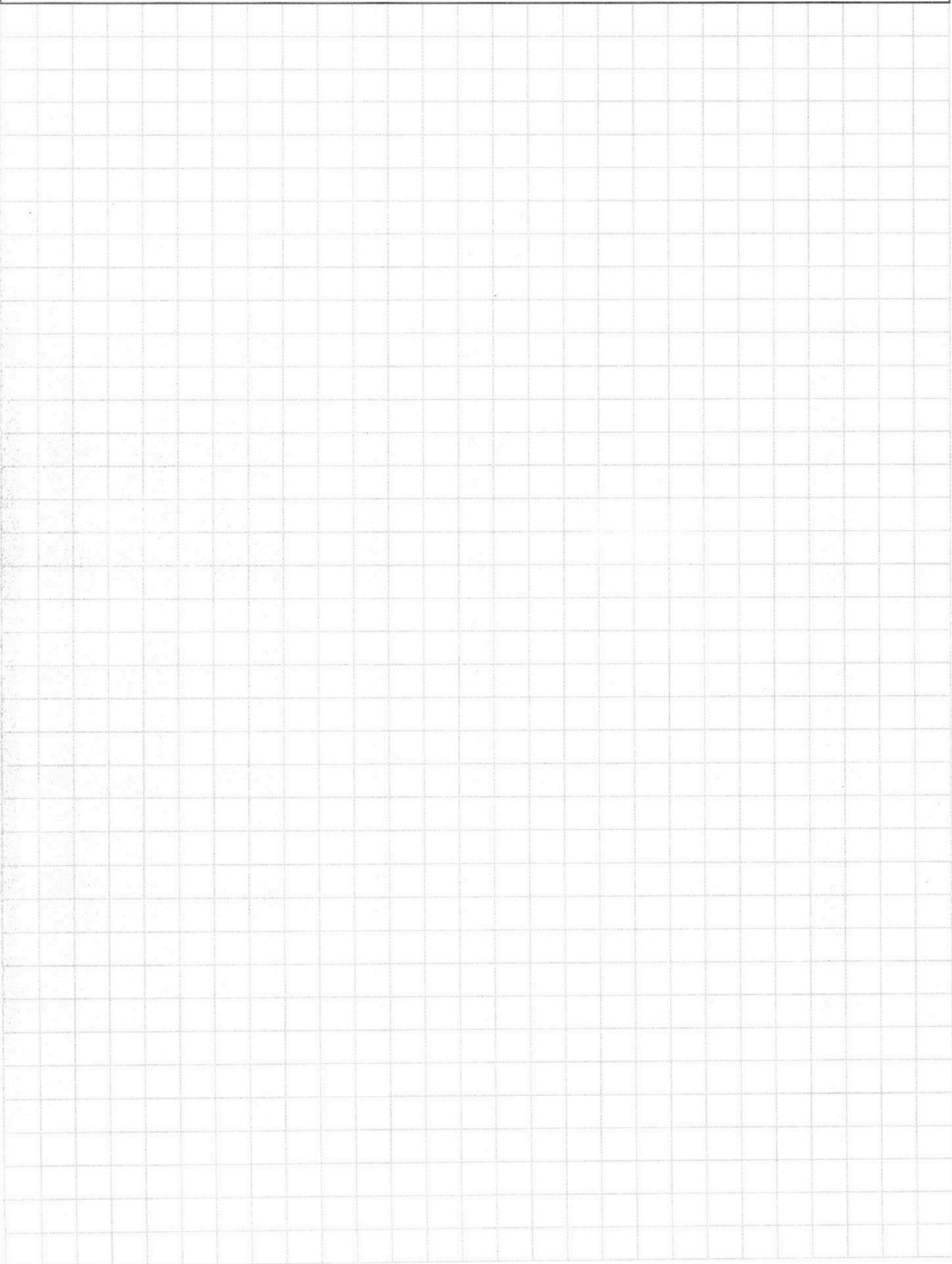
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №1

$$\begin{aligned} ab &= 2^{15} \cdot 7^{11} & ab &= 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot X \\ bc &= 2^{17} \cdot 7^{13} & bc &= 2^{17} \cdot 7^{13} \cdot Y \\ ac &= 2^{23} \cdot 7^{39} & ac &= 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot Z \end{aligned}$$

где X, Y, Z
целые
числа

перемножим ab, bc, ac

$$ab \cdot bc \cdot ac = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot X \cdot 2^{17} \cdot 7^{13} \cdot Y \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot Z$$

$$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{63} \cdot XYZ$$

полный
квадрат

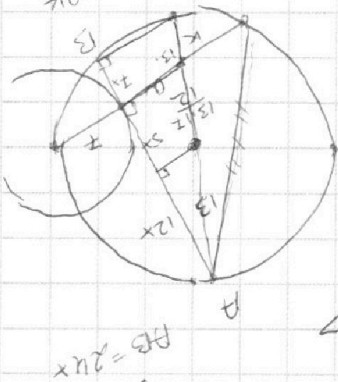
тогда $2^{55} \cdot 7^{63} \cdot XYZ$ тоже
должно быть полным
квадратом

