



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Числа a, b и c - числа вида $2^m \cdot 7^n$, где $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

\neq стороне грани у a, b и c

$\exists x_2$ - сторона a , y_2 - сторона b , z_2 - сторона c

Тогда
$$\begin{cases} x_2 + y_2 \geq 14 \\ y_2 + z_2 \geq 17 \\ x_2 + z_2 \geq 20 \end{cases}$$
 , грани. измер. условия:
$$\begin{cases} x_2 + y_2 = 14 \\ y_2 + z_2 = 17 \\ x_2 + z_2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 8,5 \\ y_2 = 5,5 \\ z_2 = 11,5 \end{cases}$, т.к. $x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, но выбором

выбором, измер. :
$$\begin{cases} x_2 = 9 \\ y_2 = 6 \\ z_2 = 12 \end{cases}$$

\neq сторон. измерения, $\exists x_7 - a, y_7 - b, z_7 - c$

$$\begin{cases} x_7 + y_7 \geq 10 \\ y_7 + z_7 \geq 17 \\ x_7 + z_7 \geq 37 \end{cases}$$
 , грани. измер. :
$$\begin{cases} x_7 + y_7 = 10 \\ y_7 + z_7 = 17 \\ x_7 + z_7 = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_7 = 15 \\ y_7 = -5 \\ z_7 = 22 \end{cases}$$

$y_7 = -5$ не годит. Берем измерения, удовлетв. условию : $y_7 = 0$
$$\begin{cases} x_7 = 15 \\ y_7 = 0 \\ z_7 = 22 \end{cases}$$

Тогда $(abc)_{\min} = 2^9 \cdot 2^6 \cdot 2^{12} \cdot 7^{15} \cdot 7^0 \cdot 7^{22} = 2^{27} \cdot 7^{37}$

Ответ: $2^{27} \cdot 7^{37}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

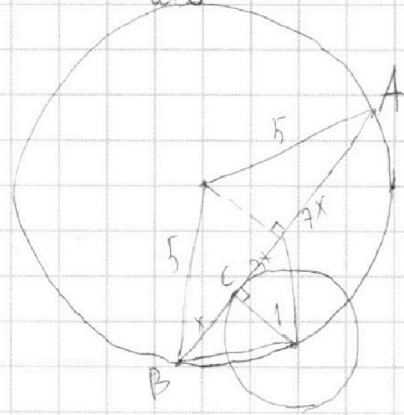
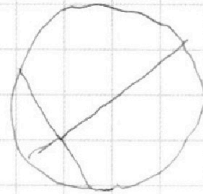
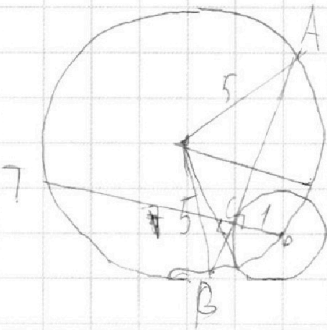
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} \xrightarrow{\text{конец}} \frac{a^2-6ab+b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2-8ab}{a+b} = a+b - \frac{8ab}{a+b}$$



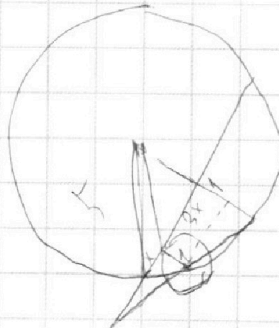
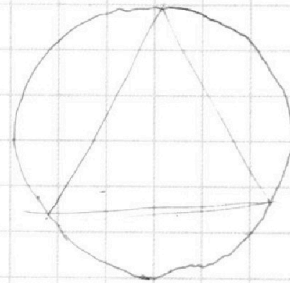
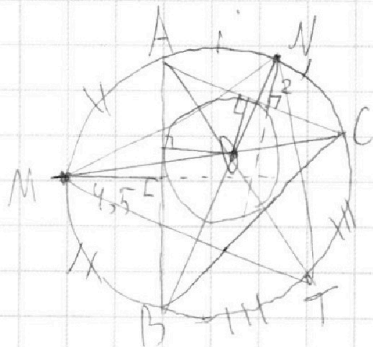
$$1x \cdot 7x = TC$$

$$OC \cdot TC = AC \cdot BC = 7x^2$$

$$\frac{OC}{AC} = \frac{CB}{TC}$$

$$\frac{1}{7x} = \frac{x}{TC}$$

$$1+9x^2+11x^2=2+10x^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N2

$$\frac{a^2 - 6ab + b^2}{a+b}$$
 Для обратной задачи m будем искать x

$$\frac{a^2 - 6ab + b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 8ab}{a+b} = a+b - \frac{8ab}{a+b}$$

