



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a_1 = 2^{a_1} \cdot 7^{a_2}$, $b_1 = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}$, $c_1 = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2} \Rightarrow$ варианты a_1

$a_1 b_1 = 2^{a_1+b_1} \cdot 7^{a_2+b_2} : 2^{15} \cdot 7^{11}$

$a_1 b_1 c_1 = 2^{a_1+b_1+c_1} \cdot 7^{a_2+b_2+c_2} : 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow$

$b_1 c_1 = 2^{b_1+c_1} \cdot 7^{b_2+c_2} : 2^{17} \cdot 7^{18}$

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 15 \\ a_2 + b_2 \geq 11 \\ a_1 + c_1 \geq 17 \\ b_2 + c_2 \geq 18 \\ a_1 + c_1 \geq 23 \\ a_2 + c_2 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow$$

$\begin{cases} 2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 15 + 17 + 23 = 55 \\ 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 11 + 18 + 39 = 68 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 \geq \frac{55}{2} = 28 \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{68}{2} = 34 \end{cases}$

Если я смогу привести пример на то, что $a_1 b_1 c_1 = 2^{28} \cdot 7^{34}$, то
(т.к. $a_1 c_1 : 7^{39}$)

я попробую подобрать числа

$a_1 b_1 c_1 = 2^{28} \cdot 7^{34} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2^{11} \cdot 7^{11} \\ b_1 = 2^5 \\ c_1 = 2^{12} \cdot 7^{13} \end{cases}$ (я подберу сумму сумм $a_1 b_1 c_1$)

Такой пример не получится, так как $2^{11} \cdot 2^5 \cdot 2^{12} = 2^{28}$. Тогда, следуя по логике, можно подобрать "число" $A = 2^{25} \cdot 7^{39}$.

К тому же я привел пример

Ответ: $2^{23} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} - \frac{a+b}{(a+b)^2-3ab} \cdot \text{Пусть по условию } \begin{cases} a+b: m \\ (a+b)^2-3ab: m \end{cases}$$

$$\text{Если } (a+b): m, \text{ то } (a+b)^2: m \Rightarrow 3ab: m \Rightarrow$$

Если $a: m$, то, т.к. a и b — взаимно простые, то $b \not\equiv m$, но $(a+b): m$ — противоречие

~~$a \not\equiv m; b \not\equiv m \Rightarrow 3ab$ имеет делителя m~~

~~то только если $3: m, a, b$~~

$$\begin{cases} 3a: m \\ 3b: m \\ a: m \\ b: m \\ 3: m \\ a+b: m \\ 3ab: m \end{cases} \rightarrow \text{делитель } m \text{ из условия}$$

Если $a+b: m$, то и при этом a и b взаимно простые,

то $3a \not\equiv m, 3b \not\equiv m$ и $a+b \not\equiv m \Rightarrow$ только $3 \not\equiv m$.

Максимальное число, на которое делится 3 — это 3

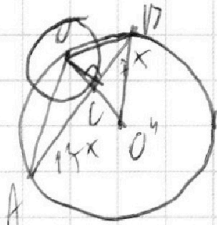
Пример: $a=2, b=4 = \frac{3}{3^2-3 \cdot 2 \cdot 4}$

Ответ: $m=3$

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3



3 Центр окружности $\omega - O$

Положим $OC = r = 4 \Rightarrow OB^2 = 49 + 4x^2 \quad | \quad AB = 2 \cdot 4x$

$AO^2 = 14^2 x^2 + 49$

3 Центр окружности $\Omega - O'$

Положим $\cos \angle OAB = \frac{1}{2} \angle OO'B$; $|\cos \angle OAB| = \frac{4x}{\sqrt{49 + 4x^2}} \Rightarrow$

$|\cos \angle OO'B| = 2 \cdot \cos^2 \angle OAB - 1 = \frac{2 \cdot 16x^2}{49 + 4x^2} - 1 = \frac{14x^2 - 49}{49 + 4x^2}$

$OB^2 = 49x^2 + 49$

По м. косинусов $OB^2 = 49x^2 + 49 = 2 \cdot 165 - 2 \cdot 165 \cdot \frac{14x^2 - 49}{49 + 4x^2} \Rightarrow$

$14^2 x^2 + 14^2 49x^2 + 49x^2 + 49 = 2 \cdot 165 \cdot 14x^2 + 2 \cdot 165 \cdot 49 - 2 \cdot 165 \cdot 14x^2 - 2 \cdot 165 \cdot 49 \Rightarrow$

$14^2 x^4 + 14^2 x^2 + 49x^2 + 49 - 4 \cdot 165 = 0 \Rightarrow$

$14^2 x^4 + x^2(14^2 + 49) + 49 - 4 \cdot 165 = 0$

Да $x^2 = t \Rightarrow 14^2 t^2 + (14^2 + 49)t + 49 - 4 \cdot 165 = 0$

$D = 14^4 + 49^2 + 2 \cdot 49 \cdot 14^2 - 4 \cdot 14^2 \cdot 49 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165 = (14^2 - 49)^2 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165 =$

$= 10^2 \cdot 24^2 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165 =$

$t = \frac{-14^2 - 49 \pm \sqrt{10^2 \cdot 24^2 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165}}{2 \cdot 14^2} = t^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\sqrt{10^2 \cdot 24^2 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165} - 14^2 - 49}{2 \cdot 14^2}} \Rightarrow$

