МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 $\begin{cases} ab \vdots 2^{14}\cdot 7^{10} \\ bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{17} \\ ac \vdots 2^{20}\cdot 7^{37} \end{cases}$, где $a,b,c\in N$. Пусть $\begin{cases} m=\dfrac{ab}{2^{14}\cdot 7^{10}} \\ n=\dfrac{bc}{2^{17}\cdot 7^{17}} \\ k=\dfrac{ac}{2^{20}\cdot 7^{37}} \end{cases}$, ~~тогда~~ где

$m,n,k\in N$. Тогда $a^2b^2c^2=2^{51}\cdot 7^{64}\cdot mnk$, т.к. $\begin{cases} a,b,c\in N \\ m,n,k\in N \end{cases}$, то

$abc=2^{25}\cdot 7^{32}\sqrt{2mnk}$, т.к. $ac \vdots 2^{20}\cdot 7^{37}$, то $abc \vdots 2^{20}\cdot 7^{37}$,

а значит $\sqrt{2mnk} \vdots 7^5$, т.к. $abc=2^{25}\cdot 7^{32}\cdot\sqrt{2mnk}$.

abc - min, если $\sqrt{2mnk}$ - min, ~~где~~ тогда $\begin{cases} mnk \vdots 2 \ (\mathrm{I}) \\ \sqrt{2mnk} \vdots 7^{5} \ (\mathrm{II}) \end{cases}$

(I) должно выполняться, т.к. $abc\in N$, а значит и $\sqrt{2mnk}\in N$,

тогда ~~$mnk \cdot 2^{25}$~~ $abc=2^{25}\cdot 7^{32}\sqrt{2\cdot(2\cdot 7^{10})}=2^{26}\cdot 7^{37}$

Меньше не может быть, т.к. иначе $\sqrt{2mnk}\notin N$

Ответ: $2^{26}\cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2 $\frac{a}{b}$ – несокр. $\frac{(a+b)}{a^2-6ab+b^2}$

~~m – наиб., если $\frac{(a+b)}{a^2-6ab+b^2}=1$, т.е. $m=(a+b)=a^2-6ab+b^2$~~

~~$a+b=a^2-6ab+b^2 \Leftrightarrow a^2-a(6b+1)+b^2-b=0$~~

~~$D=(6b+1)^2-4\cdot(b^2-b)=32b^2+16b+1$.~~

~~$a=\frac{6b+1\pm\sqrt{32b^2+16b+1}}{2}$, т.к. $a,b\in N$, то $32b^2+16b+1$~~

~~$\begin{cases}(a+b)=mk\\ a^2-6ab+b^2=mn\end{cases}$, где $\frac{k}{n}$ – несокр. дробь, т.е. НОД$(k,n)=1$ и НОД$(a,b)=1$.~~

~~$a=mk-b$ $\quad m,n,k\in N$.~~

~~$m^2k^2+b^2-2mkb-6mkb+6b^2+b^2=mn$~~

~~$m^2k^2-8mkb+8b^2-mn=0 \Leftrightarrow k^2\cdot m^2-m(8kb+n)+8b^2=0$.~~

~~$D=(8bk+n)^2-4k^2\cdot 8b^2=64b^2k^2+n^2+16bkn-32b^2k^2=16(2b^2k^2+bkn)+n^2$.~~

~~$f'(m)=2mk-8kb+n$ $\quad f'(m)=0 \Leftrightarrow m=\frac{8bk-n}{2k}=4b-\frac{n}{2k}$~~

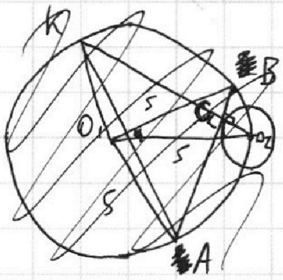
~~$(a+b)=mk=\frac{8bk-n}{2}$~~

m наиб, если $a^2-6ab+b^2 \vdots (a+b)$, т.е. $(a+b)^2-8ab \vdots (a+b) \Rightarrow 8ab \vdots a+b$, т.е.

