



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) если у a, b и c есть **общий** делитель $q \neq 1$ то для $\frac{a}{q} < a$ также справедливы
($\exists a, \text{НОД}$)

и утверждения (по ОТА). Тогда можно считать, что кроме 2 и 7 прост. дел у
 a, b и c нет.

2) пусть степени вхождения двоек: $d_a, d_b, d_c \in \mathbb{N}$ для a, b, c соотв.
семерки - s_a, s_b, s_c

$$\begin{cases} d_a + d_b \geq 14 \\ d_b + d_c \geq 17 \\ d_a + d_c \geq 20 \end{cases} \Rightarrow d_a + d_b + d_c \geq \frac{14 + 17 + 20}{2} = 25,5 \Leftrightarrow d_a + d_b + d_c \geq 26$$

пример для $d_a + d_b + d_c = 26$:

$$\begin{cases} d_a = 9 \\ d_b = 6 \\ d_c = 11 \end{cases}$$

3) $s_a + s_b + s_c \geq s_a + s_c = 37$

пример для $s_a + s_b + s_c = 37$:

$$\begin{cases} s_a = 20 \\ s_c = 17 \\ s_b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_a + s_b \geq 10 \\ s_b + s_c \geq 17 \\ s_a + s_c \geq 37 \end{cases}$$

таким образом, $\min abc = 2^{d_a + d_b + d_c} \cdot 7^{s_a + s_b + s_c} = 2^{26} \cdot 7^{37}$

где $a = 2^9 \cdot 7^{20}$

$b = 2^6 \cdot 7^{17}$

$c = 2^{11} \cdot 7^{17}$

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} \xrightarrow[\text{несокр.}]{\text{сокращ. на } a+b} \frac{(a+b)^2-8ab}{a+b} \xrightarrow[\text{несокр.}]{\text{сокращ. на } a+b} \frac{(a+b)^2-8ab}{a+b}$$

$$\Rightarrow a+b - \frac{8ab}{a+b} \xrightarrow[\text{несокр.}]{\text{сокращ. на } a+b} \frac{8ab}{a+b}$$

$$* \left. \begin{array}{l} (a+b):m \\ 8ab:m \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)^2:m \\ 8ab:m \end{cases} \Rightarrow (a+b)^2-8ab:m$$

$$\text{т.е.} \begin{cases} (a, a+b) > 1 & \text{I} \\ (b, a+b) > 1 & \text{II} \\ (8, a+b) > 1 & \text{III} \end{cases}$$

~~или~~ I, II невозм. т.к. в ~~этих~~ случаях $(a, b) > 1$, не по м. Шко

$$\left\{ \begin{array}{l} (8, a+b) > 1 \\ (a, a+b) = 1 \\ (b, a+b) = 1 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} m = (8, a+b) > 1 \text{ т.е. } m \leq 8. \end{array} \right.$$

Пример для $m=8$: $a=7, b=1$

$$\frac{\overbrace{7+1}^{=8}}{49-6 \cdot 7+1} = \frac{8}{8} = 1 \text{ (сокращ. на } 8)$$

Ответ: $m=8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \Leftrightarrow \sqrt{t+q} - \sqrt{t} = q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2t + q - \sqrt{t(t+q)} = q^2 \quad q = q \cdot (\sqrt{t+q} + \sqrt{t}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q=0 \\ \sqrt{t+q} + \sqrt{t} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} q=0 \\ t=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow q=0 \Leftrightarrow 7x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{7}$$

/ $t \geq 0$, тогда и $q \geq 0$, т.е. ~~не может~~ $\sqrt{t+q} + \sqrt{t} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{t+q} = -\sqrt{t} = 0 \Leftrightarrow t=q=0$ /

