



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  можно оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-12;24)$ ,  $Q(3;24)$  и  $R(15;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{N}$ ,  $a, b: 2^{14} 7^{10}$ ,  $b, c: 2^{17} 7^{17}$ ,  $a, c: 2^{20} 7^{37}$ , тогда:

$$a^2 b^2 c^2: 2^{51} 7^{64}, \text{ т.е. } (abc)^2: 2^{51} 7^{64}$$

$abc \in \mathbb{N}$   
 $abc$  будет т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , тогда  $abc$  будет минимальным

натуральным числом  $\sqrt{2^{51} 7^{64}} = 7^{32} 2^{25} \sqrt{2}$ , ~~еще~~  
натуральным  $\sqrt{\quad}$  только из 2 и 7, и это будет  $7^{32} 2^{26}$

Ответ:  $abc$  - минимальное  
значение это  $7^{32} 2^{26}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2-5x+3-(7x-2)} = 2-7x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2-5x+3-(2-7x)} = 2-7x \Leftrightarrow$$

ОДЗ  
 $2x^2-5x+3 \geq 0$   
 $2x^2+2x+1 \geq 0$

$t = 2x^2-5x+3$   
 $m = 2-7x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t} - \sqrt{t-m} = m \Leftrightarrow \sqrt{t} = m + \sqrt{t-m} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = m^2 + 2m\sqrt{t-m} + t - m \Leftrightarrow m^2 - m + 2m\sqrt{t-m} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 = -2\sqrt{t-m} \\ m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq 0 \\ m^2-2m+1 = 4t-4m \Leftrightarrow \\ m=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m^2+2m+1 = 4t \\ m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ (m+1)^2 = 4t \\ m=0 \end{cases} \begin{cases} t = 2x^2-5x+3 \\ m = 2-7x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-7x \leq 1 \\ (2-7x+1)^2 = 4(2x^2-5x+3) \Leftrightarrow \\ 2-7x=0 \end{cases} \begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ 9-42x+49x^2 = 8x^2-20x+12 \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ 41x^2 - 22x - 3 = 0 \\ x = \frac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ x = \frac{22 \pm \sqrt{21 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 41}}{2 \cdot 41} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow$$

См. ур-е  
ср-е мет.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(=)

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ x = \frac{22 \pm 2\sqrt{21 + 164} \cdot 123}{2 \cdot 41} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ x = \frac{11 \pm \sqrt{285}}{41} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases} (=)$$

(=)

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

(=)

$$\begin{cases} x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{2}{7} \\ // \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \end{cases} \text{ с } \begin{cases} x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < \frac{1}{7} \Leftrightarrow 77 - 14\sqrt{61} < 41 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 36 < 14\sqrt{61} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 36^2 < 14^2 \cdot 61 \Leftrightarrow$$

~~36 < 14\sqrt{61}~~

$$\Leftrightarrow 1296 < 11956 - \text{н.н.}$$

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \geq \frac{1}{7} \Leftrightarrow 77 + 4\sqrt{61} \geq 41 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{36}{20} \geq \frac{-4\sqrt{61}}{20} - \text{н.н.} //$$

Ответ:  $\left\{ \frac{2}{7}, \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \right\}$