$8ab=ka+kb \Leftrightarrow$ ~~$b=$~~ $b=\frac{a\cdot k}{8a+k}$, где $a,k\in N$, т.е.

$\begin{cases}a=9\\ b=1\end{cases}$, тогда $m=(a+b)=10$.

Ответ: $m=10$



Пусть O_1 – ~~середина~~ центр Ω

O_2 – центр ω

т.к. AB – кас. ω, то $\angle O_2CB = 90^\circ$ (т.к. O_2C – радиус ω)

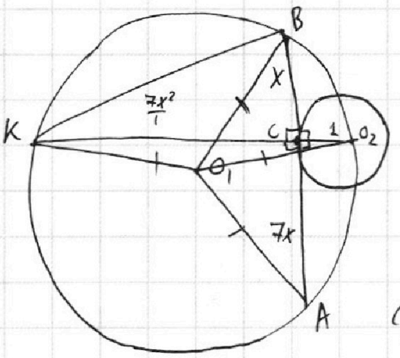
$(O_2C) \cap \Omega = \{K\}$

$AC \cdot CB = O_2C \cdot CK$ (хорды в Ω)

Пусть $CB = x$, тогда из условия $\frac{AC}{CB} = 7$ $AC = 7x$.

$O_2C = 1$, как радиус ω. Тогда $7x \cdot x = 1 \cdot CK \Leftrightarrow CK = \frac{7x^2}{1}$.

Проведем AK: $\angle ACK = 90^\circ$, как вертикальный с углом $\angle O_2CB$



$$\frac{\smile AK + \smile O_2B}{2} = 90^\circ \ (=\angle KCA), \text{ т.е.}$$

$$\smile AK + \smile O_2B = \smile KB + \smile O_2A = 180^\circ$$

$$\begin{cases} BK = \frac{x}{1} \cancel{\ldots} \sqrt{49x^2+1} \\ O_2A = \sqrt{49x^2+1} \end{cases}$$ по т. Пифагора.

По т.косинусов:

$$\begin{cases} BK^2 = O_1K^2 + O_1B^2 - 2O_1K\,O_1B \cdot \cos\angle KO_1B \\ O_2A^2 = O_1O_2^2 + O_1A^2 - 2O_1O_2 \cdot O_1A \cdot \cos\angle O_2O_1A \end{cases}$$, где

$\angle KO_1B + \angle O_2O_1A = 180^\circ$ (т.к. $\smile KB + \smile O_2A = 180^\circ$).

$$\begin{cases} \frac{x^2}{1}(49x^2+1) = 25 - 50 \cdot \cos\angle KO_1B \\ 49x^2+1 = 25 - 50 \cdot \cos\angle O_2O_1A \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{1} = \frac{1 - 2\cos\angle KO_1B}{1 + 2\cos\angle KO_1B}, \text{ т.е.}$$

$$x = \sqrt{\frac{1 - 2\cos\angle KO_1B}{1 + 2\cos\angle KO_1B}} \cdot 1 \quad \text{или} \quad x = \sqrt{\frac{1 + 2\cos\angle O_2O_1A}{1 - 2\cos\angle O_2O_1A}} \cdot 1$$

$$AK = \cancel{7x}\sqrt{49x^4 + 49x^2} = \frac{7x}{1}\sqrt{x^2+1}, \text{ тогда } x = \sqrt{\frac{1 + 2\cdot\cos 90^\circ}{1 - 2\cos 90^\circ}} = 1.$$

$AB = 8x = 8$.

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4. $\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$

Рассм. левую часть: При $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-5x+3=0\\ 2x^2+2x+1=0\end{cases}$ – нет решений, т.к. $2x^2+2x+1=0$, $D=-4<0$.