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

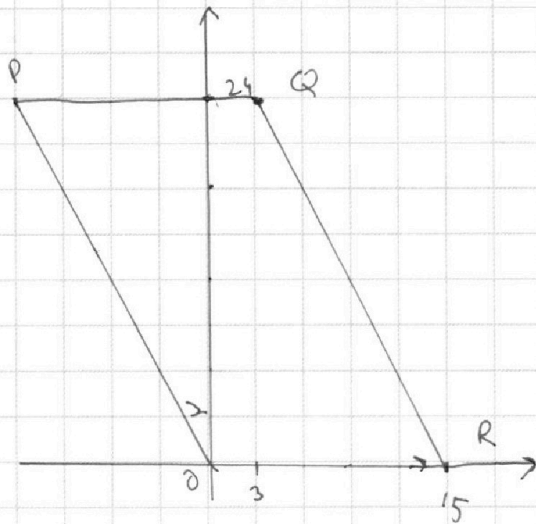
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



таких точек довольно много.

~~таких~~

$\lambda x_2, y_2$ имеют вид

$x_1 + a, y_1 + b$, где $a, b \in \mathbb{Z}$

$$2a + b = 12.$$

$$|a| \leq 27$$

$$|b| \leq 24.$$

$\forall (x_0, y_0); x \exists y$

таких точек (x, y) таких, что

$$\exists a, b: x = x_0 + a$$

$$y = y_0 + b$$

$$2a + b = 12, a, b \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

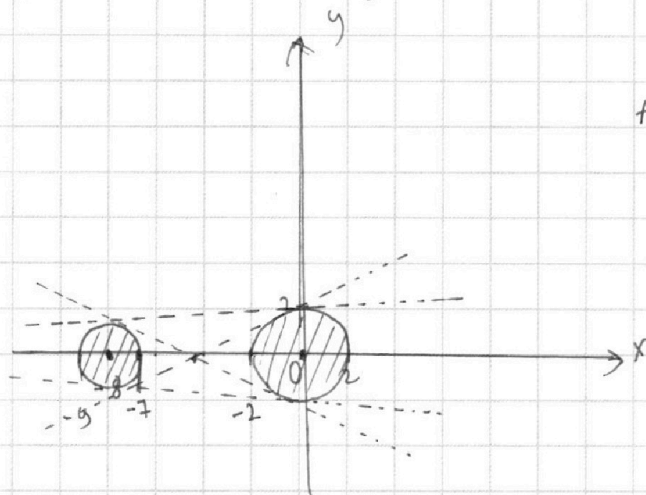
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\& 1) \begin{cases} ax - y + 10b = 0 & \text{— прямая} \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & \text{— 2 непересекающиеся окружности} \end{cases}$$



если обведем $x \in 1$ кругу, то найдем такую точку (x_0, y_0) :

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

которая не будет принадлежать ни одной из окружностей, т.е. является 3-м решением.

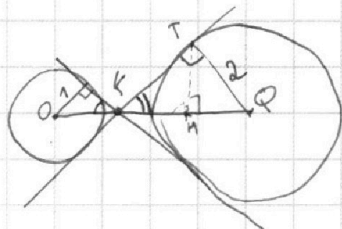
Тогда точка пересечения прямой и 1-го круга и 1-го и 2-го.

т.е. прямая — общая касательная.

Тогда есть 4 такие прямые, т.е. ~~3~~ ровно 4.

$$a = \tan \alpha \quad (\tan \alpha \text{ угла кас. прямой})$$

2)



$$\frac{OK}{KQ} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$$

$$OQ = 8, \text{ тогда } OK = \frac{8}{3}, KQ = \frac{16}{3}$$

$$\text{т.е. } KT = \sqrt{2^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2}, \text{ тогда } \tan \alpha = \frac{KT}{OK}$$

найти $\tan \alpha$ и $\cot \alpha$, т.е. ~~и~~ найти точку касания T

тот же образ

$$|\alpha| = \frac{TK}{KH} = \frac{TQ}{KT} = \frac{2}{\sqrt{4 + \frac{256}{9}}}, \quad a = \pm \frac{2}{\sqrt{\frac{36 + 256}{9}}} = \pm \frac{6}{\sqrt{292}}$$