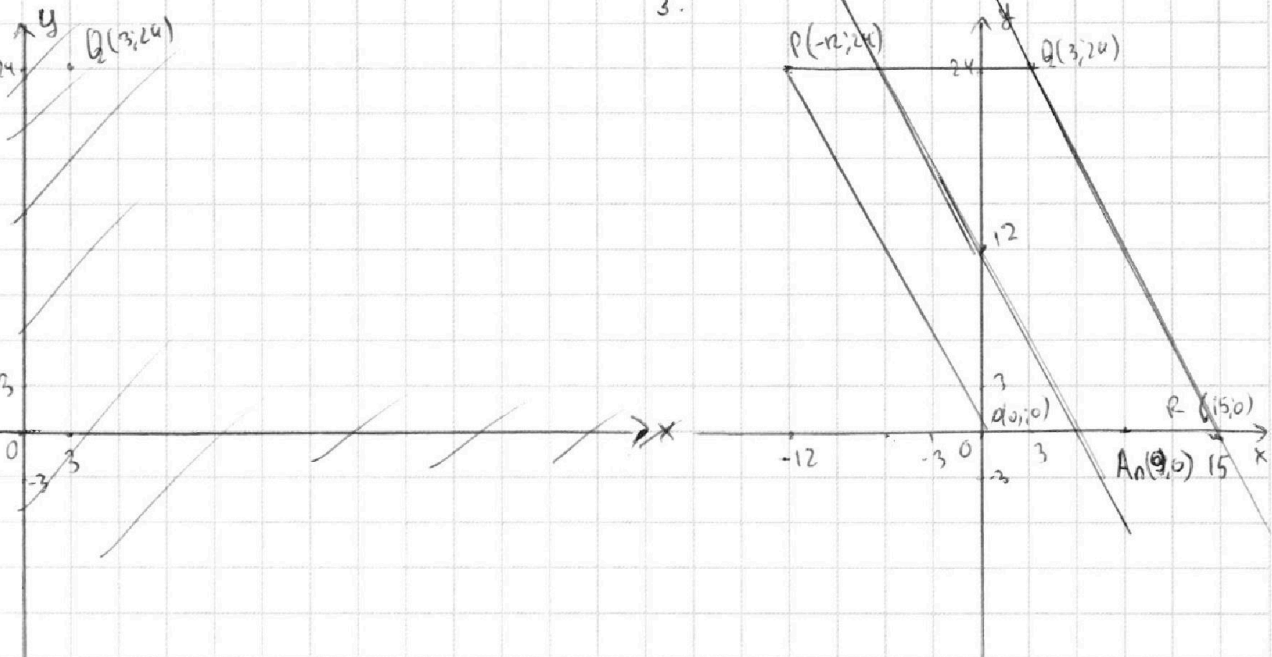
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12 \Leftrightarrow 2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_2 + y_2 = 12 + (2x_1 + y_1)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12 \Leftrightarrow y_2 - y_1 = 12 - 2(x_2 - x_1)$$

найдем прямую:  $y = 12 - 2x$

$A_n \in P \in Q \in R \in O$

тогда нам подходит все такие точки, как  $C(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

лежащие на этой прямой

и тогда заметим, что для  $A_1(0, 0)$  подходит как  $B$  так и  $C$

с учетом уравнения или прямой  $y = 12 - 2x$ , для

для  $A_2(1, 0)$  все точки на прямой  $y = 12 - 2x = 9$ , для и

т.е. для  $A_n(9, 0)$ , для которых подходит  $30 - 2x = 9$

и мы получим из этих прямых будет в произведении бюджет входить в партию, поэтому будет равна исп. в. в точке  $-4 \cdot 3 = 12$

тогда для 9 точек  $A_n$  все будет  $12 \cdot 9 = 108$

Теперь заметим, что если мы будем рассматривать точки

$B_1(0, 0); B_2(-1, 2); B_3(-2, 4) \dots B_n(-12, 24)$  то для них

всех будет по 108 точек, т.е. общ. исп. в.  $-108 \cdot 12 = 1296$

Ответ: 1296 парток  $A$  и  $B$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=ax+10b \\ \begin{cases} (x+8)^2+y^2-1 \geq 0 \quad \text{---} \textcircled{1} \\ x^2+y^2 \leq 4 \\ \begin{cases} (x+8)^2+y^2-1 \leq 1 \\ x^2+y^2 \geq 4 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$(x+8)^2+y^2 \geq 1$  - график всех точек не входящих в круг, с центром в  $(-8; 0)$  и радиусом 1

$x^2+y^2 \leq 4$  - график всех точек, лежащих в ~~от~~ круге с центром в  $(0; 0)$  и рад. 2