При $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\neq 0$:

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=\frac{\left(\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}}$$

$$=\frac{2x^2-5x+3-2x^2-2x-1}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}}=\frac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}}.$$

Имеем: $\dfrac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}}=2-7x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2-7x)\dfrac{1-\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{\begin{cases}2-7x=0\\ \sqrt{2x^2-5x+3}=1-\sqrt{2x^2+2x+1}\end{cases}}$ $\left[\begin{array}{l}2-7x=0\ (I)\\ \sqrt{2x^2-5x+3}=1-\sqrt{2x^2+2x+1}\ (II)\end{array}\right.$

(II): $\sqrt{2x^2-5x+3}=1\sqrt{2x^2+2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-5x+3=1+2x^2+2x+1-2\sqrt{2x^2+2x+1}\\ 2x^2-5x+3\geq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}7x-1=2\sqrt{2x^2+2x+1}\\ 2x^2-5x+3\geq 0\end{cases}$ ~~т.к. $2x^2+2x+1\geq 0$ ($f(x)=2x^2+2x+1$, $f'(x)=4x+2$, $f'(x)=0$~~

~~$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)+1=\frac{1}{2}$, т.е. $2x^2+2x+1\geq 0$)~~, то

$\Leftrightarrow \begin{cases}49x^2-14x+1=8x^2+8x+4\\ 2x^2-5x+3\geq 0\\ 7x-1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}41x^2-22x-3=0\\ \left[\begin{array}{l}x\leq 1\\ x\geq 1{,}5\end{array}\right.\\ x\geq \frac{1}{7}\end{cases} \Leftrightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
			X			

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 41x^2-22x-3=0 \quad (\text{III}) \\ \left[\begin{array}{l} \frac{1}{7}\le x\le 1 \\ x\ge 1{,}5 \end{array}\right. \end{cases}$$

(III): $41x^2-22x-3=0.$

$D=(-22)^2-4\cdot(-3)\cdot 41=484+492=976$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{22+\sqrt{976}}{2\cdot 41}=\dfrac{11+2\sqrt{61}}{41} \\ x=\dfrac{22-\sqrt{976}}{2\cdot 41}=\dfrac{11-2\sqrt{61}}{41} \end{array}\right.,$$

Тогда
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{11+2\sqrt{61}}{41} \\ x=\dfrac{11-2\sqrt{61}}{41} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \frac{1}{7}\le x\le 1 \\ x\ge 1{,}5 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x=\frac{11+2\sqrt{61}}{41}, \text{ т.к. } \frac{11-2\sqrt{61}}{41}<0.$$

Имеем:
$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{7} \\ x=\dfrac{11+2\sqrt{61}}{41} \end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{2}{7}$ или $x=\frac{11+2\sqrt{61}}{41}$

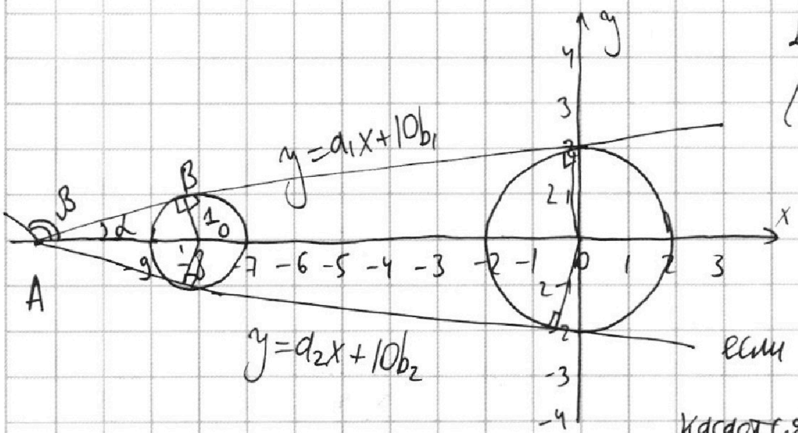
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \quad (I) \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \le 0 \quad (II) \end{cases}$$

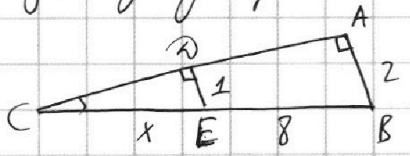
(I): $y = ax + 10b$.