$t = \frac{-14^2 - 49 - \sqrt{10^2 \cdot 24^2 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165}}{2 \cdot 14^2}$ и получаем $AB = 24x$

Ответ: $AB = \frac{24}{14} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{10^2 \cdot 24^2 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165} - 14^2 - 49}{2}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 5x$$

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 2; \quad g(x) = 3x^2 + 3x + 1$$

$$x_0 = 2$$

$$x_0' = -\frac{1}{2}$$

$$f(x_0) = 12 - 12 + 2 = 2 > 0; \quad g(x_0') = 3 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4} > 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) > 0$$

$$3 \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = a; \quad \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = b$$

$$a - b = a^2 - b^2 \Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \end{cases}$$

Задача № 4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 5x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = a; \quad \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = b \Rightarrow a - b = a^2 - b^2 \Rightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \end{cases}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \text{ Проверим } 3x^2 + 3x + 1 =$$

$$D = 36 - 12 = 24$$

$$\begin{cases} 3(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 3(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) + 1 > 1 \\ 3(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 3(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$3(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}) + 3 - \sqrt{3} + 1 =$$

$$= 8 - 3\sqrt{3} > 1$$

$$\text{при } x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} > 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x = 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

Ответ: $\{\frac{1}{3}\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

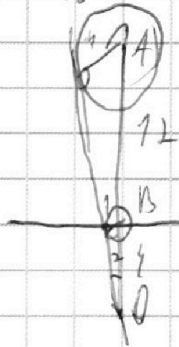
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Задача №5 - программисте~~
~~Анализ~~



$$\frac{OB}{OA} = \frac{1}{4}, AB = 12 \Rightarrow AB \Rightarrow OB = 1 \Rightarrow OB = 4$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha) = -\operatorname{tg}(\beta) = a = \frac{\sqrt{4^2 - 1}}{1} = \sqrt{15} \Rightarrow \text{Будем}$$

~~Умножим на -1 получим $- \sqrt{15}$ тоже не подходит.~~

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \sqrt{15}; \pm \frac{\sqrt{17-4}}{5} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Можете №8 б

$$\begin{cases} x+y-86=0 \\ (x^2+y^2-1) \cdot (x^2+(y-12)^2-16) = 0 \end{cases}$$

Если рассмотреть график второго

уравнения, то получим такую картинку,

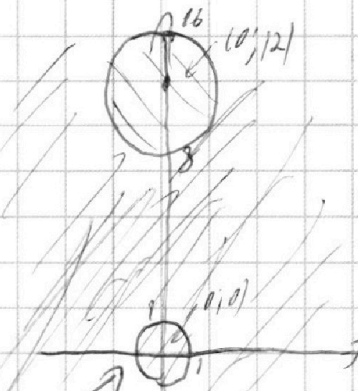
где либо не существует первого круга, либо внутри

существует, если предположить будем касаться одной из

окружностей, и будем иметь свои 2 общие точки, то тогда

будет бесконечно много пересечений \Rightarrow решений. Тогда, получим

две окружности малых радиуса с касательными.



Итак:



$$\frac{AB}{BO} = \frac{4}{1} = 4$$

$$AB = \frac{12}{5} \cdot 4; BO = \frac{12}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{12^2-5^2}}{5} = \frac{\sqrt{144-25}}{5} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{12^2-5^2}}{5} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

Валеты миллиметров

$$-a = \frac{\sqrt{119}}{5} \text{ малые радиусы}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

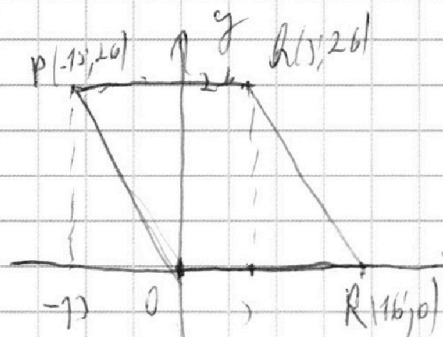
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5



$$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

+ прямую, содержащую $|OP|$:

$$R = \frac{26}{13} = 2; b = 0$$

$$y = -2x + b$$

Всего на $|OP|$ 13 точек с целочисленными координатами.
 Если вычислить на основании уравнения и показать,
 что все точки с целыми координатами внутри отрезка
 принадлежат прямой, \parallel OP (или $y = -2x + b$), то

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = b_2 - b_1 = 14$$

прямая, с $|OP|$ имеет уравнение $y = -2x + 0$, $|OQ|: y = 2x$

$$0 = -2x + b \Rightarrow b = 32 \Rightarrow b \in [0; 32]$$

Если $b_1 = 0$, то b_2 должно равняться 14

$$b_1 = 1 \Rightarrow b_2 = 15, \dots, b_1 = 18 \Rightarrow b_2 = 32$$

Всего на каждой b_1 прямой по 13 целочисленных точек, т.е.