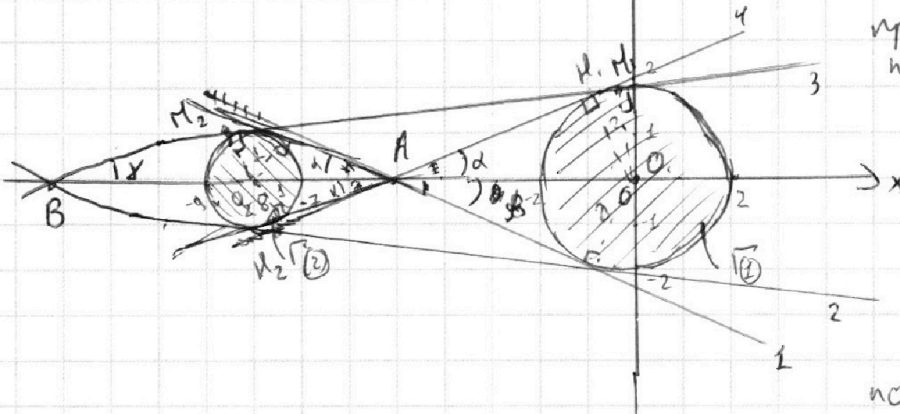
$(x+8)^2+y^2 \leq 1$  - график всех точек круга с центром  $(-8; 0)$  и рад. 1

$x^2+y^2 \geq 4$  - график всех точек ~~а не~~ входящих в круг, с центром в  $(0; 0)$  и рад. 2

Заметим, что прямые 4 и 3 будут симметричны отн. ОХ и прямой 1 и 2

в окружность (станете перпендикулярны).

Построим график, тогда в графиках возьмем прямые  $ax-y+10b=y$ , дадут прямые 1, 2, 3, 4 (с график.)



т.е. они все касаются окружности, то будут или будут перпендикулярны, которые пойдут под

расстояние до осей рав окружности от этой прямой будет равна их радиусу.

или будут перпендикулярны, тогда

поэтому  $ax-y+10b=y$   $\Leftrightarrow$   $((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)$

- (1)  $O_2$  - рад. окр. с центром в  $(-8; 0)$
- (2)  $O_1$  - рад. окр. с центром в  $(0; 0)$

(3) А - точка пересечения прямых 4 и 1 на прямой  $ax-y+10b=y$ , т.е. в  $(-8; 0)$  или перпендикулярно оси ОХ

они перпендикулярны оси ОХ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(5) 
$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ (x+9)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + 10b \\ x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

(1) проведем касан. в ц. центров обеих оуп. в точку касан. с касательн.  $L \perp AK_1$ , они будут равны радиусам соотв. оуп. ( $O_1K_1$  и  $O_2K_2$ )

из центра  $O_2$  проведем касан.  $L_2$  к оуп.  $O_1K_1$  (верт.)  $\Rightarrow$   
 $AK_2 = 8 - AK_1$   
 из центра  $O_1$  проведем касан.  $L_1$  к оуп.  $O_2K_2$  ( $= 90^\circ$ )  $\Rightarrow$

$\Rightarrow O_2K_2 \perp AK_1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow AK_2 : AK_1 = O_2K_2 : O_1K_1 = 1 : 2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \begin{cases} AK_2 = \frac{8}{3} \\ AK_1 = \frac{16}{3} \end{cases}$   
 $AK_2 + AK_1 = 8$   
 $O_2K_2 = 0$

из центра  $O_1$  проведем касан.  $L_1$  к оуп.  $O_2K_2$ , тогда:  $3^2 - 4 = x^2$

$\Rightarrow \frac{16^2 - 3^2 \cdot 4}{3^2} = x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{(16-6)(16+6)}}{3}$   
 (или  $x > 0$ )

$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{22 \cdot 10}}{3} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{55}}{3}$

тогда  $\text{tg} \alpha = \frac{2}{\frac{2\sqrt{55}}{3}} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$

из св-ва касан. прямой:  $ax + 10b = y$ ,  $\text{tg} \alpha = \text{tg} \alpha$ , значит

а касан. прямая касается оуп.  $O_1K_1$  в точке  $K_1$  на расстоянии  $\frac{2\sqrt{55}}{3}$  от  $O_1K_1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(2)  $\beta$ -точки пересечения прямых 3 и 2 с осью  $Ox$ , они принадлежат одной прямой, т.к. симметричны относительно  $Ox$ .

