МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 $\begin{cases} ab \vdots 2^{14}\cdot 7^{10} \\ bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{17} \\ ac \vdots 2^{20}\cdot 7^{37} \end{cases}$, где $a,b,c\in N$. Пусть $\begin{cases} m = \dfrac{ab}{2^{14}\cdot 7^{10}} \\ n = \dfrac{bc}{2^{17}\cdot 7^{17}} \\ k = \dfrac{ac}{2^{20}\cdot 7^{37}} \end{cases}$, ~~тогда~~ где

$m,n,k\in N$. Тогда $a^2b^2c^2 = 2^{51}\cdot 7^{64}\cdot mnk$, т.к. $\begin{cases} a,b,c\in N \\ m,n,k\in N \end{cases}$, то

$abc = 2^{25}\cdot 7^{32}\sqrt{2mnk}$, т.к. $ac \vdots 2^{20}\cdot 7^{37}$, то $abc \vdots 2^{20}\cdot 7^{37}$,

а значит $\sqrt{2mnk} \vdots 7^5$, т.к. $abc = 2^{25}\cdot 7^{32}\cdot\sqrt{2mnk}$.

$abc-\min$, если $\sqrt{2mnk}-\min$, ~~где~~ тогда $\begin{cases} mnk \vdots 2 \ (\mathrm{I}) \\ \sqrt{2mnk} \vdots 7^{5} \ (\mathrm{II}) \end{cases}$

(I) должно выполняться, т.к. $abc\in N$, а значит и $\sqrt{2mnk}\in N$,

тогда $abc = 2^{25}\cdot 7^{32}\sqrt{2\cdot(2\cdot 7^{10})} = 2^{26}\cdot 7^{37}$

Меньше не может быть, т.к. иначе $\sqrt{2mnk}\notin N$

Ответ: $2^{26}\cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 $\frac{a}{b}$ – несокр. $\frac{(a+b)}{a^2-6ab+b^2}$

m – наиб., если $\frac{(a+b)}{a^2-6ab+b^2} = 1$, т.е. $m = (a+b) = a^2-6ab+b^2$.

$a+b = a^2-6ab+b^2 \iff a^2 - a(6b+1) + b^2 - b = 0$.

$D = (6b+1)^2 - 4\cdot(b^2-b) = 32b^2+16b+1$.

$a = \frac{6b+1 \pm \sqrt{32b^2+16b+1}}{2}$, т.к. $a, b \in N$, то $32b^2+16b+1$

$\begin{cases}(a+b) = mk \\ a^2-6ab+b^2 = mn\end{cases}$, где $\frac{k}{n}$ – несокр. дробь, т.е. НОД$(k,n) = 1$ и НОД$(a,b) = 1$.

$a = mk - b$ $\qquad m, n, k \in N$.

$m^2k^2 + b^2 - 2mkb - 6mkb + 6b^2 + b^2 = mn$.

$m^2k^2 - 8mkb + 8b^2 - mn = 0 \iff k^2\cdot m^2 - m(8kb+n) + 8b^2 = 0$.

~~$D = (8bk+n)^2 - 4k^2\cdot 8b^2 = 64b^2k^2 + n^2 + 16bkn - 32b^2k^2 = 16(2b^2k^2+bkn)+n^2$.~~

$f'(m) = 2mk - 8kb + n$ $\quad f'(m) = 0 \iff m = \frac{8bk-n}{2k} = 4b - \frac{n}{2k}$

$(a+b) = mk = \frac{8bk-n}{2}$

m наиб, если $a^2-6ab+b^2 \vdots (a+b)$, т.е. $(a+b)^2 - 8ab \vdots (a+b) \Rightarrow 8ab \vdots a+b$, т.е.

$8ab = ka + kb \iff b = \frac{a\cdot k}{8a+k}$, где $a, k \in N$, т.е.

$\begin{cases}a = 9 \\ b = 1\end{cases}$, тогда $m = (a+b) = 10$.