всего на $18 \cdot 13 = 13^2$ точек

$$\text{Ответ: } 13 \cdot 13^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Знаем ли 6-угольник



Анализ: $\frac{OB}{OA} = \frac{1}{4}$; $AB = 12 \Rightarrow AP = 3, OB = 4$

$$\text{ctg}(4) = -\text{tg}(\alpha) = -4 = \frac{\sqrt{4^2-1}}{1} = \sqrt{15} \Rightarrow$$

Величина симметричности - $\sqrt{15}$ также

нагрузка

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \sqrt{15}; \pm \frac{\sqrt{4^2-1}}{1} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

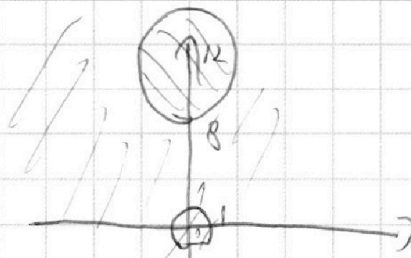
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 6

$$\begin{cases} x + y - 8 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1) \cdot (x^2 + y^2 - 12) - 16 \leq 0 \end{cases}$$

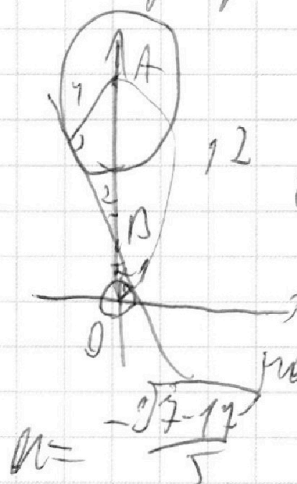
$$(x^2 + y^2 - 1) \cdot (x^2 + y^2 - 12) - 16 \leq 0$$



Если переписать график второго неравенства,
то получим две окружности, $x^2 + y^2 = 1$
либо же является решением первой окружности, или второй
или третьей.

Самостоятельно, если прямая дуга пересеклась с
окружностью в 2 точках (окружностью), то дуга делится
на 2 части пересечений \rightarrow не t дуга является решением.

Тогда получаем, как по условию только 4 угла \angle
вот так вот.



$$\frac{AB}{BO} = \frac{4}{7} \Rightarrow AB = \frac{12 \cdot 4}{5} = 9.6; BO = \frac{12}{5}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha) &= \operatorname{tg}(\rho) = -\alpha = \frac{-\sqrt{12^2 - 9.6^2}}{9.6} \\ &= \frac{-\sqrt{71.76}}{9.6} \end{aligned}$$

Величину α можно
получить по формуле

$$\alpha = \frac{-\sqrt{71.76}}{9.6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

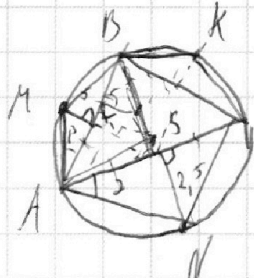
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5



1) $\angle ANK = \angle MLC$; $\angle ANK = \angle MLC \Rightarrow \angle ANB$ - п.д.;

$\angle ANC$ - п.д. $\Rightarrow ANS$ и ML - диаметры и

и диаметры $\Rightarrow NS$ и ML - взаимно перпендикулярны, центр K $AC \perp MN$.

$$AB = 2 \sqrt{R^2 - (R - 2,5)^2} = 2 \sqrt{10R - 25}$$

$$AL = 2 \sqrt{R^2 - (R - 2,5)^2} = 2 \sqrt{R^2 - R^2 + 5R - 6,25} = 2 \sqrt{5R - 6,25}$$

2) $\angle LAM = 2$; $\angle MAB = \beta$.

Проекция AK на AC - K - пересек. AK с OK .

$\angle BKC = \angle C \Rightarrow \angle BKC$ - п.д. $\Rightarrow 2\angle ANK + 2\angle ANM + 2\angle BKC = 360^\circ \Rightarrow$

$\angle BKC = 180^\circ - \angle ANK - \angle ANM \Rightarrow \angle KCB = \angle KBC = 90^\circ - 2 - \beta =$

$\cos(2\angle KCB) = \cos(2\angle B) = \cos 2 \cdot \cos \beta - \sin 2 \cdot \sin \beta$.

$\angle B = \angle A = \sqrt{10R - 25} \Rightarrow \angle B = \angle A = \sqrt{25 + 10R - 25} = \sqrt{10R}$

$\angle B = \angle A = \sqrt{10R - 25} \Rightarrow \angle B = \angle A = \sqrt{25 + 10R - 25} = \sqrt{10R}$

$AN = ML = \sqrt{5R} \Rightarrow \cos 2 = \frac{\sqrt{10R - 25}}{\sqrt{10R}} = \frac{\sqrt{2R - 5}}{\sqrt{2R}} \Rightarrow$

$\sin 2 = \sqrt{1 - \frac{2R - 5}{2R}} = \sqrt{\frac{2R - 2R + 5}{2R}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2R}}$; $\cos \beta = \frac{\sqrt{5R - 6,25}}{\sqrt{5R}}$; $\sin \beta = \frac{5}{\sqrt{5R - 6,25}}$

$\cos(\angle KCB) = \frac{\sqrt{2R - 5} - \sqrt{5R - 6,25}}{\sqrt{10R}} - \frac{5}{\sqrt{5R}}$

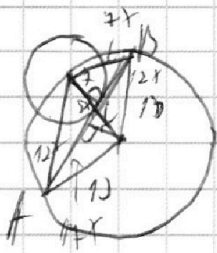
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$h = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

$$R = \frac{13}{2 \sin \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{13}$$

$$R = \frac{13}{2 \cdot \frac{5}{13}} = \frac{169}{10}$$

$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$, $bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$, $ca: 2^{23} \cdot 7^{35}$