проведем высоты из центров на прямую  $\gamma - O_1M_1$  и  $O_2M_2$ ,

они равны радиусам соотв. окружностей.

$$\angle M_2BO_2 = \angle M_1O_1B$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle M_2BO_2 = \angle M_1O_1B \\ \angle BO_2M_2 = \angle BO_1M_1 (=90^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BO_2M_2 \sim \triangle BO_1M_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BO_1 : BO_2 = OM_1 : OM_2 = 2 : 1 \Rightarrow BO_1 = 2BO_2 (=8)$$

$$\left( \begin{array}{l} BO_1 = BO_2 + O_2O_1 \\ BO_1 = 2BO_2 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} BO_2 = 8 \\ BO_1 = 16 \end{array} \right)$$

из г. Пифагора:  $BO_2^2 = M_2O_2^2 + BM_2^2 \Leftrightarrow 8^2 = 1^2 + M_2O_2^2 \Leftrightarrow M_2O_2 = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}$

Тогда  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{\sqrt{63}}{63}$

из вида графика  $y = ax + b$ ,  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{63}}{63}$ , а значит

$b$  симметричен  $a$  относительно  $Ox$  и может принимать значения  $\pm \frac{\sqrt{63}}{63}$

$$\text{итого } a \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{63}}{63}, \pm \frac{3\sqrt{55}}{55} \right\}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{63}}{63}, \pm \frac{3\sqrt{55}}{55} \right\}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left( \frac{3\sqrt{4R-9}}{2} \right)^2 &= 9x + 20,25 \quad \Rightarrow 9(4R-9) = 18x + 40,5 \quad \Rightarrow \\ x &= R - 4,5 \\ \Rightarrow 36R - 81 &= 18R - 18 \cdot 4,5 + 40,5 \quad \Rightarrow 36R - 40,5 = 18R - 81 - \\ R & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left( 2\sqrt{R-2} \right)^2 = 2(R-2) \quad \Rightarrow 4(R-2) = 4(R-2)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

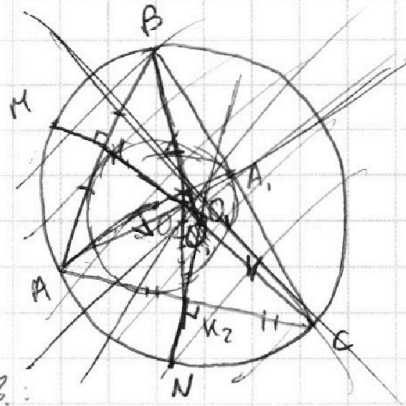
$\tilde{AM} = \tilde{MB}$ , т.к.  $M$  - сеп.  $AB$   
 $\tilde{AN} = \tilde{NC}$ , т.к.  $N$  - сеп.  $AC$

$AO_2$  - ?

$MK_1 = 4,5$ , т.к.  $MK_1$  - ради.

$NK_2 = 2$ , т.к.  $NK_2$  - ради.

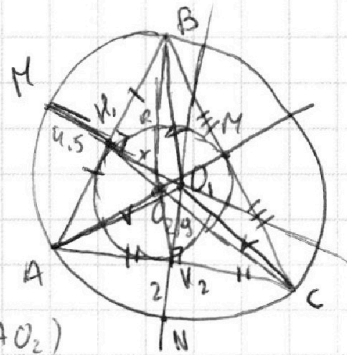
$O_1$  - центр опис. оуп.



1) Тогда по теореме о хордах равных дуг:

$$\begin{cases} AK_1 = K_1B \\ MK_1 \perp AB \end{cases} \Rightarrow K_1 \in MO_1$$

аналог.  $\begin{cases} AK_2 = K_2C \\ NK_2 \perp AC \end{cases} \Rightarrow K_2 \in AO_2$



2) проведем  $AO_2$  до перес. с  $BC$

( $M = BC \cap AO_2$ )

тогда, т.к.  $O_2$  лежит на медиане  $AM$   $\triangle ABC$ , т.к.  $SO_2$  - впис. оуп.

