МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1.

Давайте рассмотрим в каких степенях 2 и 7 входят в a, b и c.

Пусть: $a = 2^x \cdot 7^k \cdot \alpha$, где α, β и γ — множители, не содержащие 2 и 7.

$b = 2^y \cdot 7^l \cdot \beta$

$c = 2^z \cdot 7^m \cdot \gamma$ (2 и 7 — взаимнопростые числа)

Тогда из условия:

$ab \vdots 2^{14} \Rightarrow x + y \geq 14$

$bc \vdots 2^{17} \Rightarrow y + z \geq 17$ (1)

$ca \vdots 2^{30} \Rightarrow z + x \geq 30$

Аналогично для 7-ки:

$ab \vdots 7^{10} \Rightarrow k + l \geq 10$

$bc \vdots 7^{17} \Rightarrow l + m \geq 17$ (2)

$ca \vdots 7^{37} \Rightarrow k + m \geq 37$

Чтобы abc было минимальным, степени вхождения 2 и 7 в это число должны быть минимальными ($\Rightarrow x+y+z \to \min$ и $k+l+m \to \min$), α, β и γ принимают наименьшее возможное значение — 1.

$x + z \geq 30 \Rightarrow x + y + z \geq 30$, т.к. $x, y, z \geq 0$

~~достигается при $x = 14$, $z = 17$~~

$x + y + z \geq 31$ — если сумма $x + z = 30$, то $y \geq 1$, тогда $x + y + z \geq 31$; если сумма $x + z = 31$, то $y \geq 0$, тогда $x + y + z \geq 31$; если сумма $x + z > 31$, то $x + y + z > 31$

$\Rightarrow$ минимальное значение для $x + y + z = 31$

и достигается при $x = 14$, $z = 17$, $y = 0$, удовлетворяющих всем неравенствам (1).

Аналогично для 7-ки:

$k + m \geq 37 \Rightarrow k + m + l \geq 37$. т.к. $k, m, l \geq 0$. 37 достигается при $k = 10$, $l = 0$, $m = 27$, что удовлетворяет (2).

Значит, наименьшее возможное значение для abc:

$$7^{10} \cdot 7^{0} \cdot 7^{27} \cdot 2^{14} \cdot 2^{0} \cdot 2^{17} = 7^{37} \cdot 2^{31}$$

Ответ: $abc = 2^{31} \cdot 7^{37}$ — наименьшее значение.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №2.

$\frac{a}{b}$ - несократима, => НОД$(a, b) = 1$.

Числитель и знаменатель дроби $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ можно сократить на m, => $a+b = km$, $k \in N$

Тогда $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} = \frac{km}{(km)^2-8ab}$

=> $8ab \,\vdots\, m$. Заметим, что НОД$(a,m)=1$ и НОД$(b,m)=1$, т.к. иначе. НОД$(a,m)=t$ => $\underset{\vdots t}{a} + b = \underset{\vdots t}{k \cdot m}$ => $b \,\vdots\, t$ => НОД$(a,b)=t$ - противоречие
(аналогично для НОД$(b,m)=t$)

=> максимальное значение для $m = 8$.

Это достигается, например при $a=1$ и $b=7$.

$\frac{1+7}{(1+7)^2-8\cdot 7}$ $\vdots 8$

Ответ: $m = 8$ - максимальное значение.

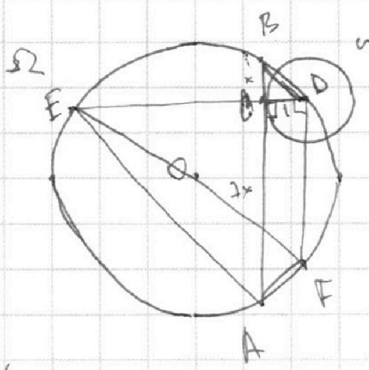
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача № 3.



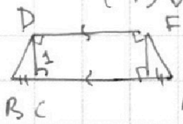
Дано:
(т. D – центр ω, ∈ окр. Ω)
$AC : CB = 7$
$r(\omega) = 1$
$R(\Omega) = 5$
AB – ?