$ab = R \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$, $bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$, $ca = l \cdot 2^{23} \cdot 7^{35}$

$$\frac{m}{R} = \frac{2^{17} \cdot 7^{18}}{2^{15} \cdot 7^{11}} = 2^2 \cdot 7^7$$

$$\frac{l}{R} = \frac{2^{23} \cdot 7^{35}}{2^{15} \cdot 7^{11}} = 2^8 \cdot 7^{24}$$

$28 + 18 = 46$, $55 \cdot 2 = 110$

$a_1 + b_1 \geq 15$, $a_2 + b_2 \geq 11$, $a_3 + b_3 \geq 23$

$2a_1 + 2b_1 + 2c_1 \geq 15 + 23 + 14 = 52$

$2a_2 + 2b_2 + 2c_2 \geq 11 + 14 + 18 = 43$

$abc_{\min} = 2 \cdot 7$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a \leq b$

$$a^2 = 49b + b^2$$

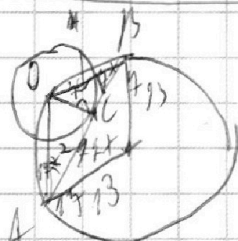
$$a + b = m$$

$$\sqrt{a+b} = 30b; m$$

$$m = 5$$

$$30b; m \Rightarrow \begin{cases} s; m \\ a; m \Rightarrow b/m \\ b; m \Rightarrow a/m \\ a+b; m \end{cases}$$

$$45 + 45x^2 = 2 \cdot 165 - 2 \cdot 165 \cdot \frac{17x^2 - 49}{17x^2 + 49} \Rightarrow$$



$$\sqrt{AO^2 + AO^2 - 49x^2} = OB - 49x^2 \Rightarrow$$

$$AO^2 - OB^2 = 10 \cdot 24x^2 = \frac{AB^2}{24} \cdot AO = \frac{5}{12} AB^2$$

$$AO^2 = 24x^2 \cdot AO^2 + OB^2 - AB^2$$

$$\frac{AO^2 + AB^2 - AOB^2}{2 \cdot AO \cdot AB} = \frac{\sqrt{17x^2 + 49}}{\sqrt{17x^2 + 49}}$$

$$AO^2 = \frac{10 \cdot 24x^2}{2 \cdot 24x \cdot AO} = \frac{10}{AO}$$

$$\sqrt{14}$$

$$\frac{10 \cdot 24x^2}{2 \cdot 24x \cdot AO} = \frac{10}{2 \cdot 24x \cdot AO} = \frac{10}{\sqrt{14x^2 + 49}}$$

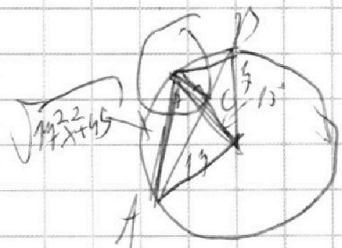
$$AO = \frac{10}{2 \cdot 24x}$$

$$AO = \sqrt{14x^2 + 49} = 285 - 490 = -205$$

$$OB^2 = 49 + 49x^2$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{17x^2 + 49 + 49x^2 + 49x^2}{2 \cdot \sqrt{17x^2 + 49} \cdot \sqrt{17x^2 + 49}}$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{17x^2 + 49 + 98x^2}{2 \cdot \sqrt{17x^2 + 49} \cdot \sqrt{17x^2 + 49}}$$



$$\cos(2\alpha) = \frac{17x^2 + 49 + 98x^2}{2 \cdot \sqrt{17x^2 + 49} \cdot \sqrt{17x^2 + 49}} = \frac{10x^2 + 24x^2}{2 \cdot 24x \cdot \sqrt{17x^2 + 49}}$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{10x + 24x}{2 \cdot \sqrt{17x^2 + 49}} = \frac{17x}{\sqrt{17x^2 + 49}}$$

$$\cos(2\alpha) = 2 \cdot \frac{17x^2}{17x^2 + 49} - 1 = \frac{2 \cdot 17x^2 - 17x^2 - 49}{17x^2 + 49} = \frac{17x^2 - 49}{17x^2 + 49}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение

$$a = 2^{a_1} \cdot 7^{a_2}, \quad b = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}, \quad c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$$

$$2^{a_1+b_1} \cdot 7^{a_2+b_2} = 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad 2^{b_1+c_1} \cdot 7^{b_2+c_2} = 2^{17} \cdot 7^{18}, \quad 2^{a_1+c_1} \cdot 7^{a_2+c_2} = 2^{21} \cdot 7^{33}$$

$$\begin{cases} a_1+b_1 \geq 15 \\ a_2+b_2 \geq 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1+c_1 \geq 21 \\ a_2+c_2 \geq 33 \end{cases}$$

$$a_1+b_1+c_1 \geq 15+18+21 = 54$$

$$a_2+b_2+c_2 \geq 11+18+33 = 62$$

$$2(a_1+b_1+c_1) \geq 15+18+21 = 54 \Rightarrow a_1+b_1+c_1 \geq 27$$

$$2(a_2+b_2+c_2) \geq 11+18+33 = 62 \Rightarrow a_2+b_2+c_2 \geq 31$$

$$33+11 = 52+18 = 68 \Rightarrow a_2+b_2+c_2 \geq 31$$

$$a_2+c_2 \geq 33$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{37}$$

$$c = 2^4 \cdot 7^2$$

$$\Rightarrow c = 2^{13} \cdot 7^{28}$$

$$a = 2^{11} \cdot 7^{11}$$

$$b = 2^5$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2} = \frac{a+b}{a^2+b^2}$$