Ответ: $m = 10$

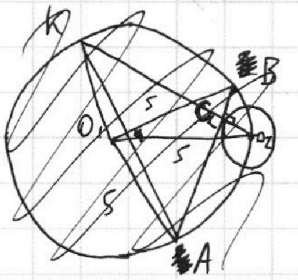
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть O_1 – ~~середина~~ центр Ω

O_2 - центр ω



т.к. AB - кас. ω, то $\angle O_2CB = 90°$ (т.к. O_2C – радиус ω)

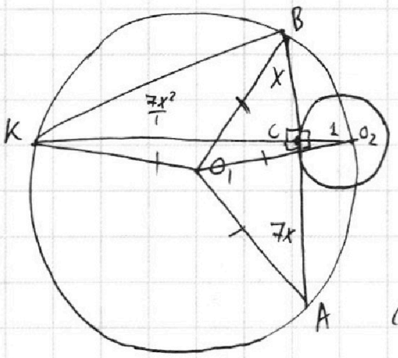
$(O_2C) \cap \Omega = \{K\}$

$AC \cdot CB = O_2C \cdot CK$ (хорды в Ω)

Пусть $CB = x$, тогда из условия $\frac{AC}{CB} = 7$ $AC = 7x$.

$O_2C = 1$, как радиус ω. Тогда $7x \cdot x = 1 \cdot CK \Leftrightarrow CK = \frac{7x^2}{1}$.

Проведем AK: $\angle ACK = 90°$, как вертикальный с углом $\angle O_2CB$



$$\frac{\smile AK + \smile O_2B}{2} = 90° (= \angle KCA), \text{ т.е.}$$

$$\smile AK + \smile O_2B = \smile KB + \smile O_2A = 180°$$

$$\begin{cases} BK = \frac{x}{1}\sqrt{49x^2+1} \\ O_2A = \sqrt{49x^2+1} \end{cases}$$ по т. Пифагора.

По т. косинусов:

$$\begin{cases} BK^2 = O_1K^2 + O_1B^2 - 2O_1K O_1B \cdot \cos\angle KO_1B \\ O_2A^2 = O_1O_2^2 + O_1A^2 - 2O_1O_2 \cdot O_1A \cdot \cos\angle O_2O_1A \end{cases}$$, где

$\angle KO_1B + \angle O_2O_1A = 180°$ (т.к. $\smile KB + \smile O_2A = 180°$).

$$\begin{cases} \frac{x^2}{1}(49x^2+1) = 25 - 50 \cdot \cos\angle KO_1B \\ 49x^2+1 = 25 - 50 \cdot \cos\angle O_2O_1A \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{1} = \frac{1-2\cos\angle KO_1B}{1+2\cos\angle KO_1B}, \text{ т.е.}$$

$$x = \sqrt{\frac{1-2\cos\angle KO_1B}{1+2\cos\angle KO_1B} \cdot 1} \quad \text{или} \quad x = \sqrt{\frac{1+2\cos\angle O_2O_1A}{1-2\cos\angle O_2O_1A} \cdot 1}$$

$AK = \cancel{7x}\sqrt{49x^4+49x^2} = \frac{7x}{1}\sqrt{x^2+1}$, тогда $x = \sqrt{\frac{1+2\cdot\cos 90°}{1-2\cos 90°}} = 1$.

$AB = 8x = 8$.

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4. $\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$.

Рассм. левую часть: При $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-5x+3=0\\ 2x^2+2x+1=0\end{cases}$ - нет решений, т.к. $2x^2+2x+1=0$, $D=-4<0$.

При $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\neq 0$:

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=\frac{(\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1})(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1})}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}}$$

$$=\frac{2x^2-5x+3-2x^2-2x-1}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}}=\frac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}}.$$

Имеем: $\frac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}}=2-7x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2-7x)\frac{1-\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\begin{matrix}2-7x=0\\ \sqrt{2x^2-5x+3}=1-\sqrt{2x^2+2x+1}\end{matrix}} \quad \left[\begin{array}{l}2-7x=0\ (I)\\ \sqrt{2x^2-5x+3}=1-\sqrt{2x^2+2x+1}\ (II)\end{array}\right.$$

