МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$ab \vdots 2^{15} \cdot 7^{4}$

$bc \vdots 2^{17} \cdot 7^{18} \Rightarrow (abc)^2 \vdots 2^{45} \cdot 7^{68} \Rightarrow$

$ac \vdots 2^{23} \cdot 7^{39}$ $\quad abc \vdots 2^{23} \cdot 7^{34}$

Пусть α, β, γ - степени 2-и чисел a, b и c соотв ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, т.к. a, b, c - натуральные) тогда

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geq 15 \\ \beta + \gamma \geq 17 \\ \gamma + \alpha \geq 23 \end{cases}$$

β	Мин. число больше которого α	Мин. число больше которого γ
0	15	17
1	14	16
2	13	15
3	12	14
4	11	13
5	10	12
6	9	11

$\alpha + \beta \geq 23$. Значит $\min(\alpha + \beta + \gamma)$ достигается при $b = 5$, т.к. после b увеличивается, а $\alpha + \gamma \geq 23$

$b = 5$; $\alpha = 11$; $\gamma = 12$ - подходит, т.е. $\alpha + \beta + \gamma \geq 28$

$abc \geq 2^{28} \cdot 7^{x}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. степени „7" не влияют на степени „2", то переобозначим α, β, γ как степени „2" чисел a, b и c соотв. имеем:

$$\begin{cases} \alpha+\beta \geq 11 \\ \beta+\gamma \geq 18 \\ \alpha+\gamma \geq 39 \end{cases}$$

α	мин. число больше которого β	Мин. число больше которого γ
0	11	39
1	10	38
2	9	37
3	8	36
4	7	35
5	6	34
6	5	33
7	4	32
8	3	31
9	2	30
10	1	29
11	0	28
12	0	27

При $\alpha \geq 12$ сумма $\alpha+\beta+\gamma$ уменьшаться не будет (к α приб. 1, из γ выч. 1) значит $\min(\alpha+\beta+\gamma)$ равно 39. ($\alpha=12$; $\gamma=27$; $\beta=0$)

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2

$\frac{a}{b}$ - несократимая ⇒ a и b - взаимопросты числа.

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$. Если $a+b \vdots m$, то и ~~дро~~ $a^2-7ab+b^2 \vdots m$ (усл., что дробь сократима) $(a+b)^2-9ab = a^2-7ab+b^2$, получается, что дробь сократима, если $9ab \vdots m$. Если $m \vdots a$ или $m \vdots b$, то $a+b \vdots a$ или $a+b \vdots b$, что невозможно, т.к. a и b - взаимопросты. Значит ~~на~~ $m \leq 9$. Пример $m=9$:

$a=4$; $b=5$. $\frac{4+5}{16-140+25} = \frac{9}{41-140} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$$

ОДЗ: $\begin{cases}3x^2-6x+2\geq 0 & (1)\\ 3x^2+3x+1\geq 0 & (2)\end{cases} \Rightarrow x\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$

1) $D=36-4\cdot 2\cdot 3=36-24=12$

$x=\frac{6\pm 2\sqrt{3}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$

2) $D=9-4\cdot 3<0$

заметим, что $\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}>0$,

т.к. $\sqrt{3x^2-6x+2}\geq 0$, а $\sqrt{3x^2+3x+1}>0$

$(3x^2-6x+2-3x^2-3x-1)=(1-9x)(\sqrt{3x^2+3x+1}+\sqrt{3x^2-6x+2})$

$1-9x=(1-9x)(\sqrt{3x^2+3x+1}+\sqrt{3x^2-6x+2})$

$x=\frac{1}{9}$ или $\sqrt{3x^2+3x+1}+\sqrt{3x^2-6x+2}=1$

(подходит под ОДЗ)

$f(x)=3x^2+3x+1$. Найдём $x_в$: $x_в=\frac{-3}{6}=\frac{-1}{2}$

$f(-\frac{1}{2})=\frac{3}{4}-\frac{3}{2}+1=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$. Заметим, что