$$b \neq a$$

$$\begin{cases} a+b \equiv m \\ a-b \equiv m \end{cases}$$

$$2a \equiv 2m \Rightarrow a \equiv m$$

$$36$$

$$a \equiv m$$

$$a \equiv m; \quad a+b \equiv m; \quad a \equiv m; \quad b \equiv m$$

$$a=3, \quad b=11$$

$$a=4, \quad b=3$$

$$a+b$$



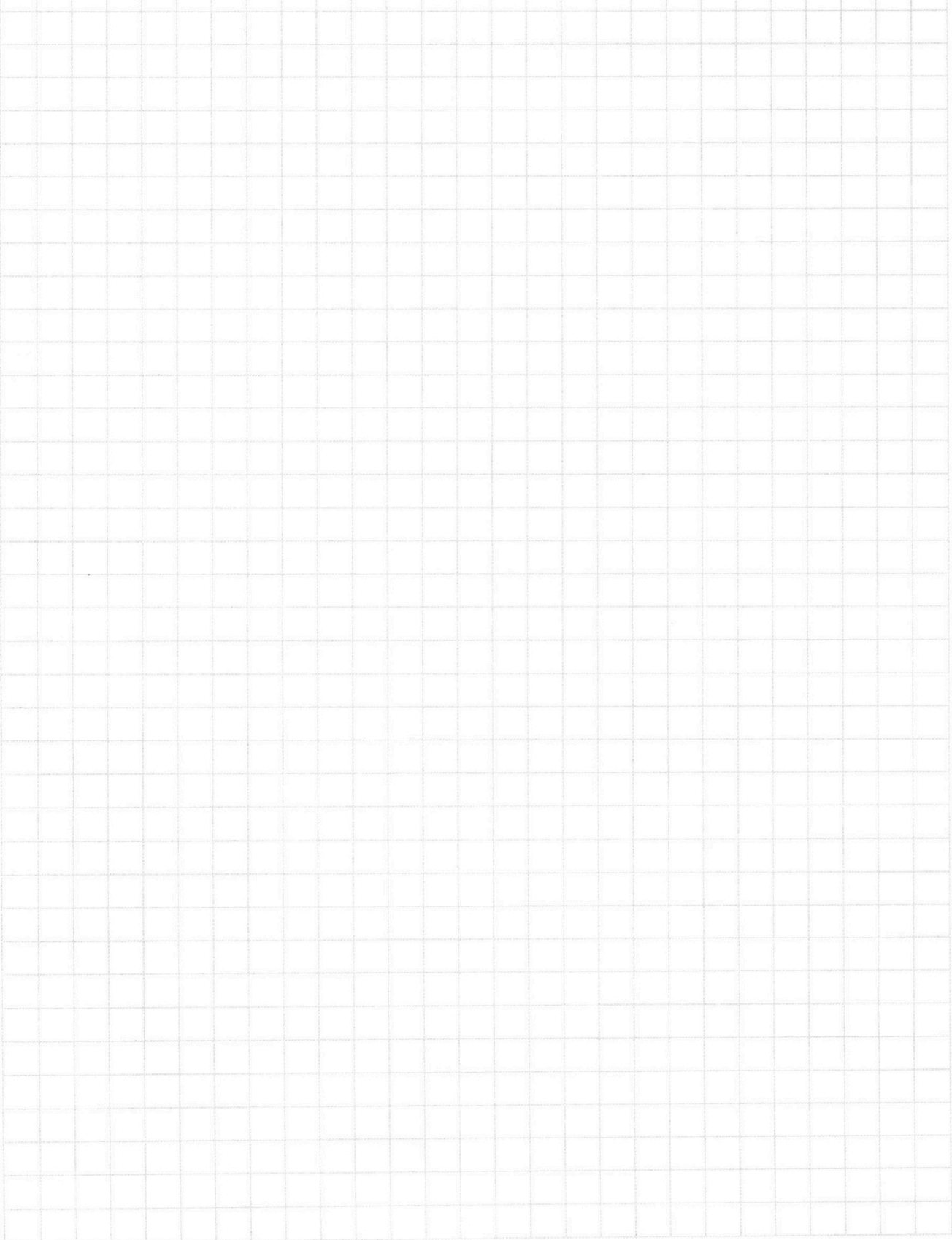
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$49 \cdot 49^2 x^2 + 49^2 + 49x \cdot 19^2 x + 49x^2 = 2 \cdot 169 - 2 \cdot 169 \cdot 19^2 x - 2 \cdot 169 \cdot 49$$

$$t = x^2$$

$$49 \cdot 19^2 t + 49^2 + 49 \cdot 19^2 t + 49^2 t = 2 \cdot 169 - 2 \cdot 169 \cdot 19^2 t - 2 \cdot 169 \cdot 49$$

$$49 \cdot 19^2 t^2 + (49 \cdot 19^2 + 49 + 19^2 + 2 \cdot 169 \cdot 19^2) t + 49^2 + 2 \cdot 169 \cdot 49 = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 5x$$

$$a - b = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \end{cases}$$

$$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 18 - 12 \cdot 2 = -6$$

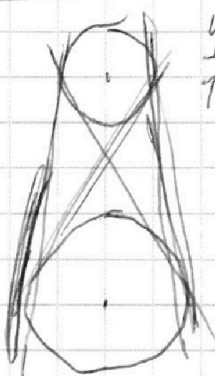
$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow$$