(II): $\sqrt{2x^2-5x+3}=1\ \sqrt{2x^2+2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-5x+3=1+2x^2+2x+1-2\sqrt{2x^2+2x+1}\\ 2x^2-5x+3\geq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}7x-1=2\sqrt{2x^2+2x+1}\\ 2x^2-5x+3\geq 0\end{cases}$ ~~, т.к. $2x^2+2x+1\geq 0$ ($f(x)=2x^2+2x+1$, $f'(x)=4x+2$, $f'(x)=0$~~

~~$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2})=2\cdot(\frac{1}{2})^2+2(\frac{1}{2})+1=\frac{1}{2}$, т.е. $2x^2+2x+1\geq 0$)~~, то

$\Leftrightarrow \begin{cases}49x^2-14x+1=8x^2+8x+4\\ 2x^2-5x+3\geq 0\\ 7x-1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}41x^2-22x-3=0\\ \left[\begin{array}{l}x\leq 1\\ x\geq 1,5\end{array}\right.\\ x\geq \frac{1}{7}\end{cases} \Leftrightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 41x^2-22x-3=0 \quad (\text{III}) \\ \left[\begin{array}{l} \frac{1}{7}\le x\le 1 \\ x\ge 1{,}5 \end{array}\right. \end{cases}$$

(III): $41x^2-22x-3=0$.

$D=(-22)^2-4\cdot(-3)\cdot 41=484+492=976$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{22+\sqrt{976}}{2\cdot 41}=\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \\ x=\frac{22-\sqrt{976}}{2\cdot 41}=\frac{11-2\sqrt{61}}{41}, \end{array}\right.$$

Тогда
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \\ x=\frac{11-2\sqrt{61}}{41} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \frac{1}{7}\le x\le 1 \\ x\ge 1{,}5 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x=\frac{11+2\sqrt{61}}{41}, \text{ т.к. } \frac{11-2\sqrt{61}}{41}<0.$$

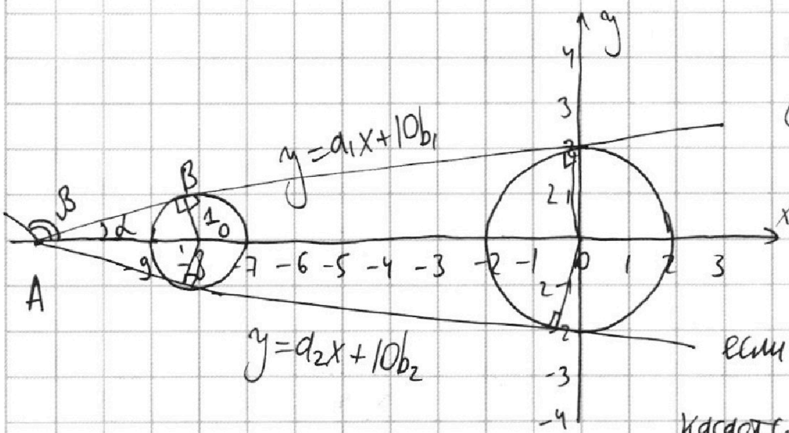
Имеем: $\left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{7} \\ x=\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \end{array}\right.$

Ответ: $x=\frac{2}{7}$ или $x=\frac{11+2\sqrt{61}}{41}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



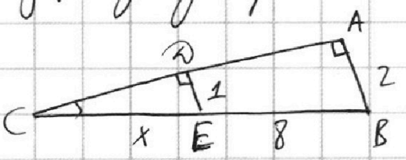
$$\begin{cases} ax-y+10b=0 \ (\mathrm{I}) \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \ (\mathrm{II}) \end{cases}$$

$(\mathrm{I}): \ y=ax+10b.$

Два решения достижимы, если прямая $y=ax+10b$ касается обеих окружностей:

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ (x+8)^2+y^2=1 \end{cases}$$

, если она пересекает одну из ~~их~~ них, то решений бесконечное кол-во, если касается только одной, то 1 решение, если не касается ни одной, то 0 решений, т.е. существуют два решения (две касательные)



$\triangle DCE \sim \triangle ACB$ по 2 углам, т.е.

$$\frac{DE}{AB}=\frac{CE}{CB}. \quad \frac{1}{2}=\frac{x}{x+8} \Leftrightarrow x=8.$$

Тогда $A(-16;0)$ ~~$0=-16k+b \Leftrightarrow b=16k$~~.