Остальные 2 знака a найдем аналогично

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

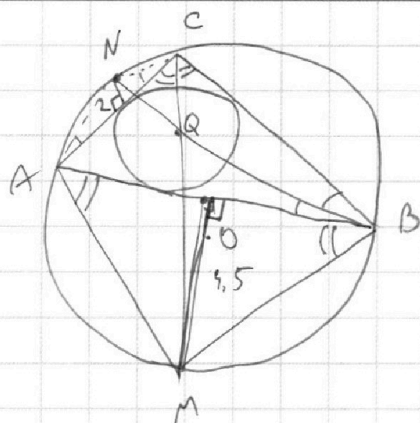
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AQ = ?$

MC — диаметр, т.е. $MC \perp$ плоскости ANQ .

аналогично BN

$MO \perp AB$, т.е. $MO \perp$ плоскости ANQ .

$MO \perp$ плоскости ANQ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

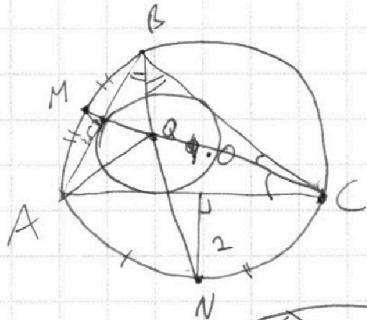


черновик

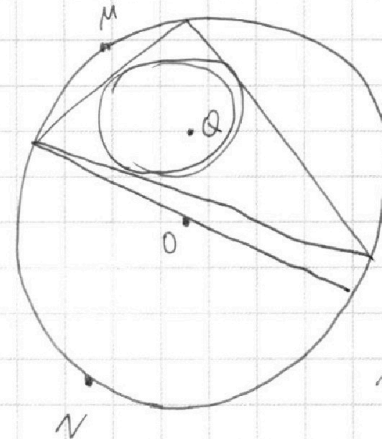
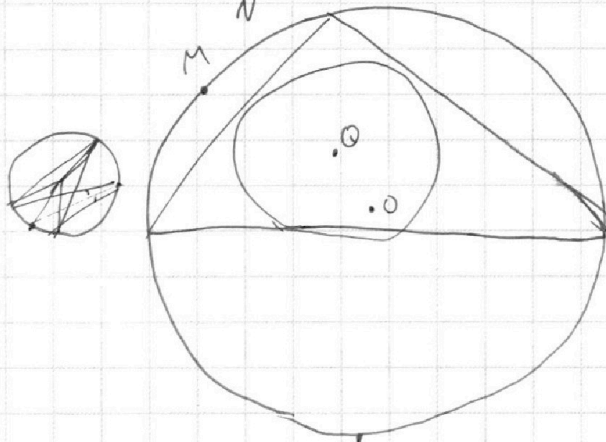
6.

~~ax-y нол~~

AQ=?