при $x<0$ $3x^2-6x+2\geq 2>1$, а при $x>0$

$3x^2+3x+1>1$; при $x=0$: $3x^2+3x+1=0+1=1$ и

$3x^2-6x+2=2$; $\sqrt{1}+\sqrt{2}>1$ при $x\in$ ОДЗ $\sqrt{3x^2+3x+1}+\sqrt{3x^2-6x+2}>1$

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:
1 2 3 4 5 6 [X] 7
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!
МФТИ

№6

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-ax+8b \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ x^2+(y-12)^2\ge 16 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2+y^2\ge 1 \\ x^2+(y-12)^2\le 16 \end{cases}$$

$x^2+y^2=1$ - окр. с ц. в точке $(0;0)$ и $R=1$

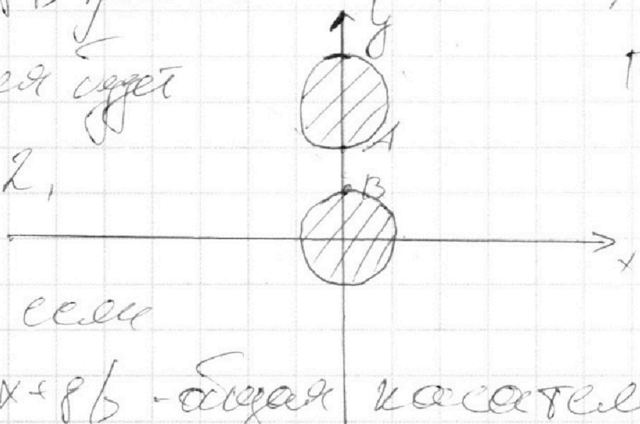
$x^2+(y-12)^2-16$ - окр. с центром в т. $(0;12)$ и $R=4$

$y=-ax+8b$ прямая

$A(0;8)$

$B(0;1)$

Решений будет ровно 2,



только если

$y=-ax+8b$ - общая касательная кругов, иначе либо не будет решений, либо бесконечно много, либо 1.

$x^2+(8b-ax)^2=1$; $x^2+64b^2-16abx+a^2x^2-1=0$

$x^2(1+a^2)+x(-16ab)+64b^2-1=0$

$D=(16ab)^2-4(1+a^2)(64b^2-1)=0$ (усл. касания)

$48a^2b^2+(1+a^2)(1-64b^2)=0$

$48a^2b^2+a^2-64a^2b^2+1-64b^2=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 [X] 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6

Пусть $k = -a$ и $8b = \tilde{b}$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y = kx+\tilde{b} \end{cases} \Rightarrow x^2+k^2x^2+2kx\tilde{b}+\tilde{b}^2-1=0$$

$$x^2(1+k^2)+x(2k\tilde{b})+\tilde{b}^2-1=0$$

$D = 4k^2\tilde{b}^2-4(1+k^2)(\tilde{b}^2-1)=0$ (усл. для касания) $k^2\tilde{b}^2-(\tilde{b}^2-1+k^2\tilde{b}^2-k^2)=$

$= -\tilde{b}^2+k^2+1$, значит ~~$k^2=(\tilde{b}^2+1)$~~ $\tilde{b}^2=k^2+1$

$$\begin{cases} x^2+(y-12)^2=16 \\ y=kx+\tilde{b} \end{cases}$$

$k\neq 0$, т.к. прямая, параллельная оси Ox не явл. общ. касательной.

$x=\dfrac{y-\tilde{b}}{k}$ $\quad \dfrac{y^2-2y\tilde{b}+\tilde{b}^2}{k^2}+y^2-24y+128=0$

$$y^2-2y\tilde{b}+\tilde{b}^2+k^2y^2-24k^2y+128k^2=0$$

$$y^2(1+k^2)+y(-24k^2-2\tilde{b})+\tilde{b}^2+128k^2=0$$

$D = 4(12k^2+\tilde{b})^2-4(1+k^2)(\tilde{b}^2+128k^2)=0$

$(12k^2+\tilde{b})^2-(1+k^2)(\tilde{b}^2+128k^2)=$

$=(13k^2+1)^2-(1+k^2)(129k^2+1)=$

$=169k^4+26k^2+1-(129k^2+1+129k^4+k^2)$

Пусть $k^2=a$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$169a^2+26a+1-(129a^2+130a+1)=$