по минимальному полному квадрату
не хватает 2 тогда X или Y или Z
равно 2 ($XYZ=2$)

$$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{63} \cdot 2$$

$$(abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{63}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{31.5}$$

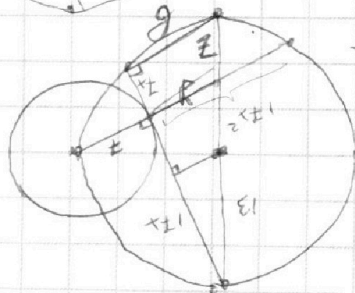
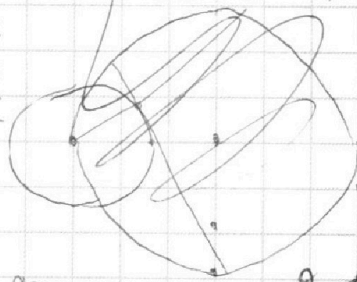


проверим ищем

таких a, b, c:

$$\begin{aligned} a &= 2^{10} \cdot 7^{11} \\ b &= 2^5 \cdot 7 \\ c &= 2^{13} \cdot 7^{29} \end{aligned}$$

тогда $ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$
 $bc = 2^{18} \cdot 7^{29}$
 $ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$



~~10^10 2^10 7^11~~

$$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$$

$$b = 2^5 \cdot 7$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

~~2^15 7^11~~

~~2^18 7^29~~

~~$$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$$~~
~~$$b = 2^5 \cdot 7$$~~
~~$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7

$$\begin{cases} ax+by-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

опр. y (00)

опр. y

$(0; 12)$ $R=4$

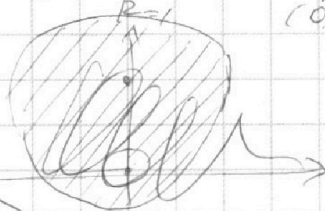
$$(x^2+y^2) \geq 0$$

$$(x^2+(y-12)^2) < 0$$

или
наоборот

вне границ
внутри границ

0210107



2 точки в касательности

4 касательных

2 симметричные

$$y = kx + b$$

~~опр. x~~

$$y_1 = kx_1 + b$$

~~$$y_1^2 + x_1^2 - 1 = 0$$~~

$$y_2 = kx_2 + b$$

~~$$x_2^2 + (y_2 - 12)^2 - 16 = 0$$~~

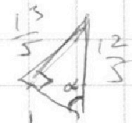
~~$$x_2^2 + (y_2 - 12)^2 - 16 = 0$$~~

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{12-x}$$

$$4x = 12 - x$$

$$5x = 12$$

$$x = \frac{12}{5} = 2,4$$

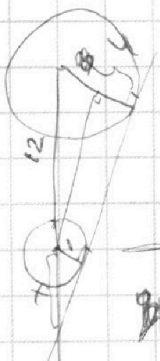
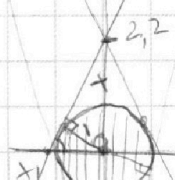
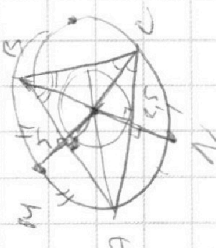


$$\tan \alpha = \frac{13}{5}$$

$$y = \frac{13}{5}x + \frac{12}{5}$$

$$y = -\frac{13}{5}x + \frac{12}{5}$$

0210107



$$\frac{1}{4} = \frac{x}{x+12}$$

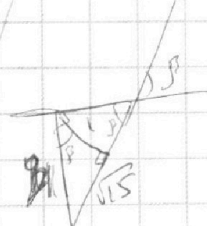
$$4x = x + 12$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

$$b = -4$$

0210107



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

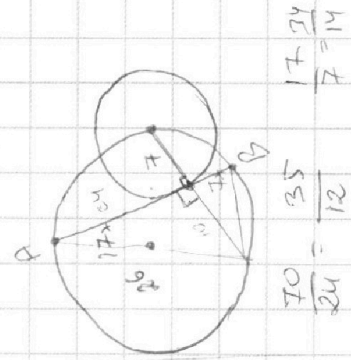


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$y_2 = -2x_2 + b_2$
 $y_1 = -2x_1 + b_1$
 $y_2 - y_1 = -2x_2 + 2x_1 + b_2 - b_1$

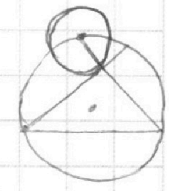
$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$
 $(2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1) = 14$
 $2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14$
 $b_2 - b_1 = 14$