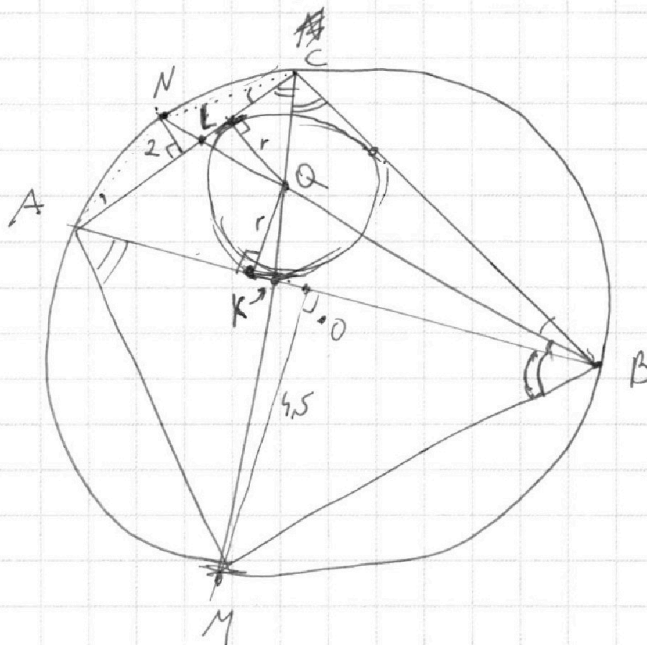


МС-диск, зипчик содержит Q.
(необяз. соед. O)



AQ=?

$$\frac{2r}{LQ} = \frac{LN}{LQ}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

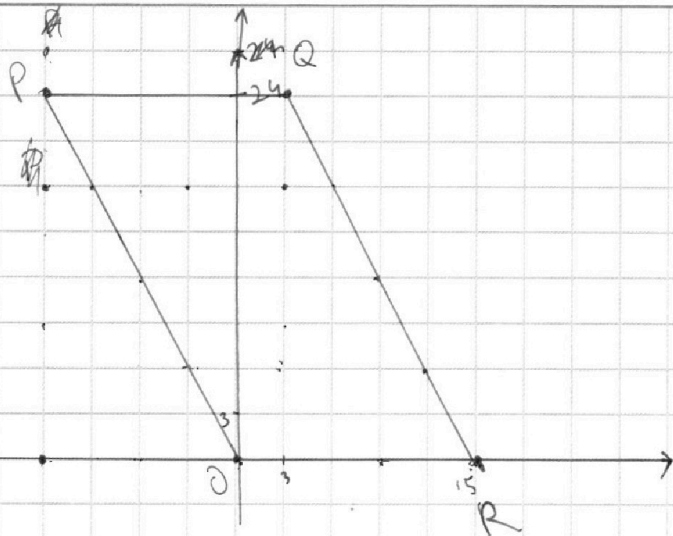
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



x_0, y_0 12, 39 - ✓

$x_0 + a, y_0 + b$

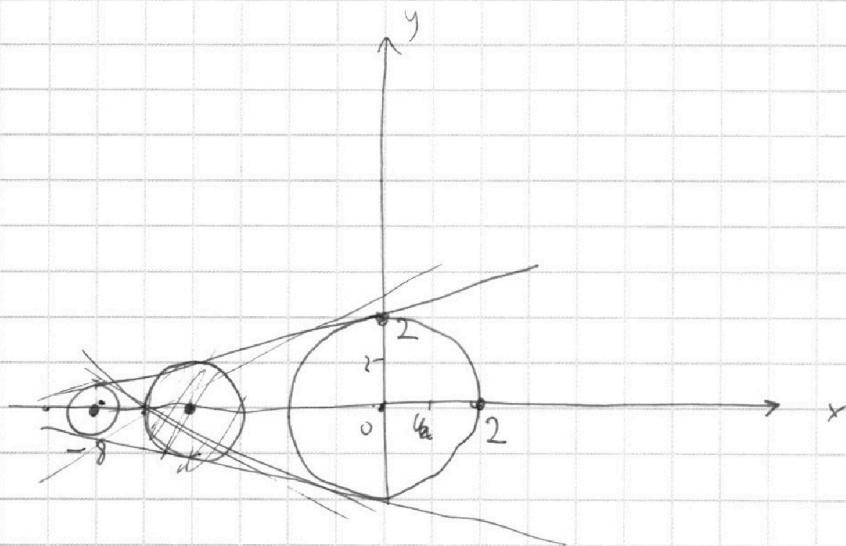
$|a| \leq 27$

$|b| \leq 24$

$2a + b = 12$

x_0, y_0

$x_1 \rightarrow a \rightarrow b$



A - прямая
B - быч три одного

по структуре 2-х
группы.