$=40a^2-104a=0$, т.к. $a\neq 0$

$40a=104$; $a=\frac{104}{40}=\frac{52}{20}=\frac{26}{10}=\frac{13}{5}$

Обратная замена

$b^2=\frac{13}{5}$; $b^2=\frac{18}{5}$

Обратная замена:

$a^2=\frac{13}{5}$; $64b^2=\frac{18}{5}$

Заметим, что при $a=\pm\sqrt{\frac{13}{5}}$ существуют b, являющиеся ~~реш~~ параметром, при которых ровно 2 решения

Ответ: $\pm\sqrt{\frac{13}{5}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a^2 - 64b^2 - 12a^2b^2 + 1 = 0$

$b^2(-64 - 12a^2) + 1 - a^2 = 0$

$D_b = 4(64 + 12a^2)(1 - a^2)$

~~Нн~~ $a = 0$ - не подходит, т.к. прямая, пар-ая OX не является общей касательной

$x = \dfrac{8b - y}{a}$

$\left(\dfrac{8b-y}{a}\right)^2 + (y-12)^2 = 16$

$\dfrac{64b^2 - 16by + y^2}{a^2} + y^2 - 24y + 144 - 16 = 0$;

$64b^2 - 16by + y^2 + y^2a^2 - 24a^2y + 128a^2 = 0$

~~Дл~~ $y^2(1 + a^2) + y(-16b - 24a^2) + 64b^2 + 128a^2 = 0$

$D = 8^2(2b + 3a^2)^2 - 4(1 + a^2)(64b^2 + 128a^2) = 0$

$4b^2 + 6a^2b + 9a^4 - 4(1 + a^2)(4b^2 + 8a^2) = 0$

$4b^2 + 6a^2b + 9a^4 - 16b^2 - 32a^4 - 16a^2b^2 - 32a^2 = 0$

$-12b^2 - 23a^4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

α	β 7.	γ 7.	
0	11	39	
1	10	38	
2	9	37	
3	8	36	
4	7	35	
5	6	34	
6	5	33	
7	4	32	
8	3	31	
9 ·1	2 -1	30 -1	
10	1	29	40
11	0	28	39
12 +		27 -1	
13 +1	0		

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\alpha+\beta+\gamma = 57-\gamma$

$\gamma = 23$

$\gamma = 46-\gamma$ $2\gamma = 46$

$\gamma = 23$

$\alpha = 16$

$\alpha+\beta+\gamma = 50-\alpha$

$\alpha = 15-\beta$

$\gamma = 23-\alpha$

$\alpha+\gamma = 38-\beta-\alpha$

$\alpha+\gamma = 23$

$\beta+\alpha = 15$

$\alpha=0$ $\gamma = 39$ $\beta = 11$ α 40

$\alpha=1$ $\beta = 38$ $\beta = 10$ 39

$\alpha=5$ $\beta = 6$ $\gamma = 34$ 45

$\alpha = 15-\beta$

$\beta = 17-\gamma$

$\gamma = 23-\alpha$

$\beta=0$ $\alpha = 15$ $\gamma = 17$

$\beta = 1$

$\alpha=0$

$\gamma = 39$

$\beta = 10$

$\alpha=1$

γ

49

$\alpha+\beta+\gamma = 57-\gamma$

57

$\alpha+\beta+\gamma = 37$

$\alpha = 14$

$\gamma = 16$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(min знач. $\alpha+\beta+\gamma$) (значение $32-\beta$)

β	$\alpha+\beta+\gamma=$	$32-\beta=$
0	23	32
1	24	31
2	25	30
3	26	29
4	27	28
5	28	27
6	29	
⋮		

Откуда видно, что при $b \geq 5$ выполняется необходимое усл. ($\alpha+\beta+\gamma \geq 32-\beta$), значит $\alpha+\beta+\gamma \geq 28$ (подходят $\alpha=11$; $\beta=5$; $\gamma=12$)

т.к. степени „2" не зависят от степеней „7", то переобозначая α, β, γ как степени „7" чисел a, b и c соотв.