$0=-16a_1+10b_1 \Leftrightarrow 10b_1=16a_1$. Тогда $y=a_1x+16a_1$.

~~Для~~ ~~Имеем:~~ $\cancel{\begin{cases} y=a_1x+16a_1 \text{ (точка на окружности)} \\ y^2+x^2=4 \end{cases}}$ ~~Из графика.~~

$a_1=tg\alpha$, где ~~$tg\alpha=\frac{1}{8}$, т.е. $a_1=\frac{1}{8}$~~

$$tg\alpha=\frac{OB}{AB}=\frac{OB}{\sqrt{AO^2-OB^2}}$$ (по т. Пифагора $AB=\sqrt{AO^2-OB^2}$, т.к. OB - радиус к кас.)

$$tg\alpha=\frac{1}{\sqrt{64-1}}=\frac{1}{\sqrt{63}}, \text{ т.е. } a_1=\frac{1}{\sqrt{63}}.$$

$$a_2=tg\beta=tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha=-\frac{1}{\sqrt{63}}.$$

Ответ: $a=\pm\frac{1}{\sqrt{63}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ $\frac{a}{b}$ - несократима НОД$(a,b)=1$. $a \in N$

НОК$(a,b)=ab$. $b \in N$.

$m(a+b) = a^2 - 6ab + b^2$ m - ?

$a^2 - 6ab - am + b^2 - bm = 0$

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = \frac{2x^2-5x+3-2x^2-2x-1}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}} =$

$= \frac{-7x+2}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x$, т.е. $2 = 7x$ - решение $x = \frac{2}{7}$!

~~если нет, то~~ $-\frac{1}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}} = 1$ - нет решений!

$\begin{cases} 2x^2-5x+3=0 \\ 2x^2+2x+1=0 \end{cases}$ $D = 25-24 = 1$. $D = 4 - 8$

$\sqrt{2x^2-5x+3} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1}$ $2x^2-5x+3 = 1+2x^2+2x+1 - 2\boxed{\sqrt{2x^2+2x+1}}$

$-7x+1 = -2\sqrt{2x^2+2x+1}$ $49x^2+14x+1 = 8x^2+8x+4$

$41x^2+6x-3=0$. $D = 36+4\cdot3\cdot41 = 36+492 = 528$

$x = \frac{-6 \pm 4\sqrt{33}}{2\cdot41} = \frac{-3\pm2\sqrt{33}}{41}$. $-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

$f = 4x+2$ $f'=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. $f(-\frac{1}{2}) = 2\cdot\frac{1}{4}-1+1 = \frac{1}{2}$.

$41x^2-22x-3$

$2x^2-5x+3 \geq 0$.
$D = 25-24 = 1$.
$x = \frac{5\pm1}{4} = \left[\begin{array}{l} 1 \\ 1{,}5 \end{array}\right.$

Черновые вычисления:

$528 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot33$; $33 = 11\cdot3$

$41\cdot4 = 164$; $164\cdot3 = 492$; $492+36 = 528$; $484+492 = 976$

$22\cdot22 = 484$; $41\cdot12 = 492$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$2\left(x^2-2{,}5x+\frac{25}{16}\right)$ $\quad 2\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}$

$3-\frac{25}{8} = -\frac{1}{8}$

$$\sqrt{2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}} - \sqrt{2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}} = 2-7x$$

976 2, 488 2, 244 2, 122, 61

$61\cdot 16$

19616 2, 9808 2, 4404 2, 2202 2, 1101 3, 367

$$\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right)\le 0. \end{cases}$$