если 2 точки
прям. 1 кругу,
то

A - прямая
B - 2 круга
(не пересекающиеся)

если 2 ~~точки~~ прям-я \in 1 кругу, то найдется такая точка,

$$\begin{cases} X = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

кот. как те лежит в кругу и \in той же прямой

тогда 1 прям-я - в кругу
2 - во 2-м.

т.е. касательная



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чер

$$y = ax + 10b$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + a^2 x^2 + 20abx + 100b^2 = 4$$

tg α. $8 - \frac{8}{3} + \frac{29-8}{3} = \frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



черновик

ми

$$ab : 2^{14} 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} 7^{17}$$

$$ac : 2^{20} 7^{37}$$

2) сст. вложения двойки: $d_a, d_b, d_c \in \mathbb{N}$
 $7 : s_a, s_b, s_c$

$$d_a + d_b \geq 14$$

$$d_b + d_c \geq 17$$

$$d_a + d_c \geq 20$$

$$s_a + s_b \geq 10$$

$$s_b + s_c \geq 17$$

$$s_a + s_c \geq 37$$

1) если у а есть ~~н~~ делитель q, тогда $\frac{a}{q}$ тоже простое число по ОГА.

Тогда можно считать, что $abc : 2^x 7^y$ и только, других пр. дел. нет.

$$d_a + d_b + d_c \geq ?$$

$$s_a + s_b + s_c \text{ (мин)} = ?$$

$$3) \quad d_a + d_b + d_c \geq \frac{14+17+20}{2} = \frac{51}{2} = 25,5$$

$$s_a + s_b + s_c \geq \frac{10+17+37}{2} = \frac{64}{2} = 32$$

← с. вх 7 вавс

$$d_a + d_b + d_c \geq 26$$

← с. вх 2 вавс

$$abc : 2^{14} 7^{10} \quad 2^{17} 7^{17} \quad 2^{20} 7^{37}$$

пример:

$$d_a = x$$

$$d_b = 14 - x$$

$$d_c = 17 - (14 - x) = 3 + x$$

$$x, 14-x, 3+x$$

$$2x + 2 = 20$$

$$d_a + d_c = 20$$

$$x + 3 + x = 20$$

$$2x = 17$$

$$\begin{cases} x+y=10 \\ y+z=17 \\ x+z=37 \end{cases}$$

$$d_a = x = 9$$

$$d_b = 14 - x = 5$$

$$d_c = 20 - 9 = 11$$

$$x+y=15$$

$$y+z=17$$

$$x+z=20$$

$$15-x+20-x=17$$

17=10

17+10=27

$$17-z + 37-z = 10$$

$$44 = 2z$$

$$z = 22$$

$$x = \dots$$

$$y = -?$$

$$x+y=10$$

$$17+10-x=17$$

$$27-x=17$$

$$\begin{cases} x=9 \\ y=6 \\ z=11 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

$$16 + \sqrt{25-16x^2} = 7x^2$$

$$(7x^2-16)^2 = 25-16x^2$$

$$\frac{(a+b)^2-8ab}{a+b}$$

$$49t^2 - 14 \cdot 16t + 16^2 = 25 - 16t$$

$$\Rightarrow a+b - \left(\frac{8ab}{a+b}\right) - a-b = (a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