$BM = MC$

т.к.  $O_2$  - центр перес. мед., то  $AO_2 : O_2M = 2 : 1 \Rightarrow AO_2 = \frac{2}{3} AM$

обозначим  $K_1O_1$  за  $x$ , тогда  $x + 4,5 = R$

( $R$  - ради. больш. оуп.)

обозначим  $O_1K_2$  за  $y$ , тогда  $y + 2 = R$

$$2) \begin{cases} x^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R^2 \quad (M_3 \in AK_1O_1) \\ y^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = R^2 \quad (M_3 \in AK_2O_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2 - 9R + 20,25 = R^2 - \frac{AB^2}{4} \\ R^2 - 4R + 16 = R^2 - \frac{AC^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36R - AB^2 = 81 \\ 416R - AC^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = 36R - 81 \\ AC^2 = 416R - 16 \end{cases} \begin{matrix} AC > 0 \\ AB > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = 3\sqrt{4R-9} \\ AC = 4\sqrt{R-1} \end{cases}$$

$AK_2 : K_2C = 2 : 1 \Rightarrow (2R - 2) : 2$

$AK_1 : K_1B = 4,5 : 4,5 = (2x + 4,5) : 4,5$  (т.к.  $O_1$  - центр опис. оуп.  $\triangle ABC$ )  $\Leftrightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \Leftrightarrow$$

ОДЗ:  

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{2(x+0,5)^2 + 0,5} = 2 - 7x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x-3) + 2(x+0,5)^2 + 0,5 - 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2(x+0,5)^2 + 0,5)} = (2-7x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2(x+0,5)^2 + 0,5)} = 4 - 28x + 49x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2(x+0,5)^2 + 0,5)} = 4 - 28x + 49x^2 \Leftrightarrow 45x^2 - 25x = -2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2 + 2x + 1)}$$

$$\Leftrightarrow (5x(9x-5))^2 = 4(x-1)(2x-3)(2x^2 + 2x + 1) \Leftrightarrow$$

$$25x^2(81x^2 - 90x + 25) = 4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) \Leftrightarrow$$

$$25 \cdot 81 \cdot x^4 - 90 \cdot 25 \cdot x^3 + 25^2 \cdot x^2 = m^2(m^2 + 2m + 1) + 4m^2 - 4m^2 + 3m^2 - 4m^2 =$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3)$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 5x + 3 + 3x - 2 = (x-1)(2x-3) + (3x-2) =$$

$$2x^2 + 2x + 1 = (2x^2 - 5x + 3) + (7x - 2) =$$

$$(x-1)(2x-3) = -(2-7x)$$

$$\Leftrightarrow m^2(m^2 + 2m + 1) + 4m^2 - 4m^2 + 3m^2 - 4m^2 = (x-1)(2x-3) + (x-1)(2x-3) - (2-7x) =$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{t-m} = mx \Leftrightarrow t = m^2 + t - m + 2mt + m^2 \Leftrightarrow m^2 - m^2 = -2m\sqrt{t-m} \quad m-1 = -2\sqrt{t-m} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t + t - m - \sqrt{t(t-m)} = m^2 \Leftrightarrow 2t - m = 2\sqrt{t(t-m)} \Leftrightarrow$$

$$m^2 + 2m + 1 = 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c \in \mathbb{N} \quad a, b, c : 2^{14} 7^{10}, \quad b, c : 2^{12} 7^{17}, \quad a, c : 2^{20} 7^{37}$$

т.к. ~~мы хотим наименьшее значение произведения abc, если  
мы хотим, чтобы:  $ab = 2^{14} 7^{10}, b, c = 2^{12} 7^{17}, a, c = 2^{20} 7^{37}$ , т.к. если~~