Два решения достижимо, если прямая $y = ax + 10b$ касается обеих окружностей:

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ (x+8)^2+y^2=1 \end{cases}$$

, если она пересекает одну из ~~их~~ них, то решений бесконечное кол-во, если касается только одной, то 1 решение, если не касается ни одной, то 0 решений, т.е. существуют два решения (две касательные)



△ DCE ~ △ ACB по 2 углам, т.е.

$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CB}$. $\frac{1}{2} = \frac{x}{x+8} \Leftrightarrow x = 8$.

Тогда $A(-16;0)$ ~~$0 = -16k+b \Leftrightarrow b = 16k$~~.

$0 = -16a_1 + 10b_1 \Leftrightarrow 10b_1 = 16a_1$. Тогда $y = a_1x + 16a_1$.

~~Ди~~ ~~Имеем: $\begin{cases} y = a_1x+16a_1 \\ y^2+x^2=4 \end{cases}$ (точка на окружности)~~ ~~Из графика.~~

$a_1 = tg\alpha$, где ~~$tg\alpha = \frac{1}{8}$~~, т.е. ~~$a_1 = \frac{1}{8}$~~

$tg\alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{OB}{\sqrt{AO^2-OB^2}}$ (по т. Пифагора $AB = \sqrt{AO^2-OB^2}$, т.к. OB - радиус к кас.)

$tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{64-1}} = \frac{1}{\sqrt{63}}$, т.е. $a_1 = \frac{1}{\sqrt{63}}$.

$a_2 = tg\beta = tg(\pi - \alpha) = -tg\alpha = -\frac{1}{\sqrt{63}}$. Ответ: $a = \pm\frac{1}{\sqrt{63}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ $\frac{a}{b}$ - несократима НОД$(a,b)=1$. $a\in N$

НОК$(a,b)=ab$ $b\in N$.

$m(a+b)=a^2-6ab+b^2$ m - ?

$a^2-6ab-am+b^2-bm=0$

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=\frac{2x^2-5x+3-2x^2-2x-1}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}}=$

$=\frac{-7x+2}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}}=2-7x$, т.е. $2=7x$ - решение $x=\frac{2}{7}$!

если нет, то $-\frac{1}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}}=1$ - нет решений!

$\begin{cases}2x^2-5x+3=0 & D=25-24=1\\ 2x^2+2x+1=0 & D=4-8\end{cases}$

$484+492=976$

$492+36=528$

$41\cdot4=164$

$164\cdot3=492$

$528|2$
$264|2$
$132|2$
$66|2$
$33|11$
$3|3$
$1|1$

$\sqrt{2x^2-5x+3}=1-\sqrt{2x^2+2x+1}$ $2x^2-5x+3=1+2x^2+2x+1-2\sqrt{2x^2+2x+1}$

$-7x+1=-2\sqrt{2x^2+2x+1}$ $49x^2+14x+1=8x^2+8x+4$

$41x^2+6x-3=0$. $D=36+4\cdot3\cdot41=36+492=528$

$x=\frac{-6\pm4\sqrt{33}}{2\cdot41}=\frac{-3\pm2\sqrt{33}}{41}$. $-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$.

$f=4x+2$ $f'=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$. $f(-\frac{1}{2})=2\cdot\frac{1}{4}-1+1=\frac{1}{2}$.

$41x^2-22x-3$

$22\cdot22=484$

$2x^2-5x+3\geq0$.
$D=25-24=1$.
$x=\frac{5\pm1}{4}=\left[\begin{array}{l}1\\1{,}5\end{array}\right.$.

$41\cdot12=492$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$2\left(x^2-2{,}5x+\frac{25}{16}\right) \qquad 2\left(x^2+x+\frac14\right)+\frac12$$

$$3-\frac{25}{8} \qquad -\frac18$$

$$\sqrt{2\left(x-\frac54\right)^2-\frac18} - \sqrt{2\left(x+\frac14\right)^2+\frac12} = 2-7x$$

$$\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right)\le 0. \end{cases}$$