a, b – ? Для a найдется b, что есть 2 решения

$49+36=85$ $\quad 1+x^2$ $\quad 155$

$32b^2+16b+1-x^2=0.$

$256-4\cdot 2\cdot 16\cdot(1-x^2)=16(16-8+8x^2) = 16(8+8x^2)=$

$7<\sqrt{61}<8$

$11+2\sqrt{61} \approx 11+2\cdot 7{,}5 = 26.$ $\quad \frac{26}{41}$

$49x^4+x^2-1-49x^2-14x^2$

$= 2^7(1+x^2)$

$11-2\sqrt{61} \approx 11-2\cdot 7{,}5.$ $\quad b = \frac{-16+2^7(1+x^2)}{64}$

$\frac{-2+\sqrt{2(1+x^2)}}{8}$

$2\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{8}{49}$

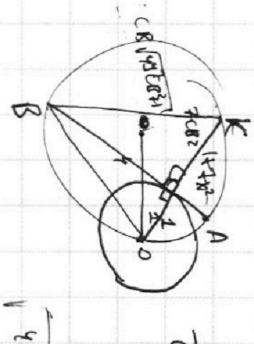
$2\left(\frac{2}{7}\right)^2-5\cdot\frac{2}{7}+3 = \frac{8}{49}-\frac{70}{49}+\frac{49\cdot 3}{49} = \frac{85}{49}$

$2\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^2+2\cdot\frac{2}{7}+1 = \frac{8+28+49}{49} =$

$2\left(\frac{11+2\sqrt{61}}{41}\right)^2 = \frac{2(121+122+44\sqrt{61})}{1681} = \frac{486+44\sqrt{61}}{1681}$

$\frac{486+44\sqrt{61}}{1681} - \frac{5\cdot 41(11+2\sqrt{61})}{1681}+3$

$4\sqrt{8x+3} = 4\sqrt{2x+1}$



$\frac{AC}{CB}=7.$ $\quad AB$ – ?

$AC\cdot CB = OC\cdot CK$

$7CB^2 = CK$

$\sqrt{49CB^4+CB^2} = CB\sqrt{49CB^2+1}$

$CB\sqrt{49CB^2+1} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 4CB^2(49CB^2+1)=25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 196CB^4+4CB^2-25=0.$ $\quad D = 16+19600 = 19616.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

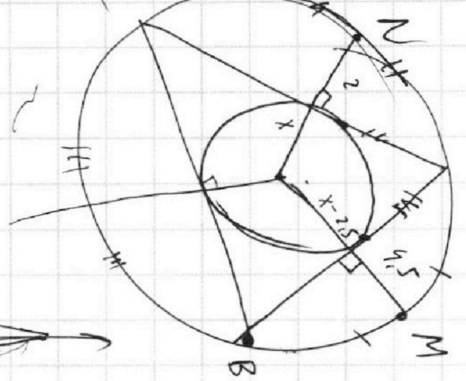
Черновик

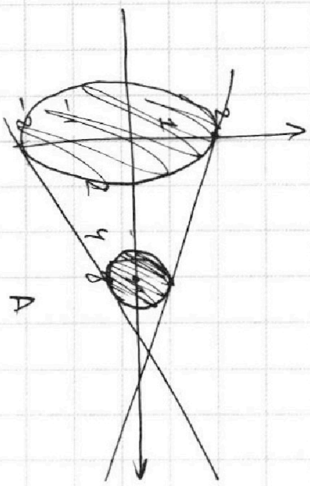
$0=-16k+b$. $b=-16k$

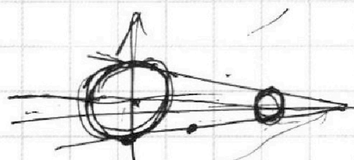
$a^2-6ab+b^2=n(a+b)$, т.е. $m=a+b$

$y=kx-16k$

$y^2+x^2=2$







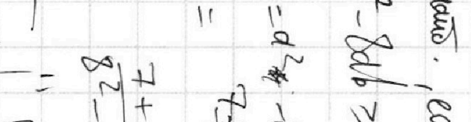
$\sqrt{16^2-2^2}$

$y=\sqrt{4-x^2}$

$x^2+y^2<4$

$x^2+y^2-16x+63<0$

$A(-16;0)$



4. $k=\frac{1}{2}=\frac{x}{x+8}$.

$x=8$.