Имеем:

$$\begin{cases} \alpha+\beta \geq 11 \\ \beta+\gamma \geq 18 \\ \gamma+\alpha \geq 39 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$ab \vdots 2^{15}\cdot 7^{11}$

$bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{18} \Rightarrow (abc)^2 \vdots 2^{45}\cdot 7^{68} \Rightarrow$

$abc \vdots 2^{23}\cdot 7^{34}$

$ac \vdots 2^{23}\cdot 7^{39}$

Пусть α, β, γ - степени „2" чисел a, b и c соотв. $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, тогда

$\begin{cases} \alpha+\beta \geq 15 \\ \beta+\gamma \geq 17 \\ \gamma+\alpha \geq 23 \end{cases} \Rightarrow 2(\alpha+\beta+\gamma) \geq 45, \quad \alpha+\beta+\gamma \geq 23$

~~Если $\alpha+\beta+\gamma = 23$, то $\beta=0$; $\alpha=15$; $\gamma=8$ - противоречие, значит $\alpha+\beta+\gamma \geq 24$~~

~~$\alpha=11$; $\beta=5$; $\gamma=17$~~

~~При $\beta=0$; $\alpha=15$; $\gamma=8$~~

~~$\beta=0$: $\begin{cases} \alpha \geq 15 \\ \gamma \geq 17 \end{cases}$ $\alpha+\beta+\gamma \geq 32$~~

$\alpha+\beta+\gamma \geq 32-\beta$, причём $\alpha+\gamma \geq 23 \Rightarrow$

$\beta \leq 9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^{15} 7^{4}$

$bc \vdots 2^{17} 7^{18}$

$ac \vdots 2^{23} \cdot 7^{39}$

$(abc)^2 \vdots 2^{45} \cdot 7^{68}$

$abc \vdots 2^{23} \cdot 7^{34}$

2^{α} 2^{β} 2^{γ}

7^{11} 7^{5} 7^{12}

$abc \geq 2^{24} \cdot 7^{39}$

$\alpha+\beta=11$

$\beta+\gamma=18$

$\alpha+\gamma=39$

$\alpha+\beta+\gamma \in [23; 24]$

$\beta \leq 4$ 28

$\alpha \geq 11$

$\alpha+\gamma \geq 32-2\beta$

$\alpha+2\beta+\gamma \geq 32$

$\alpha+2\beta+\gamma \geq 32$ $\alpha+\beta \geq 32-2\beta$

$5+7 \geq 14$

$3+8 \geq 1$

$12 \geq 14$

$11 \geq 1$

$1 \geq 13$

$2(\alpha+\beta+\gamma)=45$

$17 \geq 14$

$-11 \leq -1$

$ac \vdots 7^{39}$

7^{45}

$\begin{cases} \alpha+\beta=33 \\ \beta+\gamma=18 \\ \alpha+\gamma=40 \end{cases}$

$\alpha=$

32 0

24 30 29 $\frac{1}{2}$

$\gamma-\beta=8$

$\gamma=8+\beta$

$2\beta=10$

$\beta=5$

$\alpha=27$

$\gamma=13$

$\alpha+\beta+\gamma=24$

$\beta+\gamma \geq 23$

$\beta=5$

$\beta=0$

$\beta=1$

$\beta=2$

$\beta=3$

$\beta=4$

$\alpha+\beta+\gamma \geq 2\beta-\beta$

$\alpha+\beta+\gamma \geq 57-\gamma$

39

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$ $(abc)^2 : 2^{45} \cdot 7^{68}$

$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$ $abc \geq 2^{23} \cdot 7^{34}$

$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$

$a = 2^{\alpha} \cdot 7$ $b = 2^{\beta}$ $c = 2^{\gamma}$

$\alpha + \beta = 15$

$\beta + \gamma = 17$

$2(\alpha + \beta + \gamma) = 45$

$\underbrace{\alpha + \beta}_{16} + \underbrace{\gamma}_{7} = 23$

$\alpha + \beta = 16$

$\beta + \gamma$

$\begin{cases} \alpha + \beta = 16 \\ \beta + \gamma = 17 \\ \gamma + \alpha = 23 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha + \beta = 11 \\ \beta + \gamma = 18 \\ \gamma + \alpha = 39 \end{cases}$