Найдём такое m для $\frac{8ab}{a+b}$. Оно будет максимум x ,
если $\frac{8ab}{a+b} \equiv 0 \pmod m$ и $\frac{(a+b)^2 - 8ab}{a+b} \equiv 0 \pmod m$

$$\begin{cases} (a^2 - 6ab + b^2) \equiv 0 \pmod m \\ (a+b) \equiv 0 \pmod m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ((a+b)^2 - 8ab) \equiv 0 \pmod m \\ (a+b) \equiv 0 \pmod m \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 8ab \equiv 0 \pmod m$

1) Пусть $a \equiv 0 \pmod m$ и $b \equiv 0 \pmod m$, $m = (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n) \cdot (q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n)$,
где p_n и q_n — простые множители a и b соответственно.
Тогда $8ab \equiv 0 \pmod m$, но $(a+b) \not\equiv 0 \pmod m$, т.к. a и b — взаимно простые.
($a \equiv 0 \pmod{q_n}$, $b \equiv 0 \pmod{p_n}$)

2) Если $m = 2^k \cdot (p_1 \cdot \dots \cdot p_n) \cdot (q_1 \cdot \dots \cdot q_n)$, где $k \in [1, 3]$, \mathbb{N} , то
 $8ab \equiv 0 \pmod m$ из-за 8 в числителе, но $(a+b) \not\equiv 0 \pmod m$, иначе же из-за m ,
то 8 — некр. т.е. a и b — взаимно простые.

Заметим, что a и b не н.д. обратными числами (можно считать так)
Таким образом, в разложении m нет простых делителей a и b .
1. a и b не н.д. обратными числами (иначе $\frac{a}{b}$ — окр.)

2. Если $a \equiv 2$ и $b \equiv 2$ (или наоборот), то $8ab$ — чет., $a+b$ — нечет., значит не взаимно простые.

3. Если $a \equiv 2$ и $b \equiv 2$, то $a+b \equiv 2$ и может делиться на 8 (если $a \equiv 1, b \equiv 7$) — в этом случае
подходит $m = 8$, другие делители не мож. из-за 8 в числителе. Ответ: $m = 8$

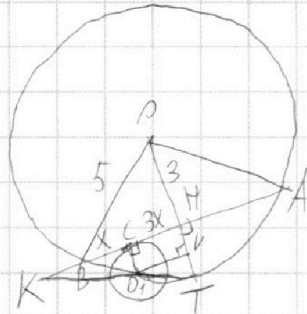
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

$$\angle OT \perp AB$$

$$\text{Тогда } BH = 4x$$

$$\frac{BC}{CH} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

$$\angle O_1V \perp OT$$

$$HV = 1$$

$$\frac{OT}{O_1K} = \frac{HT}{KV} \Rightarrow \frac{KT}{KO_1} = 2 \Rightarrow HT = 2CO_1 = 2 \cdot 1 = 2$$
$$\Delta KHT \sim \Delta KO_1V$$

$$OH = OT - HT = 5 - 2 = 3$$

$$\text{Т. Пиф.}; BH = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$4 = 4x \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Тогда } AB = 8x = 8 \cdot 1 = 8$$

$$\text{Ответ: } AB = 8.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \stackrel{N4}{=} 2 - 7x$$

$$] a = \sqrt{2x^2 - 5x + 3}, b = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}, \text{ Тогда } 2 - 7x = a^2 - b^2$$

$$a - b = a^2 - b^2 \Leftrightarrow a - b = (a - b)(a + b) \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$1) a - b = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 - \text{всегда верно, м.к. } D = -4 < 0 \text{ и ветви вверх} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$$

$$2) a + b = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} =$$

$$= -4x^2 + 3x - 3$$

$$\neq f(x) = -4x^2 + 3x - 3, \text{ ветви вниз}$$

$$D = 9 - 48 < 0, \text{ Тогда } -4x^2 + 3x - 3 \text{ всегда меньше нуля}$$

$$\text{или, } 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = -4x^2 + 3x - 3 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2}{7} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