$$5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$



$$y = -ax + 8b$$

$$b = 1 + a = 0$$



$$\frac{4}{7} = \frac{x}{8} = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{12}{5}$$

$$5x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{5}$$

$$y = -ax + 8b$$

$$x^2 + (-ax + 8b - 12)^2 = 16$$



$$ctg \alpha$$

$$4\sqrt{15}$$

$$ctg \alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{\sqrt{7-19}}{7} = \frac{\sqrt{9-19}}{7}$$

$$ctg \alpha = \frac{\sqrt{16}}{7}$$

$$4x = 4 \Rightarrow \sqrt{16 - 4^2} = \sqrt{12 - 20} = 4\sqrt{3.5}$$

$$ctg = \sqrt{15} = \frac{12}{14} - \sqrt{15}$$

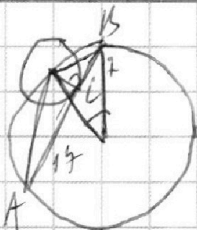
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos(\alpha) = \frac{\sin 17^\circ}{\sqrt{17^2 + 45^2}}$$

$$\cos 22^\circ = \frac{2 \cdot 17 \cdot 45}{17^2 + 45^2} = 1$$

$$\frac{17^2 - 45^2}{17^2 + 45^2} = 1$$

$$\frac{165}{9} = 18.33$$

$$\begin{array}{r} 10 \ 55 \\ 696 \ 289 \\ \underline{45} \times \quad 16 \\ 627 \ 16 \\ \underline{+ 289} \\ 46 \ 24 \end{array}$$

$$49x^2 + 45 = 2 \cdot 165 - 2 \cdot 165 - 17^2 + 45^2$$

$$49 \cdot 17^2 x^4 + 45^2 x^2 + 17^2 \cdot 45 x^2 + 45^2 = 2 \cdot 165 - 17^2 + 45^2 - 2 \cdot 165 \cdot 17 x^2 + 2 \cdot 165 \cdot 45 = 1$$

$$45 \cdot 17^2 x^4 + x^2(45 + 17^2 \cdot 45) + 45^2 - 4 \cdot 165 \cdot 45 = 0 \quad | : 45$$

$$17^2 x^4 + x^2(45 + 17^2) + 45 - 4 \cdot 165 = 0$$

$$289 + 45 = 338$$

$$D = 45^2 + 17^2 - 4 \cdot 45 \cdot 17 - 4 \cdot 17^2 - 45 + 16 \cdot 17^2 \cdot 165$$

$$289x^4 + x^2 \cdot 338 - 624 = 0$$

$$D = 338^2 - 4 \cdot 289 \cdot 624$$

$$45^2 + 17^2 + 2 \cdot 45 \cdot 17 - 4 \cdot 17^2 - 45 + 16 \cdot 17^2 \cdot 165 = (45 - 17^2)^2 + 16 \cdot 17^2 \cdot 165$$

$$x = \frac{2 \cdot 17^2}{2 \cdot 17^2}$$

$$49x^2 + 45 = 2 \cdot 165 - 2 \cdot 165 \cdot \frac{17^2 - 45^2}{17^2 + 45^2} \Rightarrow 17^2 \cdot 49x^4 + 45^2 x^2 + 45 \cdot 17^2 x^2 + 45^2 =$$

$$= 2 \cdot 165 - 4 \cdot 165 \cdot 17^2 + 1 \cdot 165 \cdot 45^2 - 2 \cdot 119 \cdot 17^2 x^2 + 2 \cdot 165 \cdot 45$$

$$2R^2 + 10R + 25$$

$$17^2 \cdot 49x^4 + x^2(45 + 45 \cdot 17^2) + 45^2 - 4 \cdot 165 \cdot 45 = 0 \quad 10R - 25 + 25 = 10R$$

$$17^2 x^4 + x^2(45 + 17^2) + 45 - 4 \cdot 165 = 0$$

$$D = 45^2 + 17^2 + 2 \cdot 45 \cdot 17 - 4 \cdot 17^2 - 45 + 16 \cdot 17^2 \cdot 165 = (45 - 17^2)^2 + 16 \cdot 17^2 \cdot 165$$

$$= 10^2 \cdot 24^2 + 16 \cdot 17^2 \cdot 165 = 54600 + 4 \cdot 624 \cdot 165$$

301; 4

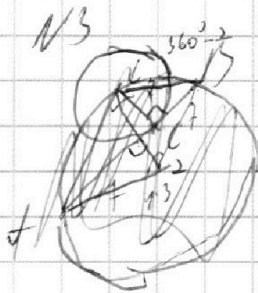
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{93+45y^2} = 7\sqrt{10y^2-7}$$

$$\cos(2) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\sqrt{17y^2+93}$$

a, b, c ; $ab: 2 \cdot 7^{15}$; $bc: 2 \cdot 7^{18}$; $ac: 2 \cdot 7^{23}$

$abc = ?$; $ab = R \cdot 2 \cdot 7^{15}$; $bc = m \cdot 2 \cdot 7^{18}$; $ac = S \cdot 2 \cdot 7^{23}$

$$\frac{ab}{c} = \frac{c}{a} = \frac{2 \cdot 7^{15} \cdot m}{2 \cdot 7^{23} \cdot R} \Rightarrow c = 2 \cdot 7 \cdot \frac{m}{R} \cdot a$$

$$2 \cdot 7 \cdot \frac{m}{R} \cdot a = 5 \cdot 2 \cdot 7 \Rightarrow a = 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \frac{R}{m} \Rightarrow a = \sqrt{5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \frac{R}{m}}$$

$$c = 2 \cdot 7 \cdot \frac{m}{R} \cdot \sqrt{5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \frac{R}{m}} = 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \frac{m}{R}}$$

$$b = \frac{R \cdot 2 \cdot 7^{15}}{a} = \frac{R \cdot 2 \cdot 7^{15}}{\sqrt{5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \frac{R}{m}}} = \sqrt{\frac{R \cdot m}{5 \cdot 2^{21} \cdot 7}} = 1$$