$a^2bc : 7^{50}$

$b^2ac : 7^{29}$

$c^2ab : 7^{57}$

$\gamma = 7$

$\alpha = 16$

$\beta = 0$

$\gamma - \beta = 7$

$\gamma = 7 + \beta$

$2\beta = 10$

$2\alpha + \beta + \gamma$

$\boxed{\beta = 5}$

$\boxed{\gamma = 12}$

$\boxed{\alpha = 11}$

$\gamma - \beta = 28$

$\gamma = 28 + \beta$

$2\beta = -10$

$\beta = -5$

$\alpha = 16$

$\gamma = 22$

$\begin{cases} \gamma - \beta = 28 \\ \gamma + \beta = 18 \end{cases}$

27

2^{11} a

2^{5}

12 b

2

c α

$\alpha \geq 9 + \gamma$

$\beta \geq 21 + \alpha$

$\gamma \geq 28 + \beta$

$\gamma \geq$

$\alpha + \gamma \geq 32 - 21$

$\alpha + \beta + \gamma \geq 23$

$0 \leq \beta$

$\beta = 9$

$\gamma = 14$

$\alpha = 9$

$32 - \beta$

31

24

β

25

26

$\boxed{24}$ 29 30

$\boxed{27}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$y = ax + 8b$

$x^2 + a^2x^2 - 16axb + b^2 = 1$

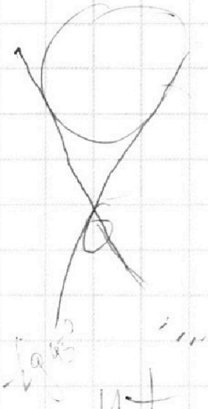
$x^2(1+a^2) + x(-16ab) + b^2 - 1 = 0$

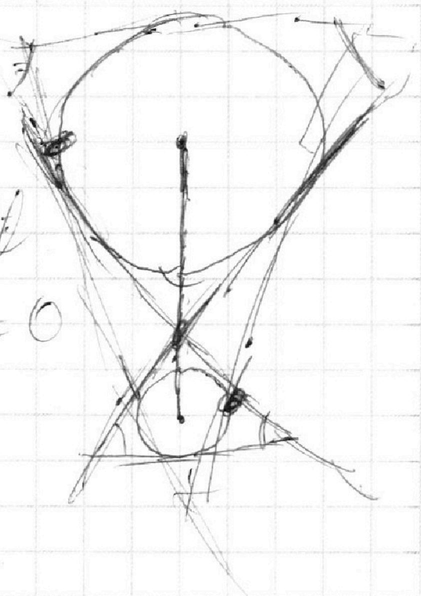
$D = 256a^2b^2 - 4(1+a^2)(b^2-1) =$

$= 256a^2b^2 + 4(1+a^2)(1-b^2) =$

$= 256a^2b^2 + 4(a^2 - a^2b^2 + 1 - b^2) =$

$= 252a^2b^2 + 4a^2 - 4b^2 + 4 = 0$





$16 \cdot 16$

$16 \cdot 4$

$a^2(63b^2+1) - b^2 + 1 = 0$

64

$64a^2b^2 + a^2 - a^2b^2 - b^2 + 1 = 0$

$63a^2b^2 + a^2 - b^2 + 1 = 0$

b^2

$4;\ 12$

$0;\ 1$

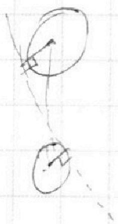
$\begin{cases} 12 = 4k + b \\ 0 = k + b \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 3k = 12 \end{cases}$

$y = kx + b$

$k = 4 \quad b = -4$

$16 \cdot 4$

$y = 4x^2 - 4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$y=kx+b$

$x^2+y^2=1$

$x^2+k^2x^2+2kxb+b^2-1=0$

$x^2(1+k^2)+x(2kb)+b^2-1=0$

$D=4k^2b^2-4(1+k^2)(b^2-1)=0$

$k^2b^2-(b^2-1+k^2b^2-k^2)=0$

$k^2-b^2=0$

$k^2=b^2$

!!!