a, b – ? Для a найдется b, что есть 2 решения

976 2
488 2
244 2
122 2
61

$61\cdot 16$

19616 | 2
8808 | 2
4404 | 2
2202 | 2
1101 | 3
367

$32 \times 32 = \ldots$; $31 \times 31 = 961$

$49 \times 3 = 147$; $41 \times 41 = 1681$

155

$1+x^2$

$49+36=85$

$7<\sqrt{61}<8$

$11+2\sqrt{61}$

$11+2\sqrt{61} \approx 11+2\cdot 7{,}5 = 26.$

$\frac{26}{41}.$

$11-2\sqrt{61} \approx 11-2\cdot 7{,}5.$

$2\cdot\left(\frac27\right)^2 = \frac{8}{49}$

$2\cdot\left(\frac27\right)^2-5\cdot\frac27+3 = \frac{8}{49}-\frac{70}{49}+\frac{49\cdot 3}{49} = \frac{85}{49}.$

$2\cdot\left(\frac27\right)^2+2\cdot\frac27+1 = \frac{8+28+49}{49} =$

$32b^2+16b+1-x^2=0.$

$256-4\cdot 2\cdot 16\cdot(1-x^2) = 16(16-8+8x^2) = 16(8+8x^2) =$

$49x^4+x^2-1-49x^2-14x^2$

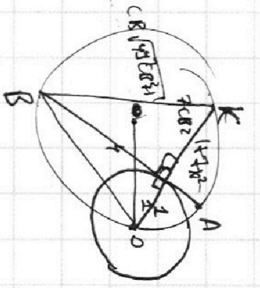
$= 2^7(1+x^2)$

$b = \frac{-16+\sqrt{2^7(1+x^2)}}{64} = \frac{-2+\sqrt{2(1+x^2)}}{8}$

$2\left(\frac{11+2\sqrt{61}}{41}\right)^2 = \frac{2(121+122+44\sqrt{61})}{1681} = \frac{486+44\sqrt{61}}{1681}.$

$\frac{486+44\sqrt{61}}{1681} - \frac{5\cdot 41(11+2\sqrt{61})}{1681}+3$

$\cancel{-5x+3 = +2x+1}$



$\frac{AC}{CB}=7.$ AB – ?

$49 \cdot 4 = 196$; $\frac{49}{4}\cdot 16 = 196$

$AC\cdot CB = OC\cdot CK$

$7CB^2 = CK.$

$\sqrt{49CB^4+CB^2} = CB\sqrt{49CB^2+1}$

$CB\sqrt{49CB^2+1} = \frac52 \Leftrightarrow 4CB^2(49CB^2+1) = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 196CB^4+4CB^2-25=0.$ $D = 16+19600 = 19616.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

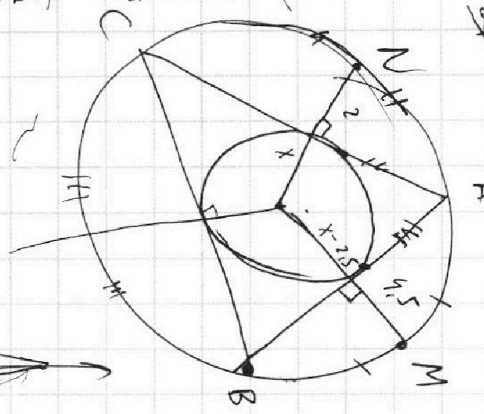
Черновик

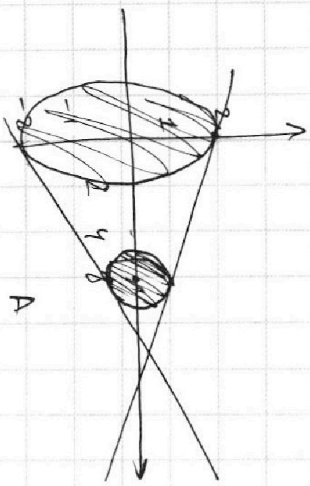
$0 = -16k + b$. $b = -16k$.

$a^2 - 6ab + b^2 = n(a+b)$, т.е. $m = a+b$.

$y = kx - 16k$.