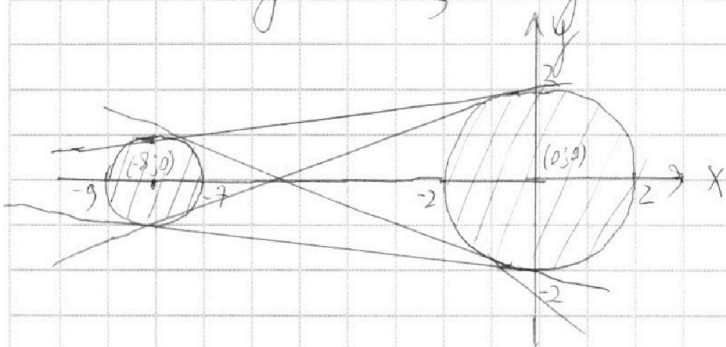
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$\neq (x+8)^2 + y^2 = 1^2, \quad x^2 + y^2 = 2^2$$



$$\neq ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases} \text{ — верно тогда}$$

и только тогда, когда $(\cdot) (x_0; y_0)$ лежит внутри или на одной окружности
и не лежит внутри или на другой

$\neq ax - y + 10b = 0$ — прямая, ~~и~~ система имеет два решения \Leftrightarrow
 \Leftrightarrow прямая $ax - y + 10b = 0$ касается одной окружности (касательная)

$$ax - y + 10b = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}x + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}y - \frac{10b}{\sqrt{a^2+1}} = 0$$

$$\begin{cases} \left| \frac{10b}{\sqrt{a^2+1}} \right| = 2 \\ \left| \frac{8a}{\sqrt{a^2+1}} - \frac{10b}{\sqrt{a^2+1}} \right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25b^2 = a^2 + 1 \\ 64a^2 + 100b^2 - 160ab = a^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 67a^2 - 160ab + 3 = 0 \\ b = \frac{+ \sqrt{a^2+1}}{5} \end{cases} \neq$$

$$\neq \Rightarrow \begin{cases} 67a^2 + 3 = 32a\sqrt{a^2+1} \\ 67a^2 + 3 = -32a\sqrt{a^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow 67^2 a^4 + 402a^2 + 9 = 1024a^4 + 1024a^2 \Leftrightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow 3465a^4 - 622a^2 + 9 = 0$$

$$D = 622^2 - 36 \cdot 3465 = 262144 = 512^2$$

$$\left[\begin{aligned} a^2 &= \frac{622 + 512}{6930} = \frac{1134}{6930} = \frac{567}{3465} = \frac{189}{1155} = \frac{63}{385} = \frac{9}{55} \\ a^2 &= \frac{622 - 512}{6930} = \frac{110}{6930} = \frac{11}{693} = \frac{1}{63} \end{aligned} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} a &= \pm \sqrt{\frac{3}{55}} \\ a &= \pm \sqrt{\frac{1}{63}} \end{aligned} \right. \quad \text{— четыре ромба для 4-х случаев}$$

$$\text{Ответ: нули } a \in \left\{ -\frac{3}{\sqrt{55}}, -\frac{1}{\sqrt{63}}, \frac{1}{\sqrt{63}}, \frac{3}{\sqrt{55}} \right\}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r}
 622 \\
 \times 622 \\
 \hline
 1244 \\
 + 1244 \\
 3732 \\
 \hline
 386884 \\
 - 124740 \\
 \hline
 262144
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 3465 \\
 36 \\
 \hline
 20790 \\
 + 10395 \\
 \hline
 124740
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 256 \\
 256 \\
 \hline
 1536
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 65536 \\
 65536 \\
 \hline
 262144
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 1280 \\
 512 \\
 \hline
 65536
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 3465 \\
 2 \\
 \hline
 6930
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 567 \quad | \quad 3 \\
 \hline
 3 \\
 \hline
 26 \\
 \hline
 27
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 + 512 \\
 622 \\
 \hline
 1134
 \end{array}$$

$$500 + 50 + 17 = 567$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$ab: \begin{matrix} 11 & 10 \\ 2 & 7 \end{matrix}$$