Решение: Пусть $BC = x$, тогда $CA = 7x$ (из отношения)
Продлим DC до пересечения с Ω в т. E.

$\angle ABD = \angle AED = \frac{1}{2} \cup AD$
как вписанные углы
$\Rightarrow \triangle CEA \sim \triangle CBD$ по 2-м углам
($\angle ECA = \angle BCD = 90°$
т.к. BA – касательная к ω в т. C)
$\Rightarrow BC \cdot CA = EC \cdot CD$
(из подобия)
$\Rightarrow 7x^2 = EC \cdot 1 \Rightarrow EC = 7x^2$

Проведём $DF \parallel BA$
$DF \parallel BA \Rightarrow DF \perp ED$ (т.к. $BA \perp ED$)

$DF \parallel BA$ и ~~отрез~~ хорды Ω
$\Rightarrow BDFA$ – р/б трапеция
($BD = FA$).



DC – высота трапеции,
$BC = x$, $BA = 8x$
$\Rightarrow DF = 8x - x - x = 6x$.

$\angle EDF = 90°$ (по доказанному) и вписанный, $\Rightarrow EF$ – диаметр Ω
По теореме Пифагора: $ED^2 + DF^2 = EF$

$(7x^2+1)^2 + (6x)^2 = (5+5)^2$
$49x^4 + 14x^2 + 1 + 36x^2 = 100$
$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$
$(x^2-1)(\overset{>0}{49x^2+99}) = 0$
$\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$; $AB = 8x = 8$

Ответ: $AB = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$

Пусть $2x^2-5x+3=a$, $2-7x=b$.

Тогда:

$\sqrt{a}-\sqrt{a-b}=b \Rightarrow \underset{1)}{a\geq 0}$; $\underset{2)}{a\geq b}$

$\sqrt{a}+b=\sqrt{a-b}$ $\quad\uparrow^2$

$a-2\sqrt{a}b+b^2=a-b$

$b^2-2\sqrt{a}b=-b$

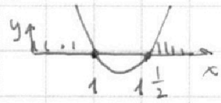
1) $b=0$ – уд. 2) $b\neq 0$

1) $b=0$ $\quad 2-7x=0$ $\quad x=\frac{2}{7}$ – уд.

1) $2x^2-5x+3\geq 0$

$D=25-2\cdot 4\cdot 3=1$

$x_1=\frac{5-1}{4}=1$



$x_2=\frac{5+1}{4}=1\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x\leq 1$ или $x\geq 1\frac{1}{2}$

2) $2x^2+2x+1\geq 0$

$D=4-4\cdot 2<0$

$\Rightarrow 2x^2+2x+1>0$ при всех x.

2) $b\neq 0$

$b-2\sqrt{a}=-1$

$b+1=2\sqrt{a}$ $\quad\rightarrow\quad b+1\geq 0 \quad 3-7x\geq 0 \quad x\geq\frac{3}{7}$

$b^2+2b+1=4a$

$4\cdot(2x^2-5x+3)=(2-7x)^2+2\cdot(2-7x)+1$

$8x^2-20x+12=4-14x+49x^2+4-14x+1$

$41x^2-8x-3=0$

$D=64+4\cdot 3\cdot 41=64+492=556=4\cdot 139$

$x_1=\frac{8-2\sqrt{139}}{82}$ – неуд. : $\frac{\cancel{4}-\sqrt{139}}{41}<\frac{3}{7}$

$28-7\sqrt{139}<123$ – верно

$x_2=\frac{8+2\sqrt{139}}{82}$ – неуд.

$\frac{4+\sqrt{139}}{41}<\frac{3}{2}\ 1$

$4+\sqrt{139}<41$

$\sqrt{139}<37$

$139<37^2$ – верно

Ответ: $x=\frac{2}{7}$

$\frac{4+\sqrt{139}}{41}\geq\frac{3}{7}$

$7\sqrt{139}\geq 95$ – неверно

$\Rightarrow x_2<\frac{3}{7}$ $\Rightarrow$ неуд.