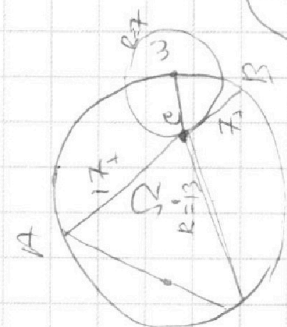
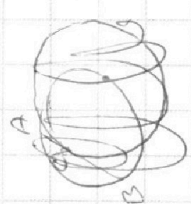
$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$
 $3x^2 + 3x + 1 \geq 0$
 $13 = 9 - 2 < 0$

$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = a$
 $\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = b$
 $a^2 - b^2 = -9x + 1$
 $a - b = (a - b)(a + b)$
 $(a - b)(a + b - 1) = 0$
 $a = b$ or $a + b - 1 = 0$



$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$
 $9x - 1 = 0$
 $x = 1/9$



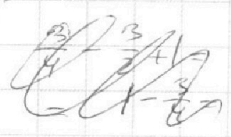
$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$
 $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$
 $3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{\dots}$
 $2\sqrt{\dots} = 9x$

$x > 0$
 $4(3x^2 + 3x + 1) = 81x^2$
 $3x^2 + 3x + 1 \geq 0$

$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$
 $69x^2 - 12x - 4 = 0$
 $D = 12^2 + 4 \cdot 69 = 4^2 \cdot 3^2 + 4^2 \cdot 69 = 4^2(9 + 69) = 4^2 \cdot 78 = 4^2 \cdot 3 \cdot 13 = (4\sqrt{78})^2$
 $x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69}$

$3x^2 + 3x + 1 < 0$
 $3x^2 + 3x < -1$
 $x(x+1) < -1/3$

$x = \frac{-6 + 2\sqrt{78}}{69}$



$x = \frac{12 + 4\sqrt{78}}{138}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода непустима!

① $ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$
 $bc : 2^{17} \cdot 7^{13}$
 $ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$

$a = 2^{0.55} \cdot 7^{0.11} / 2^{0.22} \cdot 7^{0.59}$
 $b = 2^{0.15} \cdot 7^{0.11} / 2^{0.17} \cdot 7^{0.18}$
 $c = 2^{0.17} \cdot 7^{0.18} / 2^{0.23} \cdot 7^{0.59}$

$ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot X$
 $bc = 2^{17} \cdot 7^{13} \cdot Y$
 $ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot Z$

$(abc)^2 = 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+13+39} \cdot XYZ$
 $(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot XYZ$

$a = 2^{15} \cdot 7^{11} / 2^{22} \cdot 7^{59}$
 $b = 2^{17} \cdot 7^{13} / 2^{17} \cdot 7^{18}$
 $c = 2^{17} \cdot 7^{18} / 2^{23} \cdot 7^{59}$

$a = 2^{10}$
 $b = 2^5$
 $c = 2^{13}$

по условию две свободны

$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot K$
 $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$

$K = \frac{xyz}{2} \quad | K=1$
 $xyz=2$
 $x=2 \text{ или } y=2 \text{ или } z=2$

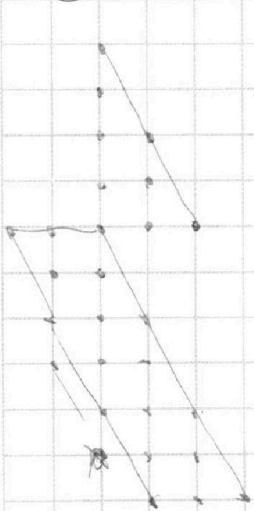
примем:

$a = 2^{15} \cdot 7^{11}$
 $b = 2^5$
 $c = 2^{13} \cdot 7^{13}$

$a = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2$
 $b = 2^5$
 $c = 2^{17} \cdot 7^{13}$

$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$
 $bc : 2^{17} \cdot 7^{13}$
 $ac : 2^{23} \cdot 7^{29}$

② НОД $(a, b) = 1$



$a^2 - 7ab + b^2$
 $\text{НОД}((a+b), -(a+b)^2 + 9ab) = \text{НОД}(a+b, +9ab)$
 $3^2 - 7$
 $\text{НОД}(a+b, 9ab)$

$a+b : 9$
 \max
 $a=5$
 $b=4$

$ab \neq a+b$
 $n_1^{x_1} \cdot n_2^{y_1} \cdot k_1^{x_2} \cdot k_2^{y_2} \neq n_1^{x_1} \cdot n_2^{y_1} + k_1^{x_2} \cdot k_2^{y_2}$

где n, k
 взаимно
 $ab > a+b$ (a+b не равно)

проверка: $\frac{5+4}{25-7 \cdot 20+16} = \frac{5+4}{41-140} = \frac{9}{-99}$

ответ: 9