$0=-16k+b$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

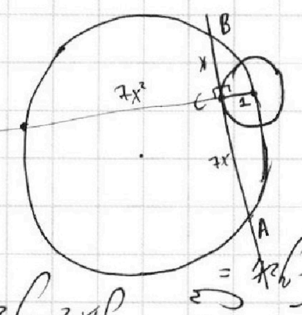
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$32b^2+16b+1 = 32\left(b^2+\frac{1}{2}b+\frac{1}{16}\right)-1 = \sqrt{32\left(b+\frac{1}{4}\right)^2-1}$

$8\sqrt{2}$ $\left(\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{128}$



$\frac{AC}{CB} = 7$

$\alpha+\beta = 180°$

$0 = k\cdot 0 + b \quad b = 0$

$24 = -12k$

$k = -2$

$7x^2+1 = 10$

$x = \sqrt{\frac{9}{7}}$

$AB = 8\sqrt{\frac{9}{7}}$

$a^2 = 25(1-2\cos\alpha)$

$a^2x^2 = 25(1+2\cos\alpha)$

$x = \sqrt{\frac{1+2\cos\alpha}{1-2\cos\alpha}}$

$(5+y)(5-y) = 7x^2$

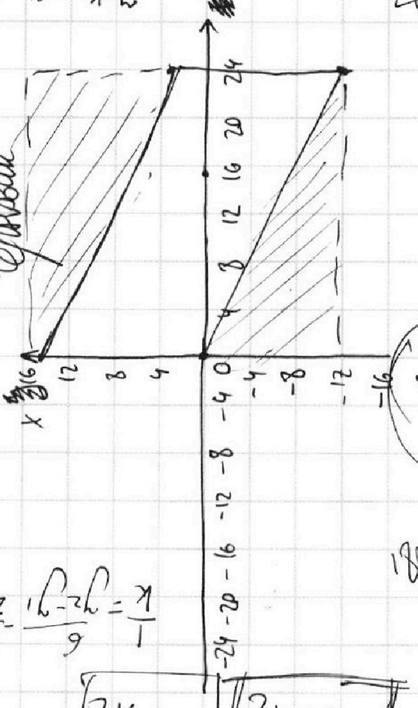
$y = \sqrt{25-7x^2}$

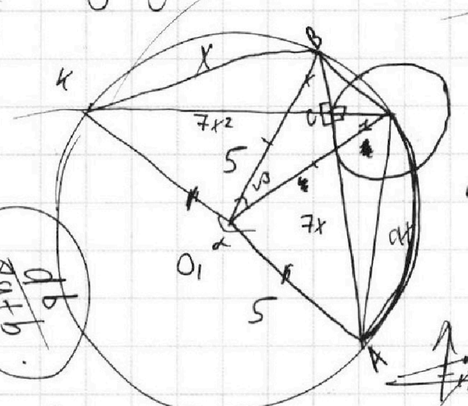
$\cos(180-\alpha) =$

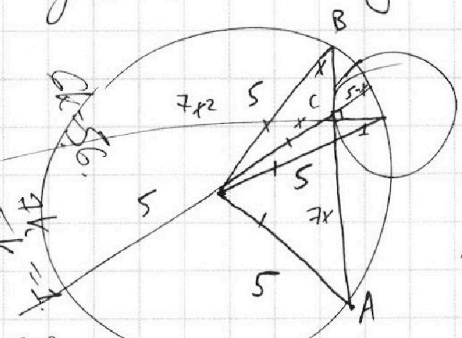
$\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

$2(x_2-x_1)+(y_2-y_1) = 12$

$(2k+1)(y_2-y_1) = 12$







$\sqrt{49x^2+1}$

$\alpha+\beta = 180°$

$\begin{cases} -12 \le x \le 15 \\ 0 \le y \le 24 \end{cases}$

$2(x_2-x_1)+(y_2-y_1) = 12$

$(2k+1)(y_2-y_1) \ne 12$

$y_1-y_2 \ne 3$

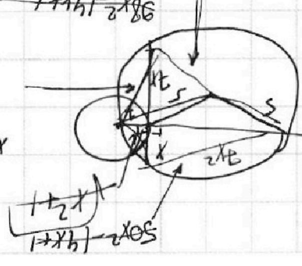
$\frac{14}{9\sqrt{2}} = \frac{14}{9\sqrt{2}+11}$

$180 = \alpha + x$

$\begin{cases} y_3 = 2x_2 \\ y_2 = 2x_3 \end{cases}$

$2x_2+y_2 = 2x_3+y_3$

$2x_2+y_2 = 2x_1+y_1+12$



$h = 9 + x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$ab = 2^{14}\cdot 7^{10}\cdot k$ $\quad a^2b^2c^2 = mnk\cdot 2^{51}\cdot 7^{64}$ $\quad 32$

$bc = 2^{17}\cdot 7^{17}\cdot n$ $\quad abc = 7^{30}\cdot 2^{25}\cdot\sqrt{2mnk}$.