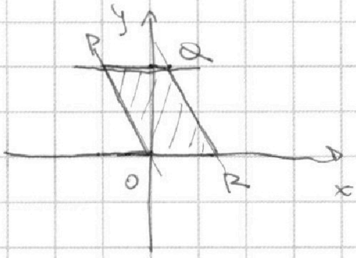
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5.



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$
$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12.$$

Параллелограмм на плоскости задаётся следующими неравенствами:

$y \geq 0$ (выше OR) $y \leq 24$ (ниже PQ)

$y \leq 30 - 2x$ (левее QR) $y \geq -2x$ (правее PO)

=> координаты точек A и B удовлетворяют этим неравенствам.

$2x + y \leq 30$ $2x + y \geq 0$.

При этом $\underbrace{2x_2 + y_2}_{\leq 30 \quad \geq 0} = \underbrace{2x_1 + y_1}_{\leq 30 \quad \geq 0} + 12$

$\Rightarrow 12 \leq 2x_2 + y_2 \leq 30$; $0 \leq 2x_1 + y_1 \leq 28$

При каждом значении $2x_2 + y_2$ однозначно определяется сумма $2x_1 + y_1$.

Вариантов выбора $2x_1 + y_1$ — 29 (от 0 до 28 включительно)

При этом, если $2x_1 + y_1 = t$, то $y_1 = t - 2x_1$, $t \in [0; 28]$ и целое

$\Rightarrow x_1 \in [0; 14]$ и целое.

На любом отрезке нашей прямой $y = t - 2x$, ограниченном параллелограммом, находится 13 точек, удовлетворяющих условиям. (y принимает значения от 0 до 24 включительно с шагом 2.)

Значит, способов выбрать значение для $2x_1 + y_1$ — 29, выбрать точки x_1 и y_1 — 13 способов, и выбрать подходящие x_2 и y_2 — тоже 13 способов, значит всего способов $29 \cdot 13 \cdot 13$.

Ответ: всего таких пар точек $29 \cdot 13^2$.

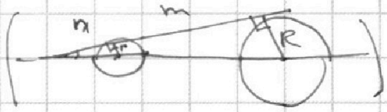
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3) $\sqrt{R^2+(n+m)^2}-\sqrt{r^2+n^2}=8$



$\operatorname{tg}\alpha=\frac{R}{n+m}=\frac{r}{n}=\frac{2}{n+m}=\frac{1}{n}$

$\Rightarrow 2n=n+m \Rightarrow n=m$

$\sqrt{4+\cancel{4}n^2}-\sqrt{1+n^2}=8$

$2\sqrt{1+n^2}-\sqrt{1+n^2}=8$

$\sqrt{1+n^2}=8$

$1+n^2=64 \qquad n=\sqrt{63}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{r}{n}=\frac{1}{\sqrt{63}}=a$

4) Прямая симметрична относительно ox,

$\Rightarrow a=-\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{\sqrt{63}}$

Ответ: $a_1=\frac{1}{\sqrt{63}},\ a_2=-\frac{1}{\sqrt{63}},\ a_3=\frac{3}{\sqrt{55}},\ a_4=-\frac{3}{\sqrt{55}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

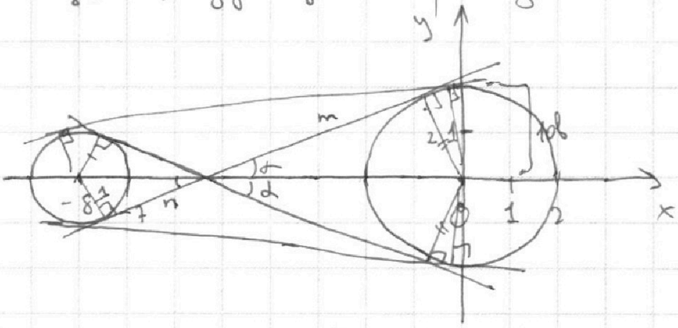
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2+y^2-4) \le 0 \end{cases}$$

Заметим, что второе неравенство системы решается в виде следующего рисунка:



При этом нам подходят точки, лежащие внутри кругов и на ~~поверх~~ окружностях. (Поверхность внутри круга ~~и не окружности~~ даёт отрицательное значение в соотв. скобке, точка на окружности даёт значение скобки = 0.)