$$bc: \begin{matrix} 17 & 17 \\ 2 & 7 \end{matrix}$$

$$ac: \begin{matrix} 20 & 37 \\ 2 & 7 \end{matrix}$$

$$x - a$$

$$y - b$$

$$z - c$$

$$\begin{array}{r}
 -3465 \\
 27 \\
 \hline
 76 \\
 72 \\
 \hline
 45
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3805 \\
 3805 \\
 \hline
 7610
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 z = 12 \\
 y = 6 \\
 x = 9
 \end{array}$$

$$y = 5,5 \quad x = 8,5$$

$$\begin{array}{r}
 -385 \\
 35 \\
 \hline
 35 \\
 35 \\
 \hline
 70
 \end{array}$$

$$\begin{cases}
 x + y = 14 \\
 y + z = 17 \\
 x + z = 20
 \end{cases}
 \Rightarrow
 \begin{cases}
 z - y = 6 \\
 z + y = 17
 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r}
 2z = 23 \\
 z = \frac{23}{2} = 11,5 \\
 -693 \\
 66 \\
 \hline
 33
 \end{array}$$

$$\begin{cases}
 x_1 + y_1 = 10 \\
 x_1 + y_1 + z_1 = 17 \\
 x_1 + z_1 = 37
 \end{cases}
 \Rightarrow
 \begin{cases}
 z_1 - x_1 = 7 \\
 z_1 + x_1 = 37
 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
 z_1 = \frac{44}{2} = 22 \\
 y_1 = -5 \\
 x_1 = 15
 \end{array}$$

$$a = 2^9 \cdot 7^{15} \quad b =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

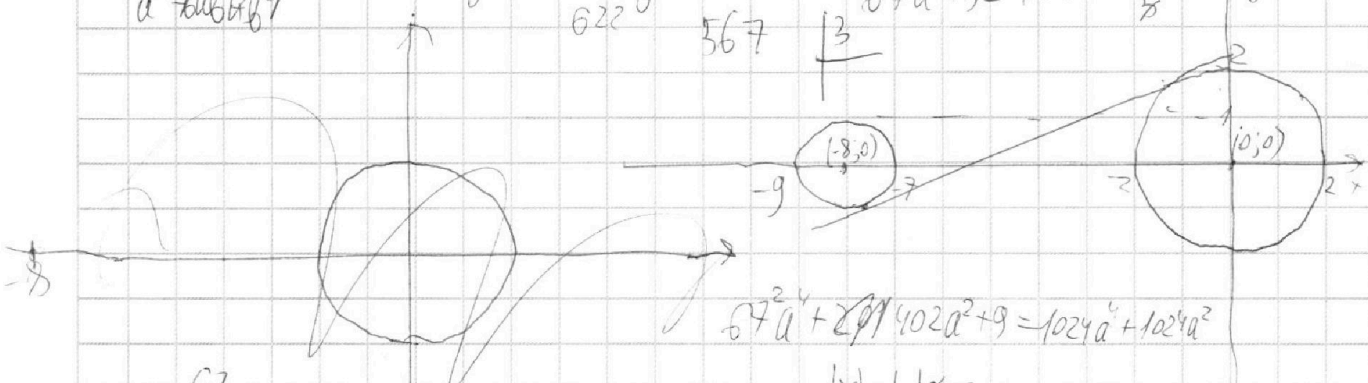
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$



$$\begin{array}{r} \times 67 \\ 402 \\ \hline 1489 \\ 1024 \\ \hline 3765 \end{array}$$

$ax - y + 10b = 0$ $|x| + |y| \geq 2$

$ax + 10b = y$ $-ax = y - 10b$ $y = ax + 10b$

$$\frac{ax - y + 10b = 0}{\sqrt{a^2 + 1}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \cdot \frac{y}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{10b}{\sqrt{a^2 + 1}} = 0$$

$\frac{8a}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{10b}{\sqrt{a^2 + 1}}$ $b = \frac{4}{5}a$ $a = \pm \sqrt{\frac{1}{15}}$

$b = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5} - 10b$ $10b = 2$ $25b^2 = a^2 + 1$

$$\begin{cases} 63a^2 - 160ab - 1 = -100b^2 \\ 4a^2 + 4 = 100b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 67a^2 - 160ab + 3 = 0 \\ 3465a^4 - 622a^2 + 9 = 0 \end{cases}$$