$ac = 2^{20}\cdot 7^{37}\cdot m$ $\quad$ т.к. $a,b,c\in N$, то $\sqrt{2mnk}\in N$,

~~а значит~~ $m,n,k\in N$ и $\sqrt{2mnk}$ – минимален.

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

$\sqrt{2mnk} \geq \frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{k}} = \frac{4mnk}{mnk+2mn+2nk+2mk}$

$\min(abc)$, если $\sqrt{2mnk}=\sqrt{4}$, т.е. $\begin{cases} m=1\\ n=1\\ k=2\end{cases}$, тогда $abc = 7^{30}\cdot 2^{26}$.

$a^2-6ab+b^2$. $D = 36b^2-4b^2=32b^2$.

$a = \frac{6b\pm 4\sqrt{2}b}{2} = \boxed{3b\pm\sqrt{2}b}$ $\quad (a-3b-\sqrt{2}b)(a-3b+\sqrt{2}b)$.

$(a+b)^2-8ab$. $\quad \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$ m - наиб, если $\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}=1$.

$\Leftrightarrow a^2-6ab-a+b^2-b=0$. $\quad D = 36b^2+12b+1-4b^2+4b = 32b^2+16b+1$

$a = \frac{6b+1\pm\sqrt{32b^2+16b+1}}{2}$ $\quad 32b^2+16b+1$ - полный квадрат.

$b=0$. $b=1$. $b=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

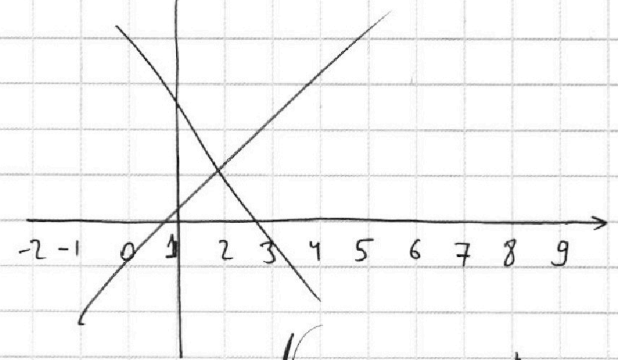
МФТИ

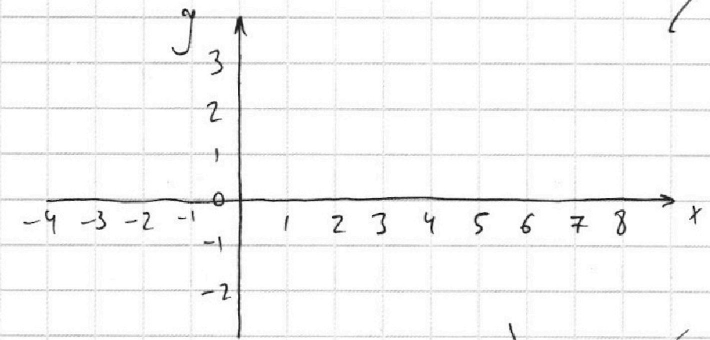
№6. $\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \ (\mathrm{I}) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2+y^2-4) \leq 0 \ (\mathrm{II}) \end{cases}$ Черновик.

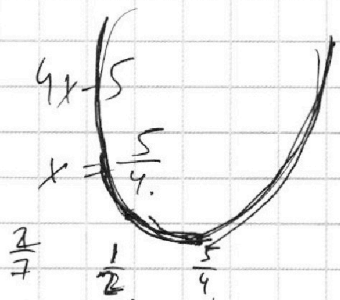
(I): $y = ax + 10b$.