Окружности: $(x+8)^2 + y^2 = 1 = r^2$ и $x^2+y^2 = 4 = R^2$

Заметим, что первое равенство задаёт прямую $y = ax + 10b$. По условию у этой прямой и двух окружностей должны быть две общих точки (чтобы было равно два решения). Значит, эта прямая должна касаться каждой из этих двух окружностей. Значит, для a есть всего 4 варианта.

$a = tg\,\alpha$ (Понятно, что в них подобные треугольники: см. рисунок.)

1) По теореме Пифагора:

$\sqrt{R^2+m^2} + \sqrt{r^2+n^2} = 8$

Из подобия треугольников:

$tg\,\alpha = \frac{2}{m} = \frac{1}{n} \quad 2n = m$

$\sqrt{4+4n^2} + \sqrt{1+n^2} = 8$

$2\cdot\sqrt{1+n^2} + \sqrt{1+n^2} = 8 \qquad 3\cdot\sqrt{1+n^2} = 8 \qquad 1+n^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2$

$a = tg\,\alpha = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{6\frac{1}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{55}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{55}} \Leftarrow \quad n = \sqrt{7\frac{1}{9} - 1}$

И прямая симметрична относительно Ox

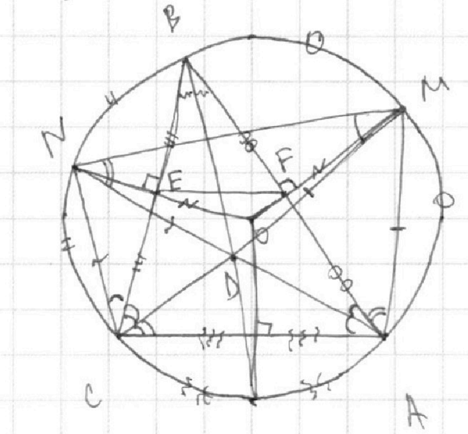
$\Rightarrow a = -tg\,\alpha = -\frac{3}{\sqrt{55}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №7.



AD — ?

MF = 4,5; NE = 2

Решение:

$MF^2 + FA^2 = MA^2$ (по Пифагору)

$NE^2 + EC^2 = NC^2$

$BF \cdot FA = FM \cdot (2R - FM)$ (пересечение хорд)

$BE \cdot EC = NE \cdot (2R - NE)$

$4,5^2 + FA^2 = MA^2$

$2^2 + EC^2 = NC^2$

$FA^2 = 4,5 \cdot (2R - 4,5)$

$CE^2 = 2 \cdot (2R - 2)$

$4,5^2 - 4,5^2 + 4,5 \cdot 2R = MA^2$

$2^2 - 2^2 + 4R = NC^2$

$MA^2 = 9R$

$NC^2 = 4R$

$\frac{AD}{CD} = \frac{MA}{NC}$ (из подобия △ CND и DMA)

$\frac{AD^2}{CD^2} = \frac{MA^2}{NC^2} = \frac{9}{4}$ => $AD : CD = 3 : 2$

$2AD = 3CD$

□ OEBF — вписанный, (т.к. $\angle OEB = 90°$ и $\angle BFO = 90$ — противоположные)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