они будут больше, то

$$\begin{cases} ab : 2^{14} 7^{10} \\ bc : 2^{12} 7^{17} \\ ac : 2^{20} 7^{37} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 = 2^{51} 7^{64}$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{m}{n} \quad \frac{a}{b} = \frac{m}{n} - 1 = \frac{m-n}{n}$$

$$\frac{2+7}{4-6-2-7+49} = \frac{9}{53-84} = \frac{9}{-31}$$

$$a = kb \quad b^2 k = k^2 + 1 \quad a = m + b \quad a + b = 8$$

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{2^3 7^7} \Rightarrow a = c \cdot 2^3 \cdot 7^7 = \frac{9}{-31}$$

$$a + b = m \quad (a+b)^2 - 8ab = m^2 - 8ab = m$$

$$\frac{2^{14} \cdot 7^{10}}{8 m^2} = \frac{2^{14} \cdot 7^{10} \cdot c}{8 m^2} = 2^{20} \cdot 7^{37} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b = m \\ 8ab = m^2 - m \end{cases} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{m^2 - m}{ab} = \frac{m^2 - m}{\frac{m^2 - m}{8}} = 8$$

$$\frac{a+b}{ab} = 8 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = 8 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = 8$$

$$a = kb \quad \frac{(a+b)^2 - 8ab}{a+b} = \frac{b^2(k+1)^2 - 8b^2k}{b(k+1)} = \frac{b(k+1)}{b^2(k+1)^2 - 8b^2k} = \frac{b(k+1)}{b^2((k+1)^2 - 8k)}$$

$$= \frac{k+1}{b((k+1)^2 - 8k)} = \frac{k+1}{k+1 : m}$$

$$\frac{(a+b)^2 - 8ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{a+b} - \frac{8ab}{a+b} = a+b - \frac{8ab}{a+b} = k$$

$$= \frac{k+1}{b(k^2 + 2k + 1 - 8k)} = \frac{k+1}{b(k^2 - 6k + 1)}$$

$$\begin{cases} a+b = m \\ 8ab = k m^2 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$O_1$  - центр  $\omega$   
 $O_2$  - центр  $\Omega$   
 $R_2 =$

$25x^2 - 31x^2 + 25 = 0$   
 $8x^2 + 6x\sqrt{1-x^2} = 0$   
 $7x^2 + 6x\sqrt{1-x^2} = 1+x^2$   
 $64x^4 - 160x^2 + 100 = 36x^2(1-x^2)$   
 $64x^4 + 160x^2 + 100 = 36x^2(1+x^2)$   
 $100x^4 - 196x^2 + 100 = 0$   
 $25x^2 - 49x^2 + 25 = 0$   
 $2x^2 - 2x + 10 = 4$   
 $100 =$   
 $1.5\sqrt{R_2}$   
 $R$   
 $AB = 2\sqrt{R^2 - x^2}$   
 $R^2 - R \cdot 4.5$   
 $R$   
 $AF \cdot FB = 9x^2$   
 $3 \cdot (R-4)(R-1) - R^2(x+3)$   
 $R^2$   
 $31$   
 $31$   
 $31$   
 $10 - \sqrt{1+d^2}$   
 $10\sqrt{1+d^2} - 1 = 7x^2 + 6xd$   
 $7x^2 + 6xd - (10\sqrt{1+d^2} - 1) = 0$   
 $6d \pm \sqrt{36d^2 + 29(10\sqrt{1+d^2} - 1)}$   
 $x = \frac{-49 \pm 49\sqrt{1+40}}{2 \cdot 49}$   
 $R^2 = (R-2)^2 + 2\sqrt{R^2 - 1} \cdot u(R-1)$   
 $R^2 = R^2 - 4R + 4 + 2\sqrt{R^2 - 1} \cdot u(R-1)$

Additional handwritten notes and calculations include:  
 $2x^2 - 2x + 10 = 4$   
 $100 = 49x^2 + 49x^4 + \frac{1080}{216}$   
 $49x^2 + 49x^4 + 100 = 0$   
 $-49 \pm \sqrt{74 + 4 \cdot 74 \cdot 100}$   
 $2 \cdot 49$   
 $R^2 = R^2 - 4R + 4 + 2\sqrt{R^2 - 1} \cdot u(R-1)$