$y^2 + x^2 = 2$





$\sqrt{16^2 - 2^2}$

$\frac{\sqrt{14 \cdot 18}}{2} = 7 \cdot 9 = 63$

$y = a_1 x + b$

$y = \sqrt{4 - x^2}$

$x^2 + y^2 < 4$

$x^2 + y^2 + 16x + 63 > 0$

$A(-16; 0)$.

4. $\frac{1}{2} = \frac{x}{x+8}$.

$x = 8$.

$0 = -16k + b$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k$ $\quad a^2b^2c^2 = mnk \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$ $\quad 32$

$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} n$ $\quad abc = 7^{30} \cdot 2^{25} \sqrt{2mnk}$.

$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot m$ $\quad$ т.к. $a, b, c \in N$, то $\sqrt{2mnk} \in N$,

~~а значит~~ $m, n, k \in N$ и $\sqrt{2mnk}$ - минимален.

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

$$\sqrt{2mnk} \geq \frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{k}} = \frac{4mnk}{mnk+2mn+2nk+2mk}$$

$\min(abc)$, если $\sqrt{2mnk} = \sqrt{4}$, т.е. $\begin{cases} m=1 \\ n=1 \\ k=2 \end{cases}$, тогда $abc = 7^{30} \cdot 2^{26}$.

$\times 32$, 4, 128

$a^2-6ab+b^2$. $D = 36b^2-4b^2=32b^2$.

$$a = \frac{6b \pm 4\sqrt{2}b}{2} = \boxed{3b \pm \sqrt{2}b} \quad (a-3b-\sqrt{2}b)(a-3b+\sqrt{2}b).$$

$(a+b)^2 - 8ab$. $\quad \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$ m - наиб, если $\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} = 1$.

$\Leftrightarrow a^2 - 6ab - a + b^2 - b = 0$. $\quad D = 36b^2+12b+1 - 4b^2+4b = 32b^2+16b+1$

$32b^2+16b+1$ - полный квадрат.

$$a = \frac{6b+1 \pm \sqrt{32b^2+16b+1}}{2}$$

$b=0$. $b=1$. $b=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

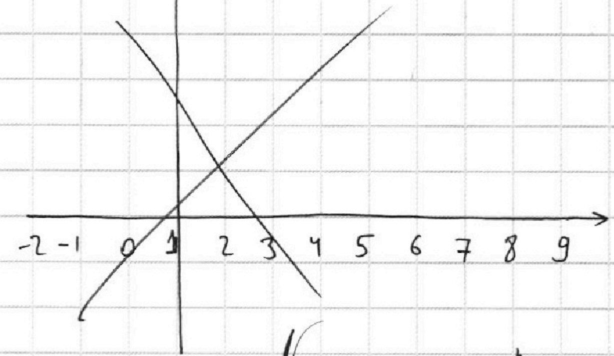
МФТИ

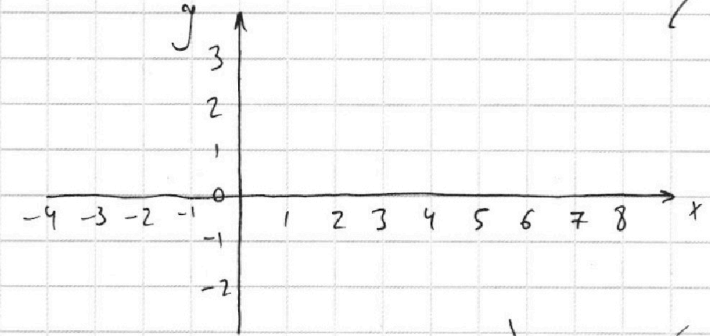
№6. $\begin{cases} ax-y+10b=0 \ (\text{I}) \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\leq 0 \ (\text{II}) \end{cases}$ Черновик.

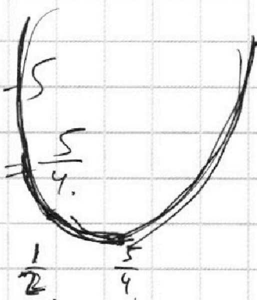
(I): $y=ax+10b$.