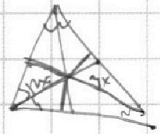
2

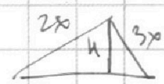
от K до AB = 4,5

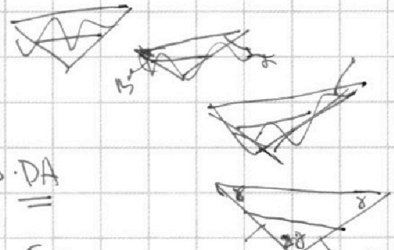
от N до AC = 2

ME = 4,5

NF = 2



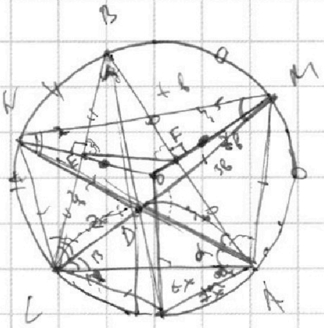




$\alpha+\gamma-\beta \qquad \beta+\gamma-\alpha$

$\alpha+\gamma-\beta+\gamma+\beta-\alpha = 2\gamma$

$\gamma = 45°$



$MD \cdot CD = ND \cdot DA$

$MF + FD = NE + ED$

$4,5 + FD = 2 + ED$

$\alpha+\beta+\gamma = 90°$

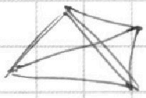
$(4,5)^2 + (-)^2 = (+)^2$

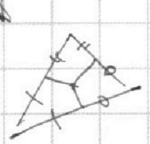
$2^2 + (-)^2 = (-)^2$

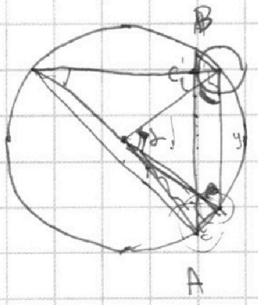
$(-)^2 = (4,5) \cdot (2R - 4,5)$

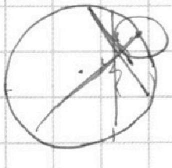
$(-)^2 = 2 \cdot (2R - 2)$

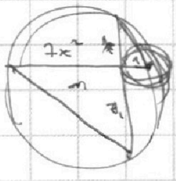
$(-) \cdot AD = CD \cdot (+)$





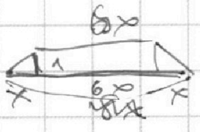






$8x < 10$

$8 \checkmark$



$(1+7x^2)^2 + y^2 = 100$

$1 + 14x^2 + 49x^4 + 36x^2 = 100$

$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \qquad (a-1)(49a+99) = 0$

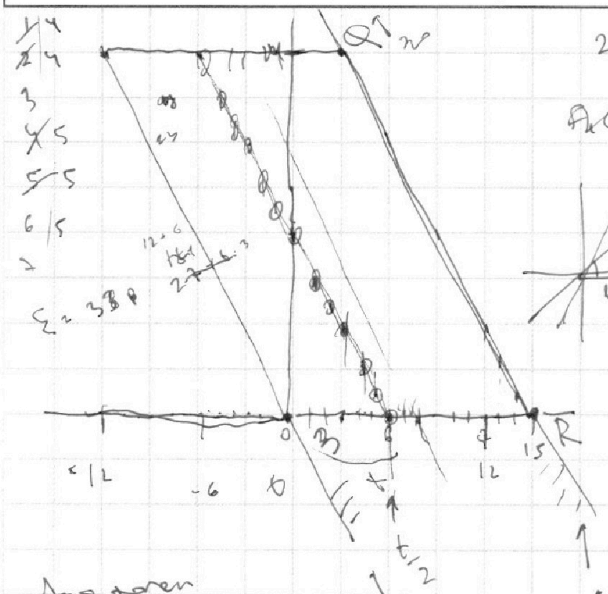
$49a^2 + 50a - 99 = 0$

$D = 2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99$

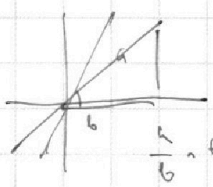
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$



$2x+y=t$

$y = 2x - t$

$2x_2 + y_2 = a_2$

$2x_1 + y_1 = a_1$

$a_2 - a_1 = 12$

$a_2 = a_1 + 12$

$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12$

$y \ge 0$

Для всех допустимых точек:

$y \le 30 - 2x$

$y \ge 0 \quad y \le 24$

$y \ge -2x$

$\to y \ge 0 \quad y + 2x \le 30$

$y \le 24 \quad y + 2x \ge 0$

$\frac{64}{9} = 7\frac{1}{9} = 6\frac{1}{9}$

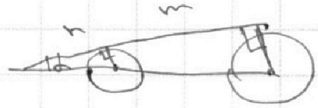
$\begin{cases} 2x_2 + y_2 = 12 \\ 2x_1 + y_1 = 0 \end{cases} \quad \ldots \quad \begin{cases} 2x_2 + y_2 = 30 \\ 2x_1 + y_1 = 18 \end{cases}$

28 вар.