$\frac{R}{m} = 2$
 $R = 8 \cdot 7$
 $m = 2$
 $S = 2$

$$abc = \sqrt{5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \frac{R}{m}} \cdot \sqrt{\frac{R \cdot m}{5 \cdot 2^{21} \cdot 7}} \cdot \frac{2 \cdot 7^{23}}{2 \cdot 7} = 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \frac{R}{m}}$$

$$= \sqrt{5mR} \cdot 2 \cdot 7 = 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{5mR}$$

$$\Rightarrow 5mR = 2 \cdot 7 = 14$$

$$ab = 2 \cdot 7^{15}$$

$$bc = 2 \cdot 7^{18}$$

$$ac = 2 \cdot 7^{23}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} = 2 \cdot 7 \Rightarrow c = 2 \cdot 7 \cdot a$$

$$a^2 = 2 \cdot 7^{12} \Rightarrow a = 2 \cdot 7^{6}$$

$$\frac{a+b}{a^2-4ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-3ab} = \frac{a+b}{m(a+b)^2-3ab} = \frac{a+b}{m(a+b)^2-3ab}$$

$$\frac{10+10}{400+100-30} = \frac{20}{570} = \frac{2}{57}$$

$$\frac{1000+1000}{(2000)^2-3 \cdot 1000 \cdot 1000}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

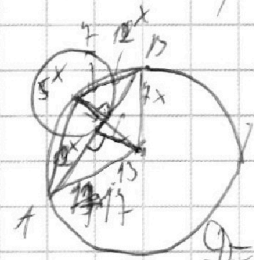
$$2^{\frac{15}{7}}, 7^{11}, 11; 2^{\frac{17}{7}}, 7^{18}, 11; 2^{\frac{25}{7}}, 7^{55}$$

$$nb > k \cdot 2^{\frac{15}{7}} \cdot 7^{11}, \quad b = m \cdot 2^{\frac{17}{7}} \cdot 7^{18}, \quad 11 = l \cdot 2^{\frac{25}{7}} \cdot 7^{55}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{R} \cdot 2^{\frac{2}{7}} \cdot 7^8 \Rightarrow c = \frac{m}{R} \cdot 2^{\frac{2}{7}} \cdot 7^8 \cdot a = 1 \cdot \frac{m}{R} \cdot a^2 = 2^{21} \cdot 7^{39} \Rightarrow 4x, 13x$$

$$a = \sqrt{\frac{2^{\frac{1}{7}} \cdot 7^{29} \cdot R}{R \cdot 2^{\frac{15}{7}} \cdot 7^{11}}} = 1 \quad c = 2^{\frac{2}{7}} \cdot 7^8 \cdot \sqrt{\frac{m}{R} \cdot 2^{21} \cdot 7^{39}}$$

$$b = \frac{m}{a} = \frac{m}{\sqrt{2^{\frac{2}{7}} \cdot 7^8}} = \sqrt{R \cdot 2^{\frac{15}{7}} \cdot 7^{11}} \cdot \sqrt{m}$$



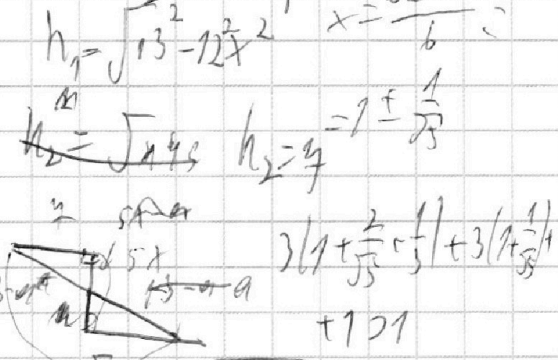
$$D = 36 - 425 = 36 - 29 =$$

$$2m = k = 7 \quad \text{Получаем}$$

$$\sqrt{Rm} \cdot 2^{\frac{15}{7}} \cdot 7^{11} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{\frac{21 \cdot 51 \cdot R \cdot l}{m}} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{\frac{m}{R} \cdot 2^{\frac{21}{7}} \cdot 7^{39}} \in \mathbb{Q} = 12 = 1$$

$$R = 2^{\frac{2}{7}}, m = 2, \quad h_1 = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

$$h_2 = \sqrt{4^2 - 3^2} = 1$$



$$\frac{5x - a}{7} = \frac{a}{\sqrt{165 - 144x^2}} = 1$$

$$\sqrt{165 - 144x^2} = \frac{a}{5x - a} = \frac{a}{15 - a} = \frac{95x^2}{15 - a}$$

$$5x \sqrt{165 - 144x^2} - a \sqrt{165 - 144x^2} = 7a = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$\frac{\sqrt{165 - 144x^2}}{7} = \frac{1}{15 - 1} = \frac{1}{14} \Rightarrow \sqrt{165 - 144x^2} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$3 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{5} \right) + 3 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + 1 = 1$$