~~16 + \sqrt{25-16x^2}~~

$$49t^2 - 13 \cdot 16t = 25 - 256 = -231$$

$$49t^2 - 13 \cdot 16t + 231 = 0$$

$$t = \frac{13 \cdot 16 \pm \sqrt{(13 \cdot 16)^2 - 4 \cdot 49 \cdot 231}}{2 \cdot 49}$$

$$\sqrt{\frac{b-7x+2}{q}} - \sqrt{t} = \frac{2-7x}{q}$$

$$\frac{8}{49+1-6 \cdot 7} = \frac{50}{42}$$

$$\sqrt{t+q} - \sqrt{t} = q$$

$$2t+q - \sqrt{t(t+q)} = q^2$$

$$4t^2 = t(q+t)$$

$$3t = tq$$

$$t=0$$

$$\Rightarrow 3t=q$$

нескор.
 $(a+b):m \Rightarrow (a+b)^2:m$
 $8ab:m$
 $(a+b)^2-8ab:m$

т.е. либо $(a, a+b) > 1A$

$(b, a+b) > 1B$

$(8, a+b) > 1B$

$[A \cap B] \Rightarrow \emptyset$, т.к. $a, b > 1$.

$m = (8, a+b) > 1 // m \leq 8 //$

$a+b : 2$ или 4 или 8 .

тогда например $a=7$

$a=7, b=1$

$b=1$
 $a+b=8$

работает.

$$\frac{81-8 \cdot 8}{64} = \frac{9}{16}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

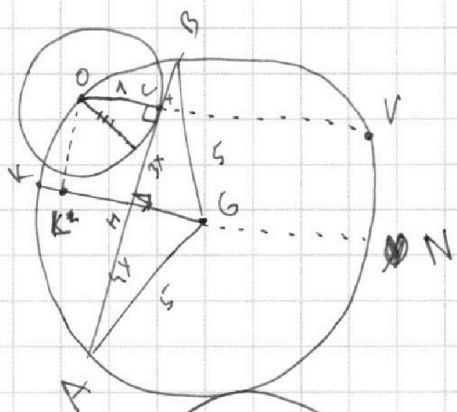
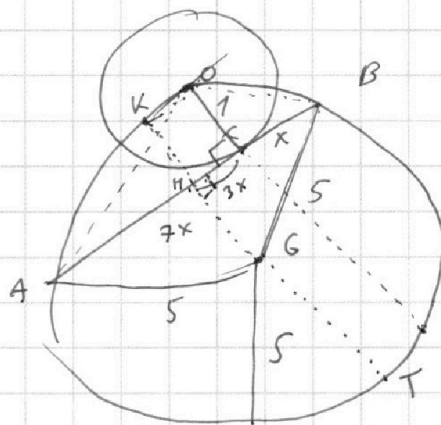
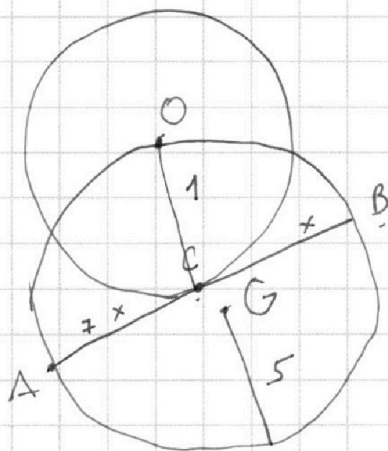


МФТИ

$OC \cdot CV = AC \cdot CB$

~~$OC \cdot CV$~~ $= 1 \cdot (16 + \sqrt{25 - 16x^2}) = 7x \cdot x$

$8x = ?$



$AO = \sqrt{1 + 16x^2}$ $OB = \sqrt{1 + x^2}$

$\triangle GBF \sim \triangle AAK \sim \triangle BAH$ $BH = AK = 4x$

$GM = \sqrt{25 - 16x^2}$

$MK = 5 - \sqrt{25 - 16x^2}$

$\frac{EG}{HK} = \frac{3x}{5 - \sqrt{25 - 16x^2}}$

~~EG~~

$KM \cdot MT = AK \cdot KB = 16x^2$

~~$(5 - \sqrt{25 - 16x^2}) \cdot (\sqrt{25 - 16x^2} + 5)$~~

$KM = 5 - \sqrt{25 - 16x^2}$

$KL = KM - 1 = 4 - \sqrt{25 - 16x^2}$

$OV = 25 - 2 \cdot KL = 25 - 8 + \sqrt{25 - 16x^2} = 17 + \sqrt{25 - 16x^2}$

10

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1
$$+2S_B + S_A + S_C \geq 37 + 2S_B$$