по 12 · 12

Сколько способов набрать $2x+y=t$?

$y = t - 2x$



$y = 12 - 2x$

13 вар.

$y = 0 - 2x$

→ по 13 вариантов.

$2x+y=t$

$y = t - 2x$

$y = -2x$

$4 + x^2 + 1 + y^2 = 8$

$x^2 + y^2 = 3$

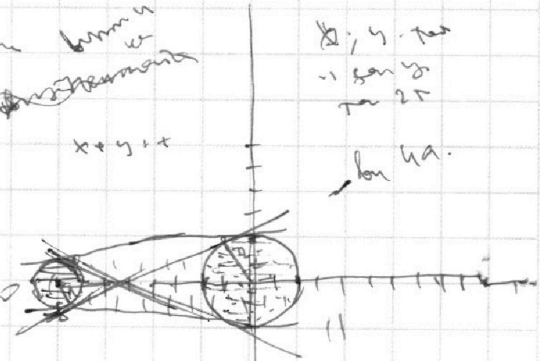
$\frac{2}{x} = \frac{1}{y} \quad 2y = x$

6.

$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2+y^2-4) \le 0 \end{cases}$

$(x^2 + 16x + 64 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \le 0$

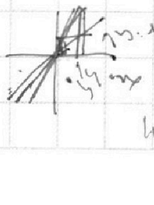
$(t + 16x + 64 - 1)(t - 4) \le 0$



$x^2 + y^2 = 4$

$(x+8)^2 + y^2 = 1$

$y = ax + 10b$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

1) a, b, c – нат. $ab \vdots 2^{14}7^{10}$, $bc \vdots 2^{17}7^{17}$, $ac \vdots 2^{30}7^{37}$

$2^x\ 2^y\ 2^z$ min abc - ?

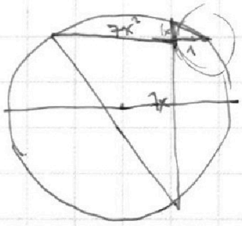
$7^k\ 7^l\ 7^m$

$x+y \geq 14$ $k+l \geq 10$

$y+z \geq 17$ $l+m \geq 17$

$z+x \geq 30$ $k+m \geq 37$

min $x+y+z$ - ? min $k+l+m$ - ?



$z+x \geq 30$

$\Rightarrow y$ - min

$x+2y+z \geq 31$

$\Rightarrow y \geq 1$

ен $y=0$:

$x+y=21$

$x=14$ $z=17$ $y=0$

$x+1 \geq 14$

$z+1 \geq 17$

$z+x \geq 30$

$x=14$ $z=16$ $y=1$

$=31$

$k+m \geq 37$

$k+2l+m \geq 27$

$l=0$ ✓

~~$37=16+21$~~

$k=10$ ✓

$m=27$

$k+m=37$

2) $\frac{a}{b}$ несокр. (a и $b \in$ Natural)

$\dfrac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$

$a \neq b$

a и b не н а дел.

$\Rightarrow abc$ min:

$2^{14} \cdot 7^{10}$ 1 $2^{17} \cdot 7^{27}$

max m такой, что

$a+b \vdots m$

и $a^2-6ab+b^2 \vdots m$

$a+b \vdots m$ $a+b=mk$

mk

$(mk)^2 - 8ab$

$\vdots m$

m - нат. m

$8ab \vdots m$ $\Rightarrow$ max $=8ab$

~~$a+b=8ab$~~

m и a не нат. имеют общих делителей.

