



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{12}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{(15+17+23)} \cdot 7^{(11+12+39)} = 2^{55} \cdot 7^{68}$$

П.к. $a^2 b^2 c^2$ - квадрат (числа abc), то все степени в формуле для $a^2 b^2 c^2$ должны быть четными, и при этом п.к. $a^2 b^2 c^2 : 2^{55} \cdot 7^{68}$ то степени в формуле $a^2 b^2 c^2$ на простые ≥ 56 , а $7 - \geq 68$. $\Rightarrow abc : 2^{\frac{56}{2}} \cdot 7^{\frac{68}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$

$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$

$bc : 2^{17} \cdot 7^{12} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{55} \cdot 7^{68}$

$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$

П.к. $a^2 b^2 c^2$ - квадрат (числа abc)

то степени в формуле должны быть четными $\Rightarrow (a^2 b^2 c^2)_2 \geq 56$

$\Rightarrow (abc)_2 \geq 28, (abc)_7 \geq 34 \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$ п.к. ≥ 14 .

Пример, когда достигается равенство:

да. Но при этом $abc : ac : 7^{34} \Rightarrow (abc)_7 \geq 34$

Значит, $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$

Пример, когда достигается равенство:

$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$

$b = 2^5$

$c = 2^{13} \cdot 7^{18}$

$\Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$

Ответ $\min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

Если

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

сократится на m ,

то и

$$\frac{a^2+b^2-7ab}{a+b}$$

сократится на m .

$$\frac{a^2+b^2-7ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2-9ab}{a+b} = a+b - \frac{9ab}{a+b} \Rightarrow$$

$\frac{-9ab}{a+b}$ должно делиться сократится на m . П.к. $(a,b)=1$,

то $(ab, a+b)=1 \Rightarrow$ Если что и сокращается

в числителе, то только ab в знаменателе

в множитель $9 \Rightarrow m \leq 9$. Пример:

$$a=7, b=2 \Rightarrow \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{9}{-45} = -\frac{1}{5}$$

Ответ: $\max(m) = 9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

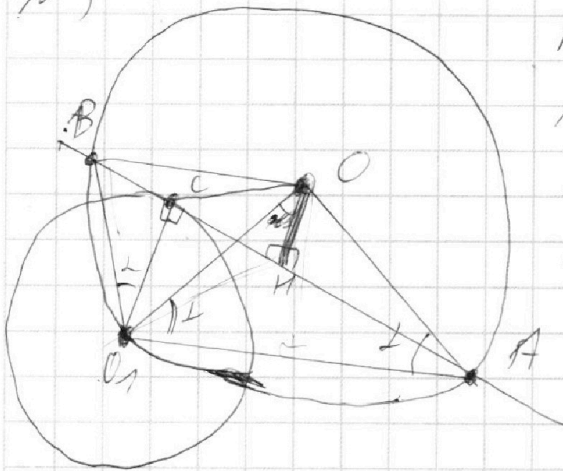
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 3



по углам. $OC = 7$, $BC = 7$ ($\Rightarrow BC = 4x$)
 $\frac{BC}{AC} = \frac{7}{14x}$

$AC = 14x$ $AO = OO_1 = OB = 13$

~~угол~~ $\angle BO_1C = \angle$

по углам $\angle O_1C = \frac{BC}{OC} = \frac{4x}{7} = x$ П.К.

$OB = OA$ как радиусы, т.
 ΔOBA - равнобедренный \Rightarrow высота OH
 и медиана $AM = BM = \frac{AB}{2} = 12x \Rightarrow CH = BH - BC = 5x$

Если $\angle = \angle O_1C$ т.к. ΔO_1CB - осн. \Rightarrow если $x > 1$
 противоречие

т.к. $OH < AM > 12$, $OH < 5 \Rightarrow CH > 5 \Rightarrow x < 1$, если $x < 1$,
 т.к. $AM < 12 \Rightarrow OH > 5 \Rightarrow CH < 5 \Rightarrow x > 1$ - противоречие.