$y=kx+b$; $x=\frac{y-b}{k}$

$x^2+(y-12)^2=16$

$\frac{y^2-2yb+b^2}{k^2}+y^2-24y+128=0$

$y^2-2yb+b^2+y^2k^2-24yk^2+128k^2=0$

$y^2(1+k^2)+y(-2b-24k^2)+b^2+128k^2=0$

$D=4(b+12k^2)^2-4(1+k^2)(b^2+128k^2)=0$

$(b+12b^2)^2-(1+b^2)(b^2\cdot129)=0$ $b\neq0$

$b^2(1+12b)^2-\cancel{b(1+b)}\ b^2(1+b)\cdot129=0$

$169 \mid 13$
$-13 \quad 13$
39

104

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$ab \vdots 2^{15} \cdot 7^{11}$

$bc \vdots 2^{17} \cdot 7^{18}$

$ac \vdots 2^{23} \cdot 7^{39}$

$(abc)^2 \vdots 2^{55} \cdot 7^{68}$

$abc \geq 2^{23} \cdot 7^{34}$ не хор. 2^{24} не хорошо, т.к. $ac \vdots 7^{39} \Rightarrow$

$abc \geq 2^{24} \cdot 7^{39}$

$\underbrace{|2^{\alpha} \cdot 7|}_{a}$ $\underbrace{|2^{\beta} \cdot 7|}_{b}$ $\underbrace{|2^{\gamma} \cdot 7|}_{c}$

$\frac{-3}{6} = \frac{1}{2}$

$\alpha+\beta+\gamma = 24$

$\begin{cases} \alpha+\beta = 15 \\ \beta+\gamma = 17 \\ \gamma+\alpha = 23 \end{cases}$

$\alpha+\beta+\gamma = 55$

a 2^{13} 7

b 2 7

c 2^{10} 7

3

$\alpha+\beta+\gamma=$

$a+b \vdots m$

6

6

$\alpha+\beta = 15$

$\beta+\gamma = 17$

$\gamma+\alpha = 23$

$a+b \vdots m$

$9ab \vdots m$

1

$(a;b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$

$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} \vdots m$

$D = 49b^2 - 4b^2 = 45b^2$

$a_1 = 7b - 3\sqrt{5}b$

$a_2 = 7b + 3\sqrt{5}b$

$\frac{(a+b)(a+ \quad \vdots m \quad)}{(a+b)^2 - 5ab}$

Взаимнопросты!

$\frac{a(1+\frac{b}{a})}{a(a-7b+\frac{b^2}{a})}$

$9ab \vdots m$ $\boxed{9}$

$\frac{a+b}{9ab} = \frac{1+\frac{b}{a}}{9b}$

$a+b \vdots 9$ $\frac{3}{4}$ -

$a=4$ $b=5$ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

$\frac{4+5}{16-140+25} = \frac{9}{41-140} = \frac{9}{-99} = \frac{1}{-11}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{3x^2-6x+7}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$

ОДЗ: $\begin{cases} 3x^2-6x+7\geq 0 \\ 3x^2+3x+1\geq 0 \end{cases}$ — верно $D<0$

$\sqrt{3x^2+6x+7}+9x=1+\sqrt{3x^2+3x+1}$

$36-8\cdot 3=12$

$x=\frac{6\pm 2\sqrt{3}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$

$x\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$

$x_в=\frac{6}{3x^2}$ $\frac{3-6}{2}=-\frac{3}{2}$

$-1,5x$

$\sqrt{3x^2+3x+1}\geq\sqrt{3x^2-6x+7}$

$3x^2+3x+1\geq 3x^2-6x+7$ $3x^2-6x+7-3x^2-3x-1=$

$9x\geq 1$ $=(1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+7}+\sqrt{3x^2+3x+1})$

$x\geq\frac{1}{9}$ л.ч. ≤ 0 а пр.ч. ≤ 0

$-9x-1$

$\frac{1}{9}$ — корень

$\cancel{3x^2}-6x+7+81x^2=1+\cancel{3x^2}+3x+1$
$+18x\sqrt{3x^2-6x+7}$ $+2\sqrt{3x^2+3x+1}$