~~(II): $(x+8)^2 + y^2 = 1$~~

~~$x^2 + y^2 = 4$~~







$$\frac{2(y_2-y_1)}{12-(y_2-y_1)} = \frac{-2(12-(y_2-y_1))+24}{12-(y_2-y_1)} = -2+\frac{24}{12-(y_2-y_1)}$$

$\approx \frac{2}{3}$

$\approx \frac{26}{41}$ $\quad 2\cdot\left(\frac{26}{41}\right)^2 - 5\cdot\frac{26}{41} + 3 = \frac{8}{9} - \frac{20}{9} + 3 = \frac{15}{9}.$

$\frac{8}{9} + \frac{12}{9} + 1 = \frac{39}{9}.$

$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{39}}{3} \approx 4 \sim 6 = \frac{\sqrt{9}}{3}.$ $\quad \sqrt{15} + \sqrt{39} \approx 10.$

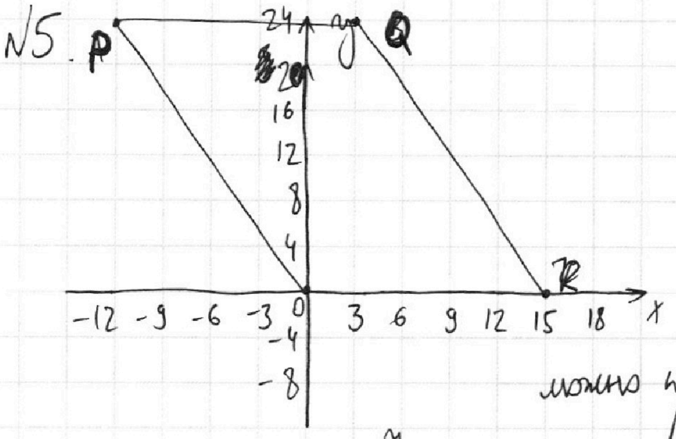
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5.



$$\begin{cases} -12 \le x \le 15 \\ 0 \le y \le 24 \end{cases}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

Т.к. через любые две точки можно провести прямую и притом только одну, то: $y = kx + b$, где $\begin{cases} k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \end{cases}$

$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$, где $\begin{cases} k_{QR} = 2 = k_{PO} \\ k_{PQ} = 0 = k_{OR} \end{cases}$

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{k} + 1\right)(y_2 - y_1) = 12 \\ (2 + k)(x_2 - x_1) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{\left\{ k = \frac{12}{x_2 - x_1} - 2 \right.} \quad \begin{cases} k = \cfrac{1}{\frac{6}{y_2 - y_1} - \frac{1}{2}} \\ k = \frac{12}{x_2 - x_1} - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2y_2 - 2y_1}{12 - (y_2 - y_1)} \\ k = \frac{12}{x_2 - x_1} - 2 \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} \Delta y = y_2 - y_1 \\ \Delta x = x_2 - x_1 \end{cases}$. Тогда:

$\Delta x = 1$: $k = 10$ $\Delta y = 10$

$\Delta x = 2$: $k = 4$ $\Delta y = 8$

$\Delta x = 3$: $k = 2$ $\Delta y = 6$

$\Delta x = 4$: $k = 1$ $\Delta y = 4$

$\Delta x = 5$: $k = 0{,}4$ $\Delta y = 2$

$\Delta x = 6$: $k = 0$ $\Delta y = 0$

~~$\Delta x = 7$ $k = -\frac{2}{7}$ $\Delta y = -2$~~

~~$\Delta x = 8$ $k = -\frac{1}{2}$ $\Delta y = -4$~~

~~$\Delta x = 9$ $k =$~~

~~$\Delta x = 10$ $k =$~~

~~$\Delta x = 11$ $k =$~~

~~$\Delta x = 12$ $k =$~~

~~$\Delta x = 13$ $k =$~~

по Δy

Аналогичным образом получим k_i прямой, тогда кол-во пар: $24 \cdot 2 = 48$ (каждая прямая даст две точки)

Ответ: ~~84 пары~~. 48 пар

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