$\Rightarrow x = 1, \Rightarrow AB = 14x = 14$

Ответ: 14

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 $\textcircled{0} \{ ax + y - 8b = 0$

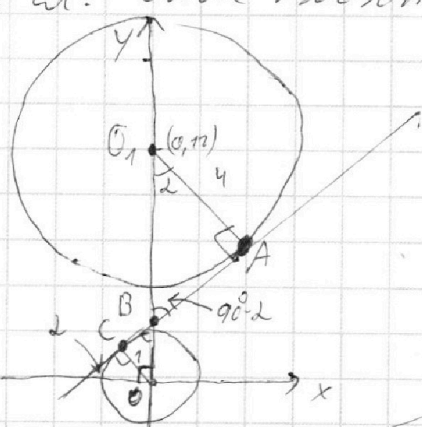
$\textcircled{1} \{ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$

$\textcircled{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 16 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \leq 16 \end{cases}$

- на координатной плоскости $OxOy$ это две окружности, центрами в $O(0,0)$ и $(0,12)$ соответственно, и радиусами 1 и 4 соответственно. Если точки вне обоих кругов, то точки из одного круга, а точки вне этих кругов - нет.

$\textcircled{0}$ - прямая вида $y = -ax + 8b$, и если нужно чтобы имели только 2 решения, нужно чтобы эта прямая была осями из касательных к окружностям, т.к. перпендикуляр к касательной и радиус - ось Ox , либо 1 (случай касания) либо делит диаметр пополам.

1 сл. Если касательная внутренняя:



Пусть O_1 и O_2 - центры кругов, A и C - точки касания (касана ABC), B - точка пересечения прямой $ax + y - 8b = 0$ и Ox . т.к. Если прямая задана уравнением $y = kx$, то $k = \tan \alpha$, α - угол между прямой и Ox .

$\angle O_1AB, \angle O_2BA = 2$ т.к. $\angle CBO = 90^\circ - \alpha$ (или $\angle O_1B = AB$)
 сумма углов в $\Delta = 180^\circ = \angle CBA$ (как впис.) $\therefore \tan \alpha =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

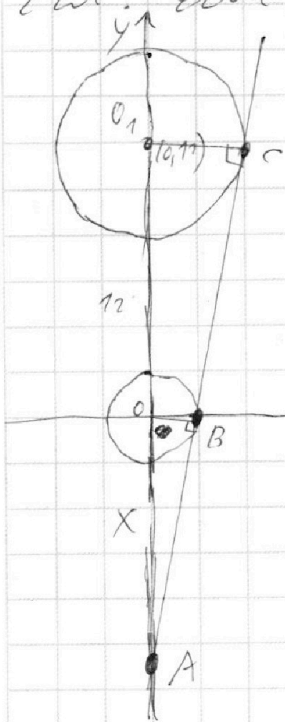
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 (курсором)
 Пусть пусть угол между касательной и $OX = \alpha$
 (угол OB острый, т.к. касательная смещена
 влево от центра O_1 , то если касательная
 прошла через A , то и $-a$ пройдет,
~~т.к.~~ тогда $\tan \alpha = -a$ т.к. $-a$ координата x в
 упр-ой системе. Тогда $\angle CBO = 90^\circ$ по сумме
 углов $\Delta CBO = \angle O_1BA$ как верт. $\Rightarrow \angle BO_1A = \angle$ уг
 суммы углов ΔO_1BA . $\angle O_1BC$ как \angle в ΔC верт.
 углов $\Rightarrow \angle COB = \alpha$. $\cos \alpha (\cos \Delta O_1BA) = \frac{4}{O_1B}$; $\sin \alpha (\sin \Delta O_1BC)$
 $= \frac{1}{OB} \Rightarrow$ ~~т.к.~~ если $OB = x$, то $O_1B = 12 - x$, т.к. $OO_1 = 12$,
 $\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{4}{12-x} \Rightarrow 4x = 12 - x \Rightarrow x = 2, 4 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{5}{12}$
 $\Rightarrow a = \pm \tan(\arccos \frac{5}{12})$, тогда $B = x \Rightarrow b = 0, 6$
 (т.к. B - координата точки пересечения
 касательной и OY т.е. точка B)
 2 сл. Если касательная внешняя!