$$5x \sqrt{165 - 144x^2} + 1 = 7 + \sqrt{165 - 144x^2}$$

$$\frac{7}{\sqrt{165 - 144x^2}} = \frac{1}{a} - 7 \Rightarrow a = \frac{7}{\frac{1}{7} - \frac{1}{\sqrt{165 - 144x^2}}} = \frac{7 \sqrt{165 - 144x^2}}{1 - \sqrt{165 - 144x^2}}$$

$$= 68 - 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = 68 - 3\sqrt{3}$$

$$19(x+2) = 1$$

$$14 + 32 = 22 - 14 = 10$$

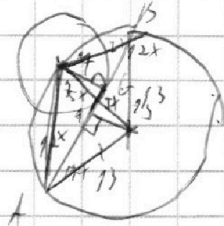
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



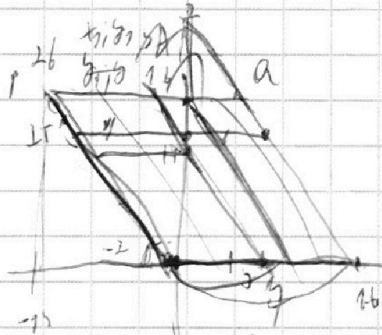
$$\frac{\sqrt{168 - 114x + 2x^2}}{7} = \frac{a}{\sqrt{2} \cdot 4}$$

$$3x^2 - 6x + 2, \quad 3x^2 + 5x + 1$$

$$3x^2 - 11,5x + 1,5 = t$$

$$\sqrt{t - 4,5x + \frac{1}{2}} - \sqrt{t + 4,5x - \frac{1}{2}} = 1 - 3x$$

$$\frac{15 \cdot 26 = 390}{15 \cdot 14 = 210}$$



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$4(t+1) = 2x + y$$

$$\frac{15 \cdot 26^2}{15^2 - 4} = \frac{50}{199}$$

$$|f(x_1)| + |f(x_2)| = 14 \quad b = 14$$

$$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 \quad y = 0 \Rightarrow -2x = 14$$

$$\frac{26 \cdot 26}{15} = 2 \quad y = -2x + b \Rightarrow$$

$$16 \cdot \frac{26}{2} + 14 \cdot \frac{16}{2} = 30 \cdot \frac{26}{2} = 19 \cdot 26 \quad 16 \cdot 15$$

$$y = -2x + b \quad a = -2 \cdot 16 + b = 16 = 32$$

$$b_1 + b_2 = 14 \quad \underline{16}$$

$$b \in [0; 32]$$

$$b = 0 \Rightarrow b = 14; \quad b = 1, b = 3 \quad b = 14 \Rightarrow b = 0$$

$$15, 15 \cdot 26 \cdot 23, 15; \quad \frac{13 \cdot 13 \cdot 27}{2} = 15 \cdot 19$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

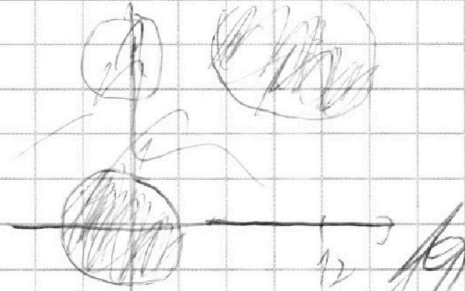
- 1 2 3 4 5 6 7



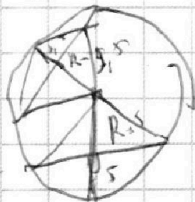
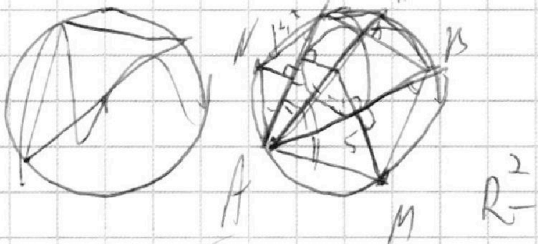
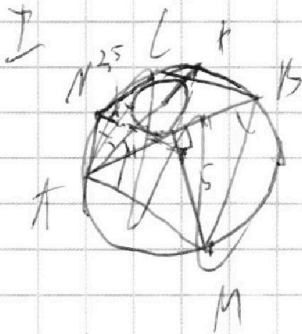
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} mx+ly-86=0 \\ \sqrt{x^2+y^2+1} + \sqrt{x^2+(y-1)^2-16} \leq 0 \end{cases}$$



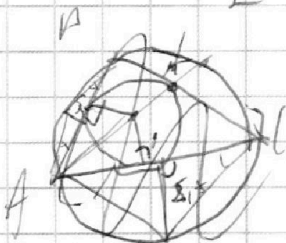
$$y = -ax + 686$$



$$\frac{360^\circ - 22^\circ - 22^\circ}{2} = 150^\circ - 22^\circ$$

$$AC = \sqrt{R^2 - R^2 + (R - 6,25)}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5R - 6,25}}{\sqrt{10R - 25}} = \sqrt{\frac{R - 1,25}{2R - 5}}$$



$$\frac{AC}{AB} = \sqrt{\frac{R - 1,25}{2R - 5}} = \frac{BA}{BL} \cdot \frac{CL}{BL}$$