$$S_A + S_C = 37$$

$$\begin{cases} S_A + S_C \geq 15 \\ S_B + S_C \geq 17 + 5 = 22 \end{cases}$$

$$S_A + S_B + S_C \text{ min.}$$

$$S_A + S_C = 37$$

$$S_A + S_B + S_B + S_C \geq 37 + 2S_B$$

$$(37 - S_A) + S_B \geq 17$$

$$10 + 17 \geq 16$$

$$(37 - S_C) + S_B \geq 10$$

$$S_A = 15$$

$$S_C = 22$$

$$S_B = -5$$

$$\begin{cases} S_A - S_B \leq 20 \\ S_C - S_B \leq 17 \end{cases}$$

$$37 + 2S_B \geq 17$$

$$\underbrace{S_A + S_C}_{\substack{\sqrt{1} \\ 37}} + \underbrace{S_B}_{\substack{\sqrt{1} \\ 0}} \geq 37$$

$$\begin{cases} S_A = 20 \\ S_C = 17 \\ S_B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 2^9 & \cdot & 7^{20} \\ 2^6 & & 7^{17} \\ 2^{11} & & 1 \end{matrix}$$

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



15.

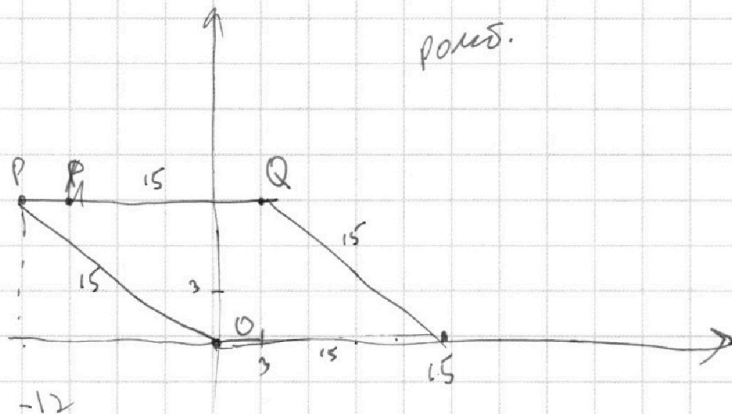
$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

ка обложке

$$2x_2 + y_2 = 12 + (2x_1 + y_1)$$

$$\frac{2(x_2 - x_1)}{y_1 - y_2 + 12} = 1$$

полуб.



~~2x_2~~

$$2x_0 - 2x_0 + y_0 - y_0 = 12$$

$$2x + y = 12 + 2x_0 + y_0 =$$

$$= 2(x_0 + 4) + (y_0 + 4)$$

$$2(x+a) + (y+b)$$

мож. x_2, y_2 зумити як x_1+a, y_1+b ,
туте $a, b \in \mathbb{Z}$ и $a+b=12$

$$2(x+1) + y$$

$$2x + (y+12)$$

$$2(x+1) + (y+10)$$

$$2(x+2) + (y+8)$$

$$2(x+3) + (y+6)$$

$$2(x+4) + (y+4)$$

$$2(x+5) + (y+2)$$

$$2(x+6) + y$$

$$a, b \in \mathbb{Z}, a+b=12.$$

$$a \neq 0, b \neq 0$$

$$a \neq 12, b \neq 0$$

$$a \neq 0, b \neq 12$$

$$a \neq 12, b \neq 12$$

$$a \neq b$$

$$-9 \leq b \leq 9$$

$$-27 \leq a \leq 27$$

при \rightarrow гали $x_1, y_1, 0 \leq y_1, y_2 \leq 9$

$$-12 \leq x_1, x_2 \leq 15$$