Пусть $O_1A = x$, тогда $O_1A = 12 + x$. $\sin \alpha =$
 $= \frac{OB}{O_1A} (\sin \Delta O_1BA) = \frac{O_1C}{O_1A} (\sin \Delta O_1CA) \Rightarrow$
 $\frac{1}{x} = \frac{4}{12+x} = \sin \alpha \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 = \frac{1}{\sin \alpha}$
 $\Rightarrow a = \pm \tan(\arcsin \frac{1}{4})$ (т.к.
 касательная внешняя касательная
 для окружностей и дуги окружностей
 отн. $OY \Rightarrow$ если a - координата x и
 $-a$ пройдет) тогда $B = 4$ (т.к. абсцисса
 т.е. это координата точки A)

Ответ: $\begin{cases} a = \pm \tan(\arcsin \frac{1}{4}) \\ a = \pm \tan(\arccos \frac{5}{12}) \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

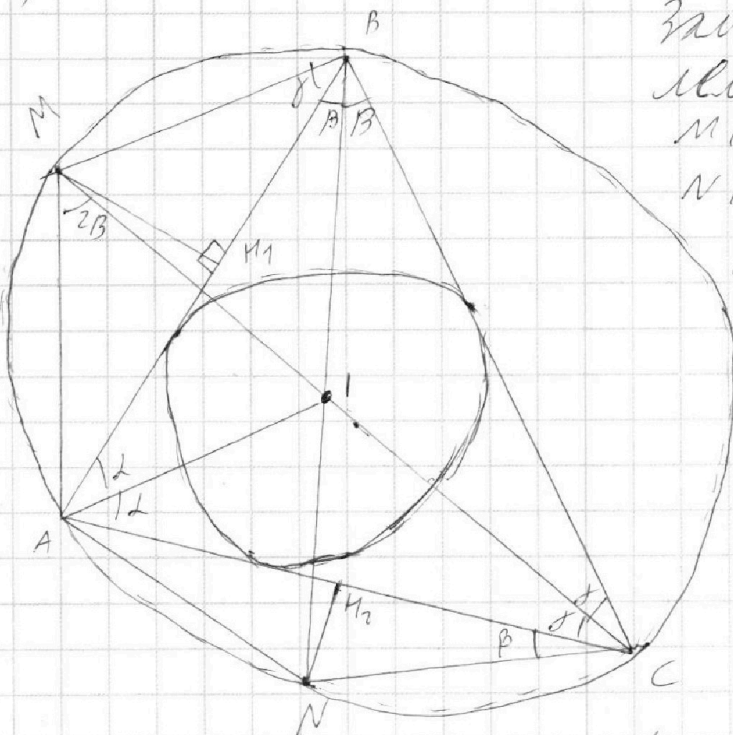
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7



Заметим, что $MI = AM = MB$, и $NI = NA = NC$. Пусть $\alpha = \angle BAI = \angle IAC = 2$;

$\angle ABI = \angle IBC = \beta$;
 $\angle ACI = \angle ICB = \gamma$;
 (т.к. I - центр вписанной окружности)

$\angle AMI = 2\beta$ как внешний, $\angle ANI = 2\gamma$ как внешний,

$\angle ANI = \beta$ и $\angle ABM = \gamma$ как вписанные, опирающиеся на дуги AN и AM соответственно; заметим, что MI и NI - биссектрисы

$\angle B$ и $\angle C$ соответственно. Тогда $MI = NI = \frac{5}{\sin \beta}$ и $MI = NI = \frac{7,5}{\sin \gamma}$ (по т. косинусов).

$$\text{Согласно } \Delta AMI \quad AI^2 = AM^2 + MI^2 - 2 \cdot AM \cdot MI \cdot \cos 2\beta =$$

$$= \frac{2 \cdot 25}{\sin^2 \beta} - 2 \cdot \frac{25}{\sin \beta} \cdot \frac{5}{\sin \beta} \cdot \cos 2\beta, \text{ а по т. косинусов для } \Delta ANI$$

$$AI^2 = AN^2 + NI^2 - 2 \cdot AN \cdot NI \cdot \cos 2\gamma = \frac{2 \cdot 7,5^2}{\sin^2 \gamma} - \frac{2 \cdot 7,5^2}{\sin^2 \gamma} \cdot \cos 2\gamma =$$

$$\Rightarrow AI^2 = \frac{2 \cdot 25}{\sin^2 \beta} (1 - \cos 2\beta) = \frac{2 \cdot 6,25}{\sin^2 \beta} (1 - \cos 2\gamma) =$$

$$= \frac{50 \cdot 2 \sin^2 \beta}{2 \sin^2 \beta} = 50 \cdot 2 \sin^2 \beta =$$

$$= \frac{12,5}{\sin^2 \beta} \cdot 2 \sin^2 \beta \Rightarrow \frac{12,5}{\sin^2 \beta} = \frac{50}{\sin^2 \beta} \Rightarrow \frac{12,5}{\sin^2 \beta} = \frac{50}{\sin^2 \beta} = \sqrt{\frac{5 \cdot 5^2}{1 \cdot 2,5^2}} =$$

$$= 2 \Rightarrow AI^2 = \frac{2 \cdot 25}{\sin^2 \beta} \cdot 2 \sin^2 \beta = 50 \Rightarrow AI = 5\sqrt{2}$$

Ответ: $5\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-1)^2 \geq 16 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y-1)^2 \leq 16 \end{cases}$$

$$ax + y - 2b = 0$$

$$y = -ax + 2b$$

$$y = kx + b$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 16$$

$$\frac{12-x}{y} = \cos \alpha$$

$$\frac{y}{12-x} = \cos \alpha = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

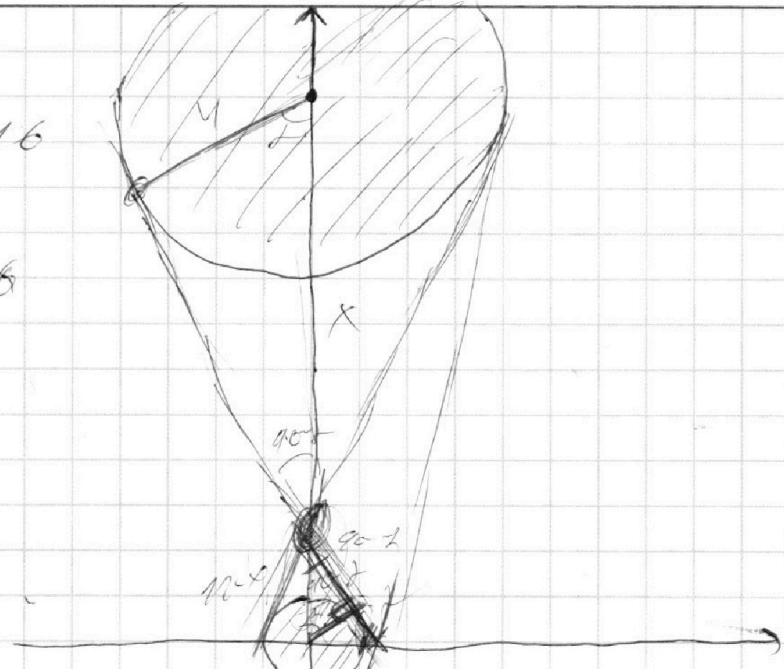
$$yx = 12 - x \Rightarrow x = \frac{12}{5} = 2,4$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{13} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{12}{5} = -a$$

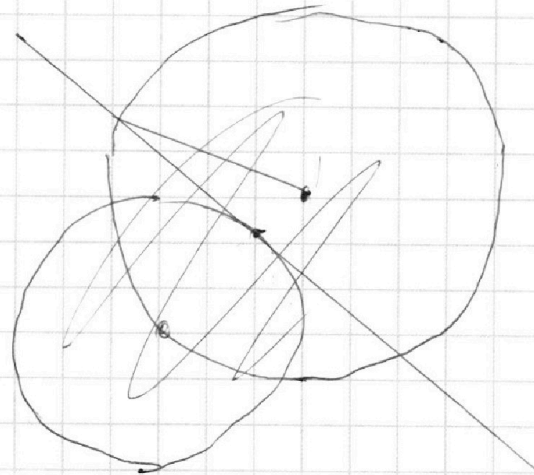
$$a = \pm \frac{12}{5} \Rightarrow b = 2,4$$

$$6x = \frac{12}{5}$$

$$x = \frac{2}{5}$$



$$-a = \tan \alpha$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 & \cancel{12x^3} + 226x^2 + 4 \cancel{6x} - 12x^2 + 60x = \cancel{26x^3} + 12x^2 - \cancel{4x} - 7x^2 \\
 & - 24x + 24x^2 + 24x + 8 \\
 & 27x^4 + 54x^3 - \cancel{12x^2} - \cancel{60x} - 249x^2 - 60x + 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 432 + 432 + 4 - 996 + 120 \\
 & \hline
 & 868
 \end{aligned}$$

$$432 \cdot 2^4 + 432 \cdot 2^3 = 432(468)$$

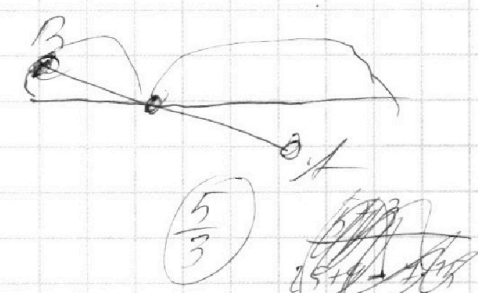
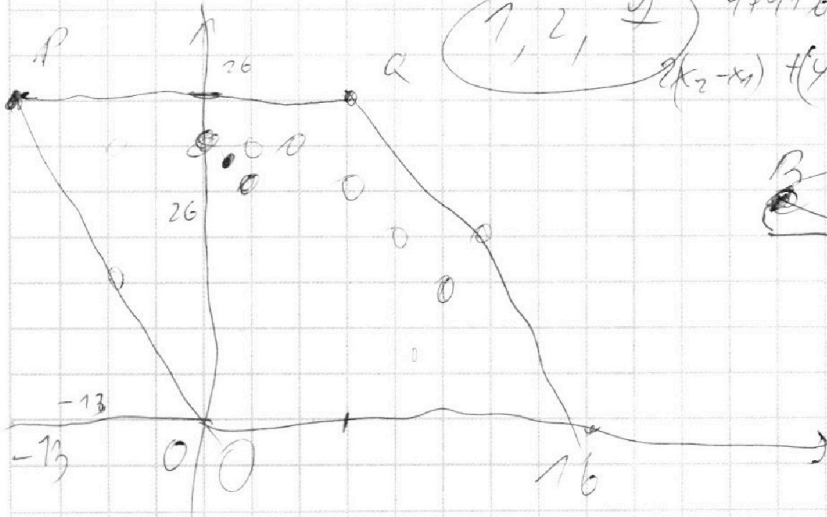
$$\cancel{20368 + 4}$$

$$\cancel{9436 + 4} - 996 + \dots^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
 3x^2 - 6x + 2 &= 0 \\
 6 \pm \sqrt{36 - 24} \\
 \hline
 6
 \end{aligned}$$

$$\frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

$$\begin{aligned}
 & 4 + 9 + 6 = 19 \quad -3 \pm \sqrt{9 - 72} = 0 \\
 & 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14
 \end{aligned}$$



$$\left(\frac{5}{3}\right)$$

Если 9 точек
то 46-26
246-76-46

$$x_2 - x_1 \leq 16 - (-13) = \boxed{\leq 29}$$

$$\begin{aligned}
 y_2 - y_1 &\leq 26 \\
 &\neq 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 4a - 4a + 4 \quad \left(\frac{9}{-45}\right) \quad a+b = \frac{9ab}{a+b} \rightarrow 9 > 9 \\
 & -4a + 4 = \left(\frac{9}{-45}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (a+b)^2 - 9ab \\
 & \frac{(a+b)^2 - 9ab}{a+b} \quad (a+b)
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical solution on grid paper. The diagram shows two overlapping circles with centers O_1 and O_2 , and points A and B on their common chord. Various geometric relationships and algebraic equations are written around the diagram.

Key equations and steps:

- $AC = \frac{12}{7}$
- $x = 7$
- $3x^2 - 6x + 2 = (1 - \frac{9}{x})^2 \sqrt{7x^2} = \frac{9(9x - 1)}{x}$
- $3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 = 42 = 9 \cdot 6$
- $6x^2 + 3x + 3$
- $3(2x^2 - x + 1) = 1 - 10x + 4x^2 + 2\sqrt{(x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$
- $-3x^2 + 15x + 2 = 2\sqrt{\dots}$
- $(3x^2 - 15x - 2)^2 = 4(2x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)$
- $9x^4 + 225x^2 + 4 - 12x^2 - 12x^2 + 60x = 4(6x^2 + 6x^2 + 6x + 2) - 6x + 6x^2 + 6x + 2$
- $27x^4 + 81x^3 - 204x^2 - 60x = 225 + 12 - 12x^2 - 4x^2 - 60x + 24$
- $27x^4 + 81x^3 - 204x^2 - 60x - 225 - 12 = 12x^2 - 4x^2 - 60x + 24$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving a triangle and its medians.

Top Diagram: Shows a triangle with medians intersecting at point O. A line through O is perpendicular to one of the medians. Handwritten notes include: $2x_2 - 2x_1$, $2(x_2 - x_1)$, $y_2 - y_1 = 2y$, $y_2 - y_1 = 2y$. Calculations: $BM = \frac{5}{\sin \gamma}$, $NC = \frac{2.5}{\sin \beta}$. Trigonometric identities: $\cos 2\alpha = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta$, $\cos 2\gamma = \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma$. Formulas for AM: $AM = \frac{2b}{\sin \beta}$, $AM = \frac{2a}{\sin \alpha}$, $AM = \frac{2c}{\sin \gamma}$. The ratio $\frac{AM}{AN} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma}$ is derived. A boxed formula: $a^2 = 2ab \cos \gamma + b^2$.

Bottom Diagram: Shows the same triangle with medians and a line through the centroid O perpendicular to a median. Handwritten notes include: $AM = 5 \cdot \sin \gamma$, $BM = \frac{5}{\sin \gamma} \Rightarrow AI = \frac{2.25}{\sin^2 \gamma} (1 - \cos \beta)$, $AI = \sqrt{30} = 3\sqrt{2}$. Further calculations: $AI = \frac{2 \cdot 2.25}{\sin^2 \gamma} - \frac{2 \cdot 2.25}{\sin^2 \gamma} \cdot (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)$, $= \frac{2 \cdot 6.25}{\sin^2 \beta} - \frac{2 \cdot 6.25}{\sin^2 \beta} \cdot (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma)$. The identity $\frac{\sin 2\gamma}{\sin^2 \beta} = \frac{5(1 - \cos \beta)}{2.5(1 - \cos \beta)}$ is used. The final result is $\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos \gamma}}$ and $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos \gamma}}$.

Bottom Left: A boxed formula: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{AM}{AN} = \sqrt{2}$.

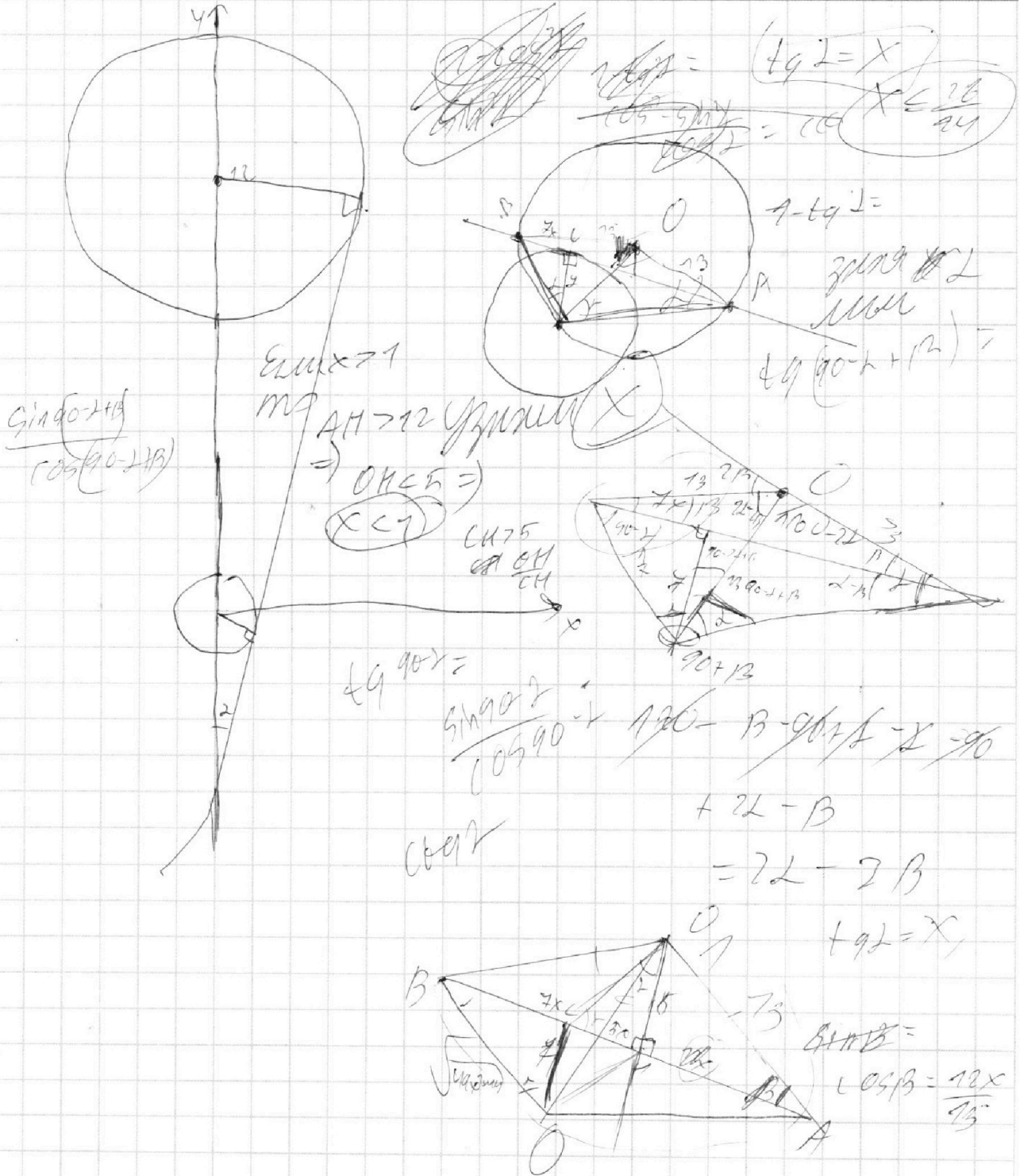
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

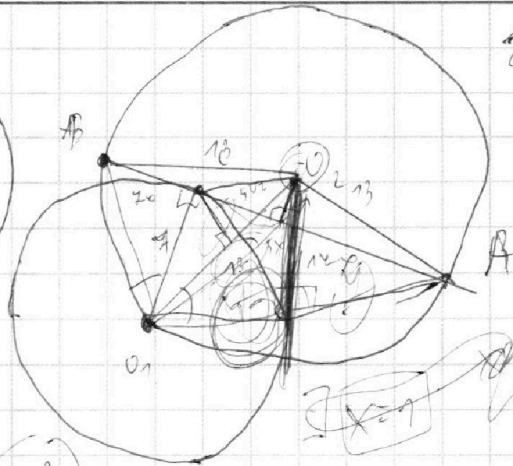
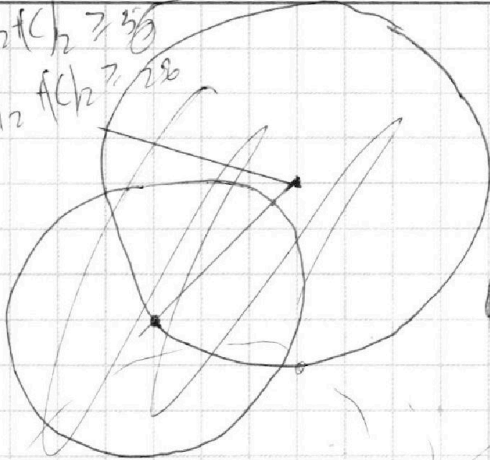
1 2 3 4 5 6 7



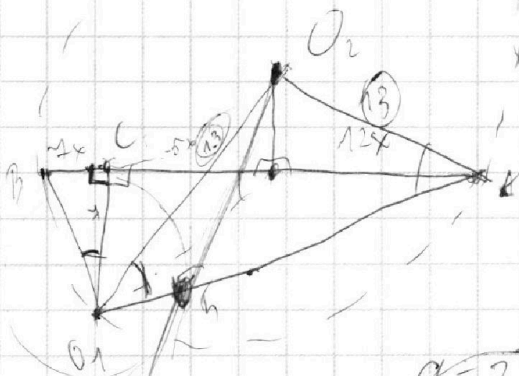
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$2a_2 + b_2 + c_2 \geq 33$
 $(a_2 + b_2) + c_2 \geq 28$



$24 + c = 29$
 $24 + c \leq 26$
 $x \Rightarrow \begin{cases} x \leq 26 \\ x \geq 24 \end{cases}$



$(a+b) \geq 11$

$x = \frac{12c}{O_1C} = \tan \angle BO_1C =$
 $= \tan \angle U_2 O_1 A$

$\frac{15}{23} = \frac{55}{23}$

$ab = 2^{\frac{15}{7}}$

$a+b \geq 11$
 $a+c \geq 16$
 $b+c \geq 39$
 $b \geq 39 - c$

$31 = 23 + 2b$
 $41 = 2b$

$b = 9$
 $\Rightarrow a = 9, 10, 11, 13$

$ab = 2^{\frac{15}{7}}$
 $bc = (c^{\frac{14}{9}} \cdot 16) \Rightarrow c = 2^{\frac{14}{9}}$

$a = 2^{10}$
 $c = 2^{13}$
 $b = 2^5$

$a + 39 - c \geq 41$
 $a - c \geq 2$
 $a + c \geq 16$
 $2c \geq 46$
 $c \geq 23$

$34 = 29 + 2b$
 $29 = 39 + 2b$

$\Rightarrow a = 0$
 $b = 29, c = 28$