$81x^2-9x+1$ 6

$\frac{3}{4}+\frac{6}{2}+7$

a 21 : 3

18 : 9 : 3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$3x^2+3x+1+3x^2-6x+1+2\sqrt{\ldots}=1$

$6x^2-3x+1+2\sqrt{\ldots}=0$

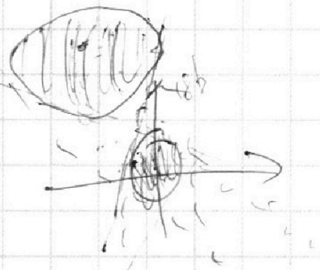
$2\sqrt{\ldots}=3x-6x^2-1$

$\frac{3}{4}+\frac{6}{2}+2=$ $ax+y-8b=0$

$\sqrt{\ }<0\Rightarrow$ $y=\underbrace{-ax+8b}$

$x>0$

$x^2+y^2=1$ $x^2+(y-12)^2=16$



$(y_2-y_1)=14-2(x_2-x_1)$

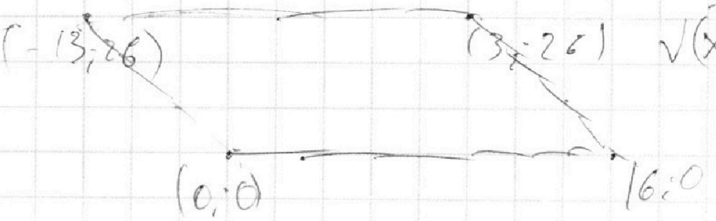
$x^2+y^2=1$ $x^2+(y-12)^2=16$

$y=kx+b$ $x=\frac{y-b}{k}$ $x^2+(kx+b-12)$

$x^2+k^2x^2+2kxb+b^2=1$ $\frac{y^2-2yb+b^2}{k^2}+y^2-24y+144=16$

$2=0$

$2(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=14$



$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$

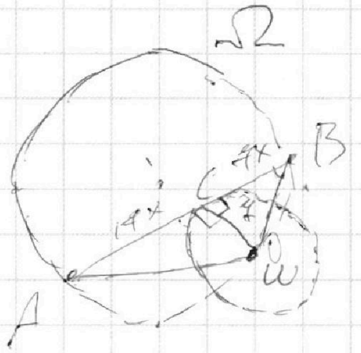
$t^2+2(7-t)^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

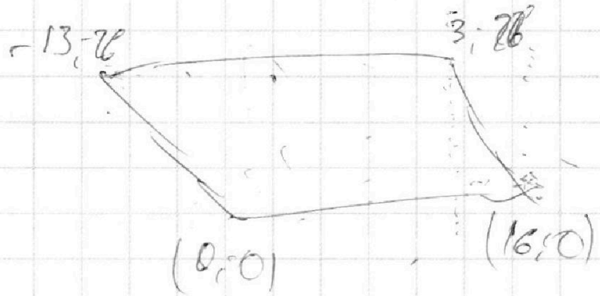


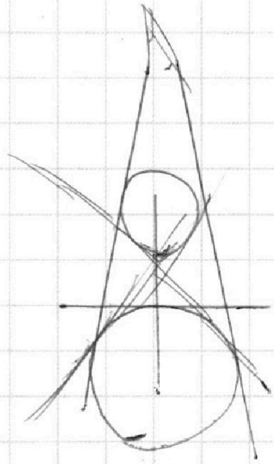
~~R=2R=~~

$R=13 \quad \omega=7$

$AB=\sqrt{t^2+(14-2t)^2}=\sqrt{t^2+4(7-t)^2}=\cancel{t^2}+4$

$=t^2+4(49-$





$x_2-x_1=1$

$x_2-x_1=a \quad a\in[-29;29]$

$y_2-y_1=b \quad b\in[-26;26]$

$2a+b=14$

$a=\frac{14-b}{2} \Rightarrow b$ - чёт

$b=2k$

$a+k=7 \quad a\in[-29;29] \quad k\in[-13;13]$

27 решений

$a=7+k$