$\Rightarrow$ max $m=8$

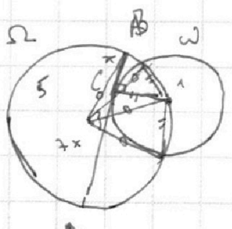
и $a+b=mk$

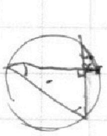
$a+b=8k$

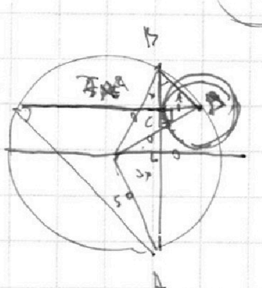
$\frac{8k}{64k^2-8ab}$

$\frac{1+7}{64-8 \cdot 7}$

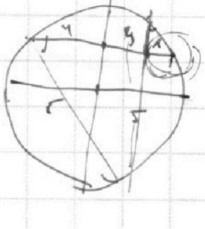
3. Ω ω AB - ?

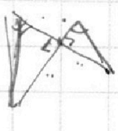






x - ?





$\frac{BC}{CA} = \frac{1}{7}$ $7BC = CA$

$\frac{BC}{CB} = \frac{EC}{CA}$ $\frac{BC}{}$

$\frac{1+7x^2}{49x^2+49x^2} = \frac{1}{49x^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
x	x	x				

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$\sqrt{a} - \sqrt{a-b} = b$

$a>b$
$a\geq 0$

$\sqrt{a}+b=\sqrt{a-b}$

1) $b=0$ — нз. $7x=2$ $x=\frac{2}{7}$

$a+2\sqrt{a}b+b^2=a-b$

$2\sqrt{a}b+b^2=-b$

$2\sqrt{a}+b=-1$

$2\sqrt{a}=-(1+b)$ → $-b-1\geq 0$

$b+1\leq 0$ $b\leq -1$ $3-7x\leq 0$

$4a=1+2b+b^2$

$7x\geq 3$

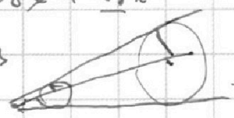
$x\geq\frac{3}{7}$

$4\cdot(2x^2-5x+3)=1+2\cdot(2-7x)+(2-7x)^2$

$8x^2-20x+12=1+4-14x+4-28x+49x^2$

$-42x$

$0=41x^2-22x-3$



$41x^2-22x-3=0$

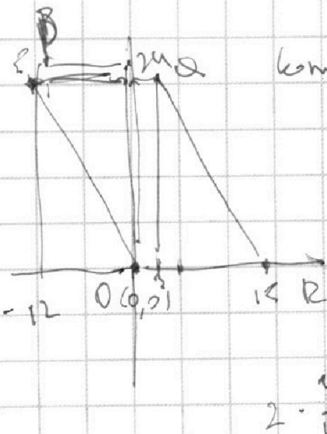
$D=22^2+4\cdot41\cdot3=484+492=976=(4\sqrt{61})^2$

$x_1=\frac{22+4\sqrt{61}}{82}$ уд. $\frac{11+2\sqrt{61}}{41}$ и $\frac{3}{7}$

$x_2=\frac{22-4\sqrt{61}}{82}$ — нет

$77+14\sqrt{61}$ и 123

$14\sqrt{61}>46$ $8>\sqrt{61}>7$



координаты пар $A(x_1;y_1)$
$B(x_2;y_2)$

x и y — цел. $13>\sqrt{139}>12$

в этом параллелограмме

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$

$2\cdot\frac{4}{49}-\frac{10}{7}+3=$

$\frac{8}{49}-\frac{70}{49}+\frac{}{49}$

$2x^2+2x+1>0$

$D=4-4\cdot2$

$\frac{4+\sqrt{139}}{41}$ $\frac{3}{2}$ $8\cdot2\cdot4=64$ -12 8

16

$8+2\sqrt{139}$ $2\sqrt{139}$ $\frac{123}{145}$ $4<\sqrt{139}$ $\sqrt{139}$ 41 37 $\frac{3}{7}$ 1 $1\frac{1}{2}$

$95\cdot95=9025$; $22\cdot22=484$; $41\cdot12=492$; $492+484=976$; $139\cdot4=556$; $976:2=488$, $488:4=122$, $122:2=61$; $123-77=46$; $13\cdot13=169$; $492\cdot64$; $41\cdot12=492$