~~(II): $(x+8)^2+y^2=1$~~

~~$x^2+y^2=4$~~







$4x=5$

$x=\frac{5}{4}$.

$\frac{3}{7}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{4}$.

$$\frac{2(y_2-y_1)}{12-(y_2-y_1)}=\frac{-2(12-(y_2-y_1))+24}{12-(y_2-y_1)}=-2+\frac{24}{12-(y_2-y_1)}$$

$\approx\frac{2}{3}$

$\approx\frac{26}{41}$, $2\cdot\left(\frac{26}{41}\right)^2-5\cdot\frac{26}{41}+3=\frac{8}{9}-\frac{20}{9}+3=\frac{15}{9}$.

$\frac{8}{9}+\frac{12}{9}+1=\frac{39}{9}$.

$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{39}}{3}=\frac{\sqrt{9}}{3}$. ($\approx 4$, ≈ 6)

$\sqrt{15}+\sqrt{39}\approx 10$.

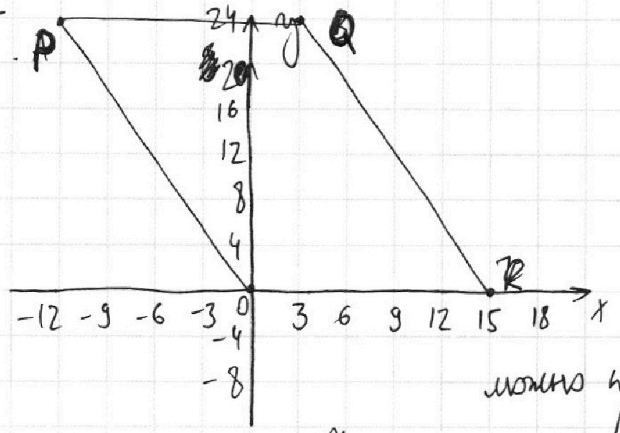
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5.



$$\begin{cases} -12 \le x \le 15 \\ 0 \le y \le 24 \end{cases}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

Т.к. через любые две точки можно провести прямую и притом только одну, то: $y = kx+b$, где $\begin{cases} k = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ b = \dfrac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2-x_1} \end{cases}$

$$y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x + \frac{y_1x_2-y_2x_1}{x_2-x_1}, \text{ где } \begin{cases} k_{QR} = 2 = k_{PO} \\ k_{PQ} = 0 = k_{OR} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{k}+1\right)(y_2-y_1) = 12 \\ (2+k)(x_2-x_1) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} k = \frac{12}{x_2-x_1} - 2 \end{cases}} \begin{cases} k = \dfrac{1}{\frac{6}{y_2-y_1} - \frac{1}{2}} \\ k = \dfrac{12}{x_2-x_1} - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{2y_2 - 2y_1}{12 - (y_2-y_1)} \\ k = \dfrac{12}{x_2-x_1} - 2 \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} \Delta y = y_2 - y_1 \\ \Delta x = x_2 - x_1 \end{cases}$. Тогда:

$\Delta x = 1$: $k = 10$ $\Delta y = 10$

$\Delta x = 2$: $k = 4$ $\Delta y = 8$

$\Delta x = 3$: $k = 2$ $\Delta y = 6$

$\Delta x = 4$: $k = 1$ $\Delta y = 4$

$\Delta x = 5$: $k = 0{,}4$ $\Delta y = 2$

$\Delta x = 6$: $k = 0$ $\Delta y = 0$

~~$\Delta x = 7$ $k = -\frac{2}{7}$ $\Delta y = -2$~~

~~$\Delta x = 8$ $k = -\frac{1}{2}$ $\Delta y = -4$~~

~~$\Delta x = 9$ $k =$~~

~~$\Delta x = 10$ $k =$~~

~~$\Delta x = 11$ $k =$~~

~~$\Delta x = 12$ $k =$~~

~~$\Delta x = 13$ $k =$~~

по Δy

Аналогичным образом получим k_i прямых, тогда кол-во пар: $24 \cdot 2 = \cancel{84}$ 48 (каждая прямая даст две точки)

Ответ: ~~84 пары~~. 48